E_n 的奇点量与几类分支问题*

刘 一 戎

(中南工业大学数力系，长沙 410012)

摘　要

本文通过讨论复系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda)$ 在极坐标下的 2π 周期解，把实平面 Hopf 分支、中心点分支和一类 Homoclinic 分支的研究统一地归结为奇点量公式的推导和代数方程的求根，并统一地给出了由上述分支产生多个极限环的判据. 对二次系统对偶地给出了由 Homoclinic 分支和中心点分支产生 3 个极限环的实例. 对缺二次项的三次系统对偶地给出了由双叶分界线环和中心点产生 10 个和 5 个极限环的实例.

关键词　奇点量、分支

一、极坐标下的复 2π 周期解

考虑系统

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dT}&=(\lambda+1)z+\sum_{\alpha+\beta=2}^{n}a_{\alpha\beta}(\varepsilon)z^\alpha w^\beta,\\ \frac{dw}{dT}&=(\lambda-1)w-\sum_{\alpha+\beta=2}^{n}b_{\alpha\beta}(\varepsilon)w^\alpha z^\beta,\end{aligned}\qquad E_n^*(\varepsilon,\lambda)$$

其中 z,w,T 为复变量，λ 和 ε 为小参数，诸 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 在点 $\varepsilon=0$ 解析. 如果 $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ 在点 $\varepsilon=0$ 解析，且 $\lambda(0)=0$, 则把相应的系统记为 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$. 由文献[1]中的定理 1.4 得:

引理 1.1　对系统 $E_n^*(\varepsilon,0)$, 可逐项确定关于 z 与 w 的形式级数 $F(z,w)=zw+\sum_{\alpha+\beta=3}^{\infty}c_{\alpha\beta}(\varepsilon)z^\alpha w^\beta$, 使得

$$\frac{dF}{dT}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\varepsilon)(zw)^{k+1},\tag{1.1}$$

其中所有的 $c_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 与 $\mu_k(\varepsilon)$ 都是诸 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 的有理系数多项式，且当 $\mu_1(\varepsilon),\mu_2(\varepsilon)\cdots,\mu_{k-1}(\varepsilon)$ 均为零时 $\mu_k(\varepsilon)$ 即为原点的第 k 个奇点量，$k=1,2,\cdots$.

系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda)$ 经过复域中的极坐标变换

1991-09-23 收稿，1992-04-13 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目

$$z = re^{i\omega},\quad w = re^{-i\omega} \tag{1.2}$$

化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{i}r\frac{\lambda + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\omega, \varepsilon) r^k}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(\omega, \varepsilon) r^k}, \tag{1.3$_{\varepsilon,\lambda}$}$$

其中 r 与 ω 为复变量，且对每一个 k,

$$\begin{cases} P_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha+\beta=k+1} [a_{\alpha\beta}(\varepsilon) e^{\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\omega} - b_{\alpha\beta}(\varepsilon) e^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\omega}], \\ Q_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha+\beta=k+1} [a_{\alpha\beta}(\varepsilon) e^{\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\omega} + b_{\alpha\beta}(\varepsilon) e^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta-1)\omega}]. \end{cases} \tag{1.4}$$

对充分小的 h，方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda}$ 适合初值条件 $r|_{\omega=0} = h$ 的解记为

$$r = f(\omega, h, \varepsilon, \lambda) = e^{\mathrm{i}\lambda\omega} h + \sum_{k=2}^{\infty} v_k(\omega, \varepsilon, \lambda) h^k. \tag{1.5}$$

用 Picard 逐次逼近法[2] 易证存在正数 λ_0, δ_0 与 ζ_0，使(1.5)式右端函数在域 $|\omega| < 4\pi$, $|\lambda| < \lambda_0$, $|\varepsilon| < \delta_0$, $|h| < \zeta_0$ 内有定义，对所有变元单值解析，且在该域内有

$$\frac{1}{2}|h| < |f(\omega, h, \varepsilon, \lambda)| < \frac{3}{2}|h|. \tag{1.6}$$

引进后继函数

$$\Delta(h, \varepsilon, \lambda) = \frac{1}{h}[f(2\pi, h, \varepsilon, \lambda) - h]. \tag{1.7}$$

由于 $\Delta(0, 0, 0) = 0$, $\Delta'_\lambda(0, 0, 0) = 2\pi\mathrm{i}$，故由隐函数存在定理，在点$(0, 0, 0)$附近，方程 $\Delta(h, \varepsilon, \lambda) = 0$ 有唯一解

$$\lambda = g(h, \varepsilon) = -\sum_{k=2}^{\infty} g_k(\varepsilon) h^k, \tag{1.8}$$

且有表达式

$$\Delta(h, \varepsilon, \lambda) = 2\pi\mathrm{i}[\lambda - g(h, \varepsilon)] I(h, \varepsilon, \lambda), \tag{1.9}$$

其中 $I(h, \varepsilon, \lambda)$ 在点$(0,0,0)$解析，且 $I(0,0,0) = 1$.

引理 1.2 对充分小的 h, ε, λ, $f(\omega, h, \varepsilon, \lambda)$ 是关于 ω 的 2π 周期函数，当且仅当 $\lambda = g(h, \varepsilon)$.

类似于文献[3]中的引理 1，引理 2 有：

引理 1.3 诸 $g_k(\varepsilon)$ 可表为下列形式：

$$g_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}\mu_1(\varepsilon),$$

$$g_3(\varepsilon) = \mu_1(\varepsilon)\sigma_3^{(1)}(\varepsilon),$$

$$\vdots$$

$$g_{2k-1}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(\varepsilon)\sigma_{2k-1}^{(i)}(\varepsilon),$$

$$g_{2k}(\varepsilon)=\frac{1}{2}\mu_k(\varepsilon)+\sum_{s=1}^{k-1}\mu_s(\varepsilon)\sigma_{2k}^{(s)}(\varepsilon),$$

$$\vdots$$

$$g_{2M(n)}(\varepsilon)=\frac{1}{2}\mu_{M(n)}+\sum_{s=1}^{M(n)-1}\mu_s(\varepsilon)\sigma_{2M(n)}^{(s)}(\varepsilon),$$

$$g_l(\varepsilon)=\sum_{s=1}^{M(n)}\mu_s(\varepsilon)\mu_l^{(s)}(\varepsilon),\ (l>2M(n)),\tag{1.10}$$

其中 $M(n)$ 是一个仅与 n 有关的正整数，所有的 $\mu_k^{(s)}(\varepsilon)$ 都在点 $\varepsilon=0$ 解析.

定理 1.1　假定系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda)$ 当 $\lambda=\varepsilon=0$ 时原点为 m 阶细临界型奇点[1]，则

i) 存在正数 ζ_1，使当 $0<|h|<\zeta_1$ 时，$f(\omega,h,0,0)$ 不是 ω 的 2π 周期函数. 此外，

ii) 存在正数 λ_1 及 δ_1，使当 λ 与 ε 分别在圆环 $0<|\lambda|<\lambda_1$ 与 $0<|\varepsilon|<\delta_1$ 内取任何固定的复数值时，$\lambda-g(h,\varepsilon)$ 在圆环 $0<|h|<\zeta_1$ 内恰有 $2m$ 个复零点 $h=\tilde{h}_k(\varepsilon,\lambda)$；相应地，方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda}$ 在平凡解 $r=0$ 附近恰有 $2m$ 个 2π 周期解 $r=f(\omega,\tilde{h}_k(\varepsilon,\lambda),\varepsilon,\lambda)$，其中 $\tilde{h}_k(\varepsilon,\lambda)$ 在点(0,0)连续，且当 λ 与 ε 都趋于零时有 $\tilde{h}_k(\varepsilon,\lambda)\to 0$，$k=1,2,\cdots,2m$.

定理 1.2　对系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$，假定当 $\varepsilon=0$ 时原点的奇点量全部为零，则有下列结论：

i) 对充分小的 h，方程$(1.3)_{0,0}$ 适合初值条件 $r|_{\omega=0}=h$ 的解都是 2π 周期的；

ii) 如果函数组 $\lambda(\varepsilon),\mu_1(\varepsilon),\mu_2(\varepsilon),\cdots,\mu_{M(n)}(\varepsilon)$ 当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时不全为零，则方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda(\varepsilon)}$ 在平凡解 $r=0$ 附近至多存在 $2M(n)$ 个 2π 周期解.

证　i) 显然.　ii) 由假定并由引理 1.3，存在一个正数 N 与一串不全为零的常数 $c_0,c_1,\cdots c_{M(n)}$，使得

$$\begin{cases}\lambda(\varepsilon)=c_0\varepsilon^N+o(\varepsilon^N),\\ \mu_k(\varepsilon)=2c_k\varepsilon^N+o(\varepsilon^N),\ k=1-M(n).\end{cases}\tag{1.11}$$

兹设 $c_0=c_1=\cdots=c_{m-1}=0$，$c_m\neq 0$，$0\leqslant m\leqslant M(n)$，由(1.11)式并由引理 1.3 得

$$\lambda(\varepsilon)-g(h,\varepsilon)=\varepsilon^N\Delta^*(h,\varepsilon),\tag{1.12}$$

其中 $\Delta^*(h,\varepsilon)$ 有非零的收敛半径 $|\varepsilon|<\delta_2$，$|h|<\zeta_2$（不妨设 $\delta_2<\delta_0$，$\zeta_2<\zeta_0$），且

$$\Delta^*(h,0)=c_mh^{2m}+o(h^{2m}).\tag{1.13}$$

由(1.13)式并由幅角原理，存在正数 $\delta_3<\delta_2$ 及 $\zeta_3<\zeta_2$，使当 $0<|\varepsilon|<\delta_3$ 时函数 $\lambda(\varepsilon)-g(h,\varepsilon)$ 在圆 $|h|<\zeta_3$ 内恰有 $2m$ 个复零点 $h=\tilde{h}_k(\varepsilon)$，其中 $\tilde{h}_k(\varepsilon)$ 在点 $\varepsilon=0$ 连续，且 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{h}_k(\varepsilon)=0$，$k=1,2,\cdots 2m$.

注记 1.1　由于方程 $(1.3)_{\varepsilon,\lambda}$ 经变换 $r\to -r$，$\omega\to\omega+\pi$ 后形式不变，故对充分小的 ε,λ，如果 $h=h_0$ 是函数 $\lambda-g(h,\varepsilon)$ 的一个复零点，$|h_0|\ll 1$，则 $h=-f(\pi,h_0,\varepsilon,\lambda)$ 亦然. 从而方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda}$ 的 2π 周期解成对出现.

由引理 1.3 及隐函数存在定理得：

定理 1.3　对系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$，假定存在正数 m,N,l（其中 $N>2ml$，$1\leqslant m\leqslant M(n)$）及一串不全为零的常数 $c_0,c_1,\cdots,c_m$ 使得

$$\begin{cases}\lambda(\varepsilon)=c_0\varepsilon^N+o(\varepsilon^N),\\ \mu_k(\varepsilon)=2c_k\varepsilon^{N-2kl}+o(\varepsilon^{N-2kl}),\ k=1-m,\\ \mu_j(\varepsilon)=o(\varepsilon^{N-2jl}),\ j=m+1-M(n),\end{cases}\tag{1.14}$$

则有下列结论:

i) $\lambda(\varepsilon)-g(\varepsilon^l\rho,\varepsilon)=\varepsilon^N[\tilde{g}(\rho)+\varepsilon G(\rho,\varepsilon)]$,

其中 $\tilde{g}(\rho)=c_0+c_1\rho^2+c_2\rho^4+\cdots+c_m\rho^{2m}$;

ii) 如果 $\rho=\rho_0$ 是 $\tilde{g}(\rho)$ 的一个简单零点,则当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时函数 $\lambda(\varepsilon)-g(h,\varepsilon)$ 有一个相应的简单零点 $h_0(\varepsilon)=\varepsilon^l\rho_0+o(\varepsilon^l)$。

注记 1.2 在定理 1.3 中:若 $N=2ml$, $c_m\neq 0$, 则当 $\varepsilon=0$ 时原点为 m 阶细临界型奇点,所涉及的是复 Hopf 分支;又若当 $\varepsilon=0$ 时原点的奇点量全部为零,则所涉及的是复中心点分支。

以下讨论 2π 周期函数:

$$R(\omega,h,\varepsilon)=f(\omega,h,\varepsilon,g(h,\varepsilon))=h+\sum_{k=2}^{\infty}R_k(\omega,\varepsilon)h^k\tag{1.15}$$

的表达式结构。

定理 1.4 对每一个 $k\geqslant 2$ 有下列结论:

i) $R_k(\omega,\varepsilon)$ 是关于 $e^{i\omega}$ 与 $e^{-i\omega}$ 的多项式,其系数是诸 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 的有理系数多项式;

ii) $g_k(\varepsilon)$ 是诸 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 的有理系数多项式。

证 对充分小的 h,ε, $r=R(\omega,h,\varepsilon)$ 是方程

$$\frac{dr}{d\omega}=ir\frac{g(h,\varepsilon)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}P_k(\omega,\varepsilon)r^k}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}Q_k(\omega,\varepsilon)r^k}\tag{1.16$_{h,\varepsilon}$}$$

适合初值条件 $r|_{\omega=0}=h$ 的解。将 $r=R(\omega,h,\varepsilon)$ 代入方程 $(1.16)_{h,\varepsilon}$, 用 Poincaré 小参数法可得诸 $R_k(\omega,\varepsilon)$ 所满足的一串微分方程

$$\begin{cases}R_2'=iP_1,\\ R_3'=i[-g_2+(2P_1R_2+P_2-Q_1P_1)],\\ R_{k+1}'=i[-g_k+\Phi_k],\ k=3,4,\cdots,\end{cases}\tag{1.17}$$

其中 Φ_k 是关于 g_2-g_{k-1}, R_2-R_k, P_1-P_k 及 Q_1-Q_{k-1} 这些元素的有理系数多项式。由于对每一个 k 有 $R_k(0,\varepsilon)=R_k(2\pi,\varepsilon)=0$, 故由(1.17)式用数学归纳法易得所欲证。

推论 1.1 对系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$, 如果 ε 是实变量, $\lambda(\varepsilon)$ 及所有的 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 都是关于 ε 的具有实系数的幂级数,则在定理 1.3 的条件下,当 $\rho=\rho_0$ 是 $\tilde{g}(\rho)$ 的一个简单实零点时,相应的 $h=h_0(\varepsilon)$ 也是 $\lambda(\varepsilon)-g(h,\varepsilon)$ 的一个简单实零点。

推论 1.2 在表达式

$$\tau(h,\varepsilon)=i\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}Q_k(\omega,\varepsilon)R^k(\omega,h,\varepsilon)}=2\pi i\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k(\varepsilon)h^k\right]\tag{1.18}$$

中所有的 $\tau_k(\varepsilon)$ 都是诸 $a_{\alpha\beta}(\varepsilon)$, $b_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ 的有理系数多项式.

在(1.18)式中, $\tau(h,\varepsilon)$ 表示由方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda(\varepsilon)}$ 的 2π 周期解所对应的 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\tau))$ 的解关于T的一个周期. 由本文第二节中的结论,这种解可能是多周期函数.

对于右端关于小参数 ε 解析的实平面微分自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\tilde{\lambda}(\varepsilon)x-y+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{n}\tilde{a}_{\alpha\beta}(\varepsilon)x^{\alpha}y^{\beta},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x+\tilde{\lambda}(\varepsilon)y+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{n}\tilde{b}_{\alpha\beta}(\varepsilon)y^{\alpha}x^{\beta},\end{cases}\tag{1.19}$$

先将其自然延拓到复域,再通过变换 $z=x+iy, w=x-iy, T=it$ 即得系统 $E_n^*(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$, 其中 $\lambda(\varepsilon)=-i\tilde{\lambda}(\varepsilon)$. 由文献[1]中的注记 1.2,对每一个 k,系统$(1.19)_\varepsilon$用形式级数 $F(x+iy,x-iy,\varepsilon)$ 求得的第k个焦点量为 $V_{2k+1}(\varepsilon)=i\mu_k(\varepsilon)$, 其中$F$如引理 1.1 所述. 由于变换(1.2)式对系统$(1.19)_\varepsilon$而言即为 $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$, 故由定理 1.1、定理 1.2 及注记 1.1、系统$(1.19)_\varepsilon$至多可以由 Hopf 分支或中心点分支在原点邻域产生 $M(n)$ 个极限环,而定理 1.3 则给出了产生多个极限环的一组充分条件,在应用时无需构造环域.

注记 1.3　对系统$(1.19)_\varepsilon$, 如果当 $\varepsilon=0$ 时原点是m阶细焦点, 则在定理 1.3 的条件中必有 $c_m\neq 0$. 此时若取 $N=1$, $i=\dfrac{1}{2m}$, $c_0\neq 0$, 则由于诸 $\mu_k(\varepsilon)$ 是关于 ε 的幂级数,故在(1.14)式中有 $c_1=c_2=\cdots=c_{m-1}=0$, 由此得 $\tilde{g}(\rho)=c_0+c_m\rho^{2m}$. 从而可以把古典的 Hopf 分支定理看作定理 1.3 的一个特例.

二、实平面上的一类 Homoclinic 分支

考虑对小参数 ε 解析的实平面 n 次系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\lambda(\varepsilon)+1)x+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{n}a_{\alpha\beta}(\varepsilon)x^{\alpha}y^{\beta},\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=(\lambda(\varepsilon)-1)y-\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{n}b_{\alpha\beta}(\varepsilon)y^{\alpha}x^{\beta},\end{cases}\qquad E_n(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$$

其中 $\lambda(0)=0$. 假定 $E_n(0,0)$ 有一个过鞍点 $O(0,0)$ 的分界线环 Γ_0, 其上以O为唯一的实奇点,没有无穷远点,无切线段,

$$l:\ \{(x,y)/x=h,\ y=h,\ 0<h\ll 1\}\tag{2.1}$$

位于 Γ_0 的内部又假定 $E_n(0,0)$ 在 Γ_0 的邻域存在正则积分 $H(x,y)=\text{const}$.

对充分小的 h,ε, 系统 $E_n(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$ 过点 (h,h) 的相曲线记为

$$\Gamma(h,\varepsilon):\ \begin{cases}x=\varphi(t,h,\varepsilon),\\ y=\psi(t,h,\varepsilon),\end{cases}$$

其中 $\varphi(0,h,\varepsilon)=\psi(0,h,\varepsilon)=h$.

当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时 $E_n(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$ 相应于 Γ_0 的稳定流形和不稳定流形依次记为 Γ_ε^- 和 Γ_ε^+.

对 $E_n(0,0)$, 由于在 Γ_0 的邻域存在正则积分, 故在 Γ_0 内侧充分小的邻域内充满闭轨,且原点的鞍点量全部为零[1]. 对于在定理 1.2 的证明过程中所指出的 δ_3 与 ζ_3 有:

引理 2.1　存在正数 $\delta_4 < \delta_3$ 及 $\zeta_4 < \zeta_3$，使当 $0 < |\varepsilon| < \delta_4$ 时 Γ_ε^+（或 Γ_ε^-）从原点出发在 Γ_0 的邻域盘旋一周后与无切线段相交于一点 $(\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$，其中 $0 \leqslant \xi_\varepsilon < \zeta_4$.

以下恒假定引理 2.1 括号外的结论成立(否则作变换 $x \to y$, $y \to x$, $t \to -t$).

引理 2.2　当 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 及 $h = h_0$ 满足 $|\varepsilon_0| < \delta_4$, $0 < h_0 < \frac{1}{2}\zeta_4$ 时 $\Gamma(h_0, \varepsilon_0)$从点 (h_0, h_0) 出发随 t 的增加将在 Γ_0 的邻域盘旋一周，并与无切线段 l 相交于某点 (h_1, h_1)，其中 $\xi_2 < h_1 < \zeta_4$.

以下，暂时把 $E_n(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 自然延拓为复系统 $E_n^*(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$，并把 $E_n^*(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 过点 (h, h) 的相曲面[4]记为

$$S(h, \varepsilon) = \{(z, w)/z = \Phi(T, h, \varepsilon),\ w = \Psi(T, h, \varepsilon),\ t \in \mathscr{D}(h, \varepsilon)\}.$$

假定当 $T = 0$ 时函数组(一般是多值的)

$$\{\Phi(T, h, \varepsilon),\ \Psi(T, h, \varepsilon)\} \tag{2.2}$$

的值域中含点 (h, h). 用 Picard 逐次逼近法易证:

引理 2.3　存在正数 $\delta_5 < \delta_4$ 及 $\zeta_5 < \zeta_4$，使得 $\forall T_0$，当 $|\varepsilon| < \delta_5$, $|h| < \zeta_5$ 时自治方程

$$\frac{d\omega}{dT} = \frac{1}{i}\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(\omega, \varepsilon) f^k(\omega, h, \varepsilon, \lambda(\varepsilon))\right] \tag{2.3}$$

适合初值条件 $T = T_0$, $\omega = 0$ 的解.

$$\omega = W(T - T_0, h, \varepsilon) = i(T - T_0) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(T - T_0, \varepsilon) h^k \tag{2.4}$$

在域 $|T - T_0| < 3\pi$ 内存在,对所有变元单值解析,且在该域内有 $|W(T - T_0, h, \varepsilon)| < 4\pi$.

由于在变换(1.2)式下，$S(h, \varepsilon)$ 与方程$(1.3)_{\varepsilon,\lambda(\varepsilon)}$ 的解 $r = f(\omega, h, \varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 相对应,故由引理 2.3 得到函数组(2.2)的一个单值分支 $\{\Phi_0, \Psi_0\}$ 如下:

$$\begin{cases} \Phi_0(T, h, \varepsilon) = f(W(T, h, \varepsilon), h, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) e^{iW(T,h,\varepsilon)}, \\ \Psi_0(T, h, \varepsilon) = f(W(T, h, \varepsilon), h, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) e^{-iW(T,h,\varepsilon)}, \end{cases} \tag{2.5}$$

且由(1.6)及(2.5)式,当 $|T| < 3\pi$, $|\varepsilon| < \delta_5$, $|h| < \zeta_5$ 时有

$$|h| e^{-4\pi} < |\Phi_0| + |\Psi_0| < 3|h| e^{4\pi}. \tag{2.6}$$

由定理 1.2 的证明过程，存在正数 $\delta_6 < \delta_5$ 及 $\zeta_6 < \zeta_5$，使当 $|\varepsilon| < \delta_6$ 时后继函数 $\lambda(\varepsilon) - g(h, \varepsilon)$ 如定理 1.2 所指出的零点全部在圆 $|h| < \zeta_6$ 之内.

引理 2.4　如果 $|\varepsilon_0| < \delta_6$, $h = h_0$ 是函数 $\lambda(\varepsilon_0) - g(h, \varepsilon_0)$ 的一个实零点，且 $0 < h_0 < \zeta_6$，则函数组

$$\{\Phi_0(T, h_0, \varepsilon_0),\ \Psi_0(T, h_0, \varepsilon_0)\} \tag{2.7}$$

有一个虚周期 $\tau_0 = \tau(h_0, \varepsilon_0)$，其中 $\tau(h, \varepsilon)$ 由(1.18)式给出.

引理 2.5　在引理 2.4 的假定下,如果实系统 $E_n(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 的相曲线 $\Gamma(h_0, \varepsilon_0)$ 从点(h_0, h_0) 出发,随 t 的增加在 Γ_0 的邻域盘旋一周后与无切线段 l 相交于点 (h_1, h_1)，则 $h = h_1$ 也是函数 $\lambda(\varepsilon_0) - g(h, \varepsilon_0)$ 的一个实零点,且 $0 < h_1 < \zeta_6$.

证　只需证明 $h = h_1$ 是函数 $\lambda(\varepsilon_0) - g(h, \varepsilon_0)$ 的零点.

设 $\Gamma(h_0, \varepsilon_0)$ 从点 (h_0, h_0) 到 (h_1, h_1) 所经历的时间为 t_1. 在T复平面上作折线 $L =$

$L_1\cup L_2\cup L_3$，其中 L_1, L_2 和 L_3 依次为复平面上的线段 $[0,\tau_0],[0,t_1]$ 和 $[t_1,t_1+\tau_0]$，作函数组 $\{\Phi(T, h_0, \varepsilon_0), \Psi(T, h_0, \varepsilon_0)$ 的一个单值连续分支 $\{\Phi_L, \Psi_L\}$ 如下：

$$\Phi_L(T, h_0, \varepsilon_0)=\begin{cases}\Phi_0(T, h_0, \varepsilon_0),\ T\in L_1,\\ \varphi(t, h_0, \varepsilon_0),\ t\in L_2,\\ \Phi_0(T-t_1, h_1, \varepsilon_0),\ T\in L_3,\end{cases}\tag{2.8}$$

$$\Psi_L(T, h_0, \varepsilon_0)=\begin{cases}\Psi_0(T, h_0, \varepsilon_0),\ T\in L_1,\\ \phi(t, h_0, \varepsilon_0),\ t\in L_2,\\ \Psi_0(T-t_1, h_1, \varepsilon_0),\ T\in L_3。\end{cases}\tag{2.9}$$

由于 $E_n^*(\varepsilon_0, \lambda(\varepsilon_0))$ 是自洽系统，函数组(2.7)有一个虚周期 τ_0，故其解析延拓 $\{\Phi_0(T-t_1, h_1, \varepsilon_0), \Psi_0(T-t_1, h_1, \varepsilon_0)\}$ 亦然(限于篇幅，有关证明从略)。记 $\omega_0=W(\tau_0, h_1, \varepsilon_0)$，则由(2.4)式得

$$\begin{aligned}\omega_0&=2\pi+[W(\tau_0, h_1, \varepsilon_0)-W(\tau_0, h_0, \varepsilon_0)]\\&=2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}W_k(\tau_0,\varepsilon_0)(h_1^k-h_0^k)。\end{aligned}\tag{2.10}$$

在(2.8)与(2.9)式中置 $T=t_1+\tau_0$ 并由(2.5)式得

$$\begin{cases}f(\omega_0, h_1, \varepsilon_0, \lambda(\varepsilon_0))e^{i\omega_0}=h_1,\\ f(\omega_0, h_1, \varepsilon_0, \lambda(\varepsilon_0))e^{-i\omega_0}=h_1。\end{cases}\tag{2.11}$$

由(2.10)与(2.11)式得 $\omega_0=2\pi$，且 $f(2\pi, h_1, \varepsilon_0, \lambda(\varepsilon_0))=h_1$，从而引理 2.5 得证。

回到实域，得本节的主要结果如下：

定理 2.1　在引理 2.4 的假定下，系统 $E_n(\varepsilon_0, \lambda(\varepsilon_0))$，的相轨线 $\Gamma(h_0, \varepsilon_0)$ 是闭轨，位于 Γ_0 的邻域。

证　设不然，则由引理 2.5，$h=h_1$ 也是 $\lambda(\varepsilon_0)-g(h, \varepsilon_0)$ 的实零点，且 $0<h_1<\zeta_6$。把引理 2.5 用于 $\Gamma(h_1, \varepsilon_0)$。同理可得 $\lambda(\varepsilon_0)-g(h, \varepsilon_0)$ 的一个实零点 $h=h_2$，且 $0<h_2<\zeta_6$。如此继续下去，可得 $\lambda(\varepsilon_0)-g(h, \varepsilon_0)$ 的一串实零点 $h=h_k$，$0<h_k<\zeta_6, k=1,2\cdots$；另一方面，由定理 1.2，$\lambda(\varepsilon_0)-g(h, \varepsilon_0)$ 在圆 $|h|<\zeta_6$ 内至多有 $2M(n)$个复零点。这一矛盾说明定理 2.1 成立。

由定理 2.1、推论 1.1 并注意到 $\tilde{g}(\rho)$ 是偶函数得

定理 2.2　在定理 1.3 的条件下，如果 $\rho=\rho_0$ 是 $\tilde{g}(\rho)$ 的一个正的简单零点，则当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时 $\Gamma(h_0(\varepsilon), \varepsilon)$ 是系统 $E_n(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 的闭轨，位于 Γ_0 的邻域，其中 $h_0(\varepsilon)=|\varepsilon^l\rho_0|+o(\varepsilon^l)$。

例 2.1　考虑实系统：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(x-3y^2)\left[1+\lambda(\varepsilon)+\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k(\varepsilon)}{2}H^k\right],\\ \dfrac{dy}{dt}=(-y+3x^2)\left[1-\lambda(\varepsilon)-\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k(\varepsilon)}{2}H^k\right],\end{cases}\tag{2.12}_\varepsilon$$

其中 $H=xy+3x^3+3y^3$，$\lambda(\varepsilon)=-36\varepsilon^8$，$\mu_1(\varepsilon)=98\varepsilon^6$，$\mu_2(\varepsilon)=-28\varepsilon^4$，$\mu_3(\varepsilon)=2\varepsilon^2$。

系统$(2.12)_\varepsilon$ 的前三个鞍点量即为 $\mu_1(\varepsilon)$，$\mu_2(\varepsilon)$，$\mu_3(\varepsilon)$。

当 $\varepsilon=0$ 时系统$(2.12)_0$ 为 $\dot{x}=x-3y^2, \dot{y}=-y+3x^2$，有通积分 $H(x,y)=\text{const}$ 及

分界线环 Γ_0: $H=0$.

应用定理 1.3. 取 $N=8$, $l=1$, $m=3$, 得 $\tilde{g}(\rho)=-36+49\rho^2-14\rho^4+\rho^6=(\rho^2-1)(\rho^2-4)(\rho^2-9)$, 从而由定理 2.2,当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时系统$(2.12)_\varepsilon$ 有 3 个极限环,分别过初始点 $(h_k(\varepsilon), h_k(\varepsilon))$, 其中 $h_k(\varepsilon)=k|\varepsilon|+o(\varepsilon)$, $k=1,2,3$.

上述结论可简单地验证. 对系统$(2.12)_\varepsilon$ 求得 $\frac{dH}{dt}=2\varepsilon^2(x-3y^2)(y-3x^2)(H-\varepsilon^2)\cdot(H-4\varepsilon^2)(H-9\varepsilon^2)$, 从而当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时有 3 个闭轨 $H=k^2\varepsilon^2$, $k=1,2,3$.

三、应 用

考虑实平面二次系统 $E_2(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$. 置

$$\begin{cases}\lambda(\varepsilon)=9000\times 36c\varepsilon^{10},\\ a_{20}(\varepsilon)=-8\varepsilon-4725\varepsilon^3+110250c\varepsilon^7,\\ c_{20}(\varepsilon)=-8\varepsilon-4725\varepsilon^3-110250c\varepsilon^7,\\ a_{11}(\varepsilon)=b_{11}(\varepsilon)=4\varepsilon,\\ a_{02}(\varepsilon)=-3-c\varepsilon,\quad b_{20}(\varepsilon)=-3+c\varepsilon,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 c 是非零实数. 由(3.1)式并由文献[1]中给出的 E_2 的前三个奇点量公式(该文依次省略了因子 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{25}{16}$, 这里必须补上)求得

$$\begin{aligned}\mu_1(\varepsilon)&=-9000\times 98c\varepsilon^8,\\ \mu_2(\varepsilon)&=9000\times 28c\varepsilon^6+o(\varepsilon^6),\\ \mu_3(\varepsilon)&=-18000c\varepsilon^4+o(\varepsilon^4).\end{aligned}\tag{3.2}$$

类似于例 2.1,如果(3.1)式成立,则系统 $E_2(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 当 $\varepsilon=0$ 时为 $\dot{x}=x-3y^2$, $\dot{y}=-y+3x^2$, 有一个分界线环 Γ_0: $xy=x^3+y^3$, 且 $\lambda(\varepsilon)-g(\varepsilon\rho, \varepsilon)=-9000c\varepsilon^{10}[(\rho^2-1)(\rho^2-4)(\rho^2-9)+\varepsilon G(\rho, \varepsilon)]$, 故有

定理 3.1 如果(3.1)式成立, 则系统 $E_2(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ 当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时将由 Homoclinic 分支在 Γ_0 的邻域产生 3 个极限环, 分别过初始点 $(h_k(\varepsilon), h_k(\varepsilon))$, 其中 $h_k(\varepsilon)=k|\varepsilon|+o(\varepsilon)$, $k=1,2,3$.

现在,把(3.1)式中的 c 改为纯虚数,例如取定 $c=\mathrm{i}$, 则通过坐标变换 $x=\xi+\mathrm{i}\eta$, $y=\xi-\mathrm{i}\eta$, $t=\mathrm{i}\tilde{t}$ 可由 $E_2(\varepsilon,\lambda(\varepsilon))$ 得到另一类实平面二次系统,记为$(3.3)_\varepsilon$. 由第一节最后的讨论得:

定理 3.2 系统$(3.3)_\varepsilon$ 当 $\varepsilon=0$ 时原点为中心, 当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时在原点充分小的邻域内恰有 3 个极限环,其位置分别在圆 $\xi^2+\eta^2=k^2\varepsilon^2$ 附近, $k=1,2,3$.

考虑缺二次项的实平面三次系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[\lambda(\varepsilon)+1]x+\sum\limits_{\alpha+\beta=3}a_{\alpha\beta}(\varepsilon)x^\alpha y^\beta,\\ \dfrac{dy}{dt}=[\lambda(\varepsilon)-1]y-\sum\limits_{\alpha+\beta=3}b_{\alpha\beta}(\varepsilon)y^\alpha x^\beta.\end{cases}\tag{3.3}_\varepsilon$$

设 c 为非零实数, k_0—k_4 为任意实数,使得

$$\tilde{g}(\rho)=k_0+k_1\rho^2+10k_2\rho^4+75k_3\rho^6+30k_4\rho^8+160\rho^{10}\tag{3.4}$$

有 5 个相异的正零点 $\rho_1—\rho_5$，取定

$$
\begin{cases}
\lambda(\varepsilon)=k_0c\varepsilon^{13}, \quad a_{30}(\varepsilon)=3\varepsilon-k_3\varepsilon^5+k_2c\varepsilon^8, \\
b_{30}(\varepsilon)=3\varepsilon-k_3\varepsilon^5-k_2c\varepsilon^8, \quad a_{21}(\varepsilon)=-k_4\varepsilon^2+k_1c\varepsilon^{11}, \\
b_{21}(\varepsilon)=-k_4\varepsilon^2-k_1c\varepsilon^{11}, \quad a_{12}(\varepsilon)=-\varepsilon-3k_3\varepsilon^5-3k_2c\varepsilon^8, \\
b_{12}(\varepsilon)=-\varepsilon-3k_3\varepsilon^5+3k_2c\varepsilon^8, \\
a_{03}(\varepsilon)=-4-6c\varepsilon, \quad b_{03}(\varepsilon)=-4+6c\varepsilon.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

文献 [1] 中对缺二次项的三次系统给出了原点的前 5 个奇点量公式(依次省略了因子 1，1，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{60}$，这里必须补上)．由(3.6)式得

$$
\begin{cases}
\lambda(\varepsilon)=k_0c\varepsilon^{13}, \quad \mu_1(\varepsilon)=2k_1c\varepsilon^{11}+o(\varepsilon^{11}), \\
\mu_2(\varepsilon)=20k_2c\varepsilon^9+o(\varepsilon^9), \quad \mu_3(\varepsilon)=150k_3c\varepsilon^7+o(\varepsilon^7), \\
\mu_4(\varepsilon)=60k_4c\varepsilon^5+o(\varepsilon^5), \quad \mu_5(\varepsilon)=320c\varepsilon^3+o(\varepsilon^3).
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

应用定理 1.3．取 $N=13$，$m=5, N=1$，由(3.7)式得 $\lambda(\varepsilon)-g(\varepsilon\rho,\varepsilon)=c\varepsilon^{13}[\tilde{g}(\rho)+\varepsilon G(\rho,\varepsilon)]$，其中 $\tilde{g}(\rho)$ 由(3.5)式给出．

系统$(3.4)_\varepsilon$ 当 $\varepsilon=0$ 时有一个双叶分界线环 Γ_0：$xy=x^4+y^4$．由定理 2.2 得

定理 3.3 系统$(3.4)_\varepsilon$ 当 $0<|\varepsilon|\ll 1$ 时将由 Γ_0 扰动出 10 个极限环，呈(5，5)分布，分别过初始点 $x=y=\pm\rho_k\varepsilon+o(\varepsilon)$，$k=1\sim5$．

如果在(3.6)式中取 c 为纯虚数，则仿照定理 2.2 中的做法可以类似地得到缺二次项的实平面三次系统由中心点扰动出 5 个极限环的实例．

参　考　文　献

[1] 刘一戎、李继彬，中国科学 A 辑，1989，3：245—255.
[2] Hille, E., *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. A, Wiley-Interscience Publication, 1976.
[3] 刘一戎，科学通报，37(1992)，2：113—116.
[4] 赵晓强，科学通报，35(1990)，11：816.