关于分次代数的一个 Fong 型定理*

樊 恽**　　朱 萍

(华中师范大学数学与统计学院，武汉 430079)　　(南开大学数学科学学院，天津 300071)

摘要 证明有限 p- 可解群 G 的特征 p 的域上的分次代数的任一投射不可分模是从它的一个 Hall p'- 子群 H 的分次子代数的模的诱导模；并且给出了它的 Hall p'- 子群 H 的分次子代数的投射不可分模的诱导模仍然不可分的充分必要条件.

关键词 群分次代数 不可分诱导模 本原幂等元

1 引言

设 $\mathcal{O}$ 是完备离散赋值环，它的剩余域 k 是特征 p 的代数闭域，这里 p 是有理素数；注意，容许 $\mathcal{O}=k$ 的情形. 如同文献 [1], 本文 $\mathcal{O}$- 代数作为 $\mathcal{O}$- 模都是有限秩自由 $\mathcal{O}$- 模. 设 G 是一个有限群.

Fong 在文献 [2] 中给出了一个有意义的结果：若 G 是 p- 可解群，则任一投射不可分 $\mathcal{O}G$- 模同构于从它的一个 Hall p'- 子群 H 的模的诱导模. 如果 G 是 p- 幂零的，这是文献 [3] 中 Green 不可分定理的直接推论，而且 Hall p'- 子群的任意不可分模的诱导模仍然不可分.

然而当 G 不是 p- 幂零时， Fong 定理的证明确实不平凡；而且， Hall p'- 子群的不可分模的诱导模不必再是不可分的. 一个自然产生的反问题是：什么时候 Hall p'- 子群的不可分模的诱导模还是不可分的？

Isaacs[4] 对 π- 可分群把 Fong 的结果推广到了一种特征标形式，而且在他的特征标形式下给出了上述反问题的一个充分必要条件.

任意 $\mathcal{O}G$- 模的 $\mathcal{O}$- 自同态代数是一个 G- 代数；这个 G- 代数上的点群可以决定这个模的限制、诱导、以及它们的直和分解 (见文献 [5, 6]). Fottner 和 Külshammer[7] 把 Fong 的结果推广到了 G- 代数的形式，并且对反问题给出了一个充分的但不必要的条件.

2004-09-27 收稿

* 国家重点基础研究发展规划 (973 计划) 资助项目 (批准号:G19990751)

** E-mail: yunfan@whu.edu.cn

在文献 [1] 中观察到，因为文献 [7] 讨论 Fong 问题的 G- 代数形式时只需考虑投射的点群，那么这种形式可以包含在关于群与代数的半直积的相应问题之中. 进而，文献 [1] 考虑群 G 与一个代数 A 的任意交叉积 (crossed product) $B = \bigoplus_{x\in G} A\hat{x}$, 引入除子群 $\mathcal{D}(B)$, 证明了：如果 G 是 p- 可解群，则 Hall p'- 子群 H 到 G 的包含映射诱导从除子群 $\mathcal{D}(B_H)$(其中 $B_H = \bigoplus_{x\in H} A\hat{x}$) 到除子群 $\mathcal{D}(B)$ 的满同态，而且准确地刻画了这个满同态 $\mathcal{D}(B_H) \to \mathcal{D}(B)$ 的同态核. 特别地，下面结论是文献 [1] 的结果的直接推论. 有关符号术语可见下节开头的记号 1.

推论 A 若 G 是 p- 可解群， $B = \bigoplus_{x\in G} A\hat{x}$ 是交叉积， H 是 G 的 Hall p'-子群，则

(1) 对 B 的任意一个点 α, 恒有 $\alpha \bigcap B_H \neq \varnothing$.

(2) 对 B_H 的一个点 β, 存在 B 的点 α 包含 β 的充要条件为对任意 Hall p'- 子群 H', 交集 $\beta \bigcap B_{H'}$ 中的任意元在 $B_{H'}$ 中也是本原幂等元.

此推论的模论形式为

(1) 任一投射不可分 B- 模 V 同构于一个诱导模 $\mathrm{Ind}_H^G(U)$, 其中 U 是一个 B_H- 模.

(2) 投射不可分 B_H- 模 U 的诱导模 $\mathrm{Ind}_H^G(U)$ 仍然不可分的充要条件是：对 G 的任意 Hall p'- 子群 H' 和任意使得 $U = \mathrm{Ind}_{H\cap H'}^H(W)$ 的 $B_{H\cap H'}$- 模 W, 诱导模 $\mathrm{Ind}_{H\cap H'}^{H'}(W)$ 不可分.

本文把此结果推广到一般的群分次代数.

定理 1 设 $\mathcal{O}$ 是完备离散赋值环，它的剩余域 k 是特征 p 的代数闭域. 设 G 是有限 p- 可解群；设 $A = \bigoplus_{x\in G} A_x$ 是一个 G- 分次的 $\mathcal{O}$- 代数. 那么

(1) 对 A_G 的任一点 α, 存在 G 的一个 Hall p'- 子群 H, 使得 $\alpha \bigcap A_H \neq \varnothing$.

(2) 对 G 的一个 Hall p'- 子群 H 和 A_H 的一个点 β, 存在 A_G 的点 α 包含 β 的充要条件是：对任意 Hall p'- 子群 H', 交集 $\beta \bigcap A_{H'}$ 中的任意元在 $A_{H'}$ 中也是本原幂等元.

注 1 这个关于分次代数的结果与关于交叉积的结果的显著不同之处是，这里 (1) 中的 Hall p'- 子群 H 不是任意的，它确实与 α 有关. 例如，取 $p = 3$, 令 $G = S_3$ 是 3 次对称群，取 Hall p'- 子群 $H = \{1,\ t = (12)\}$; 令 A 是这样一个 G- 分次代数：它的 1- 分支 $A_1 = k$ 而 t- 分支 $A_t = k\hat{t}$, 其中 $\hat{t}^2 = 1$, 它的其他分支都为 0; 那么 $H' = \{1,\ t' = (13)\}$ 也是 Hall p'- 子群，但是定理 1 的结论 (1) 对 H' 显然不能成立.

2 定理的证明

本节先介绍必要的记号和基本知识；再证明一个对定理来说的关键引理，从一个分次代数中构造出一个交叉积，此思想来自文献 [8], 后者关注的是文献 [9] 提出的关于分次代数的问题.

设 $p, \mathcal{O}, k, G$ 恒如本文开头所设. 本文中的 $\mathcal{O}$- 代数 A 作为 $\mathcal{O}$- 模都是有限

秩的自由 $\mathcal{O}$- 模；说到 A 的子代数时不必是幺子代数；用 A^* 记由 A 的所有可逆元构成的乘法群.

记号 1　设 A 是一个 $\mathcal{O}$- 代数, 用 $J(A)$ 记 A 的 Jacobson 根基. 代数 A 的一个点 α 是指 A 的本原幂等元的 A^*- 共轭类. 剩余类代数 $A/J(A)$ 是单代数的直和, 事实上是 k 上矩阵代数的直和，因为 k 是代数闭域. 由幂等元提升的熟知结论 (见文献 [6] §3), $A/J(A)$ 的单代数直和项一一对应于 A 的点. 若 $A/J(A) = \mathrm{M}_n(k)$ 是矩阵代数，则 A 有惟一一个点，就称 A 是有惟一点代数.

$\mathcal{O}$- 代数 A 称为 G- 分次的，若 A 有一组由 G 的元素 x 标号的 $\mathcal{O}$- 子模 A_x, 使得 $A = \bigoplus_{x\in G} A_x$ 且对任意 $x, y \in G$ 有 $A_xA_y \subseteq A_{xy}$, 其中的 $\mathcal{O}$- 子模 A_x 称为分次代数的 x- 分量. 更一般地，对任意 $S \subseteq G$, 记 $A_S = \bigoplus_{s\in S} A_s$, 称为分次代数 A 的 S- 分量；如果 H 是 G 的子群，则 A_H 是 A 的幺子代数而且是 H- 分次代数；特别有， $A_G = A$, 1- 分量 A_1 是幺子代数 [10].

一个 G- 分次 $\mathcal{O}$- 代数 A 称为完全 G- 分次的, 如果对任意 $x, y \in G$ 有 $A_xA_y = A_{xy}$. 进一步， G- 分次代数 A 称为一个交叉积，如果 $\forall x \in G$, 存在 $\hat{x} \in A_x \bigcap A^*$, 使得 $A_x = A_1\hat{x}$; 进而, 若 $\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy}$ 对所有 $x, y \in G$ 成立, 则交叉积 $A = \bigoplus_{x\in G} A_1\hat{x}$ 称为半直积.

注 2　设 A 是一个 $\mathcal{O}$- 代数. 关于子代数的根基以下基本事实将常引用：

(1) 设 B 是 A 的一个幺子代数. 因为 $J(\mathcal{O})A \subseteq J(A)$ 且 $J(\mathcal{O})B \subseteq J(B)$, 而 $\bar{B} = B/J(\mathcal{O})B$ 是 k- 代数 $\bar{A} = A/J(\mathcal{O})A$ 的幺子代数，所以 $B \bigcap J(A) \subseteq J(B)$. 进而，如果 $A = B + J(A)$, 则 B 满同态映射到剩余类代数 $A/J(A)$ ，同态核是 $B \bigcap J(A)$; 所以 B 的点一一对应到 A 的点，使得 B 的每个点 β 包含在对应的 A 的点 α 之中 (详情可参看文献 [6]§2).

(2) 设 f 是 A 的非零幂等元；令 $B = fAf$ 为 A 的一个嵌入子代数，则 $B \bigcap J(A) = J(B)$(见文献 [6] 1.17 节或者文献 [11] 第 1 章， 8.4 节); 对 A 的任意一个点 α, 交集 $\alpha \bigcap B$ 如果非空就必是 B 的一个点，而且 B 的任意点可如此获得, B 上的点之间的关系也按此方式在 A 上保持着.

注 3　设 $A = \bigoplus_{x\in G} A_x$ 是 $\mathcal{O}$ 上的一个 G- 分次代数. A 的理想 I 称为 G- 分次理想，如果 $I = \bigoplus_{x\in G} I_x$, 其中 $I_x = I \bigcap A_x$. 对这样的理想 I, 商代数 $A/I = \bigoplus_{x\in G} A_x/I_x$ 也是 G- 分次代数. 有一个已知结论 (见文献 [8] 引理 7) 说：

(1) 分次代数 A 的 1- 分量 A_1 的根基 $J(A_1)$ 包含在 A 的根基 $J(A)$ 之中，由 $J(A_1)$ 生成的 A 的理想 $AJ(A_1)A$ 是一个分次理想, 故商代数 $\overline{A} = A/AJ(A_1)A$ 是 G- 分次 k- 代数，它的 1- 分量 $\overline{A}_1 = A_1/J(A_1)$ 是半单的.

由此易得出另一已知结论：

(2) 若 N 是 G 的正规子群，则代数 A 可以按商群 $\bar{G} = G/N$ 分次为： $A = \bigoplus_{\bar{g}\in\bar{G}} B_{\bar{g}}$, 这里 $B_{\bar{g}} = A_{Ng} = \bigoplus_{x\in Ng} A_x$, 其中 Ng 记右陪集. 特别地， $J(B_{\bar{1}}) = J(A_N) \subseteq J(A)$.

为此，先需指出 $A_{Ng_1}A_{Ng_2} \subseteq A_{Ng_1g_2}$, 但这确实容易计算获得；然后，“特

别地" 那一结论则从本注解的结论 (1) 直接得出.

下面是我们证明定理时需要的关键引理:

引理 1 设 A 是 G- 分次代数, 它的 1- 分量 A_1 有惟一点, 则存在 G 的子群 G_0 和 A 的分次理想 $J \subseteq J(A)$, 使得 A 的 G_0- 分量 A_{G_0} 是群 G_0 在 A_1 上的一个交叉积, 且 $A = A_{G_0} + J$.

注解 作为推论, 马上看出: 商代数

$$\bar{A} = A/J = \bigoplus_{x\in G} \bar{A}_x = \bigoplus_{y\in G_0} \bar{A}_y;$$

又因为只要 $x \notin G_0$ 就有 $\bar{A}_x = 0$, 所以 $\bar{A}$ 可作为群 G_0 在 $\bar{A}_1$ 上的交叉积.

引理 1 的证 由注 3(1), 有分次理想 $I = AJ(A_1)A \subseteq J(A)$, 商代数 $\bar{A} = A/(AJ(A_1)A)$ 是一个 G- 分次的 k- 代数. 因为 A_1 有惟一点而 k 是代数闭域, 1- 分量 $\bar{A}_1$ 是一个矩阵代数: $\bar{A}_1 = \mathrm{M}_n(k)$, 因此由文献 [5] 命题 2.1, 得 $\bar{A} = \bar{A}_1 \bigotimes_k C$, 其中 $C = C_{\bar{A}}(\bar{A}_1)$ 是 $\bar{A}_1$ 在 $\bar{A}$ 中的中心化子, 则

$$C = \bigoplus_{x\in G} C_{\bar{A}_x}(\bar{A}_1) = \bigoplus_{x\in G} C_x$$

是 G- 分次代数, 它的 x- 分量 $C_x = C_{\bar{A}_x}(\bar{A}_1)$, 从而

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bigotimes_k \Big(\bigoplus_{x\in G} C_x\Big) = \bigoplus_{x\in G} \Big(\bar{A}_1 \bigotimes_k C_x\Big).$$

特别地, C 的 1- 分量为

$$C_1 = C_{\bar{A}_1}(\bar{A}_1) = Z\Big(\mathrm{M}_n(k)\Big) \cong k.$$

由文献 [8] 引理 9, 存在 G 的子群 G_0, 使得 $C = C_{G_0} + C_{G-G_0}$ 且 C_{G_0} 是 G_0 在 $C_1 = k$ 上的一个交叉积, 而 C_{G-G_0} 是一个幂零理想, 因而 C_{G_0} 是 G_0 在 k 上的一个如下形式的扭结群代数:

$$C_{G_0} = \bigoplus_{x\in G_0} C_1 \cdot \bar{\hat{x}} = \bigoplus_{x\in G_0} k\bar{\hat{x}},$$

其中 $\bar{\hat{x}}$ 是可逆元而且 $\bar{\hat{x}}\bar{\hat{y}} = \lambda_{x,y}\bar{\hat{xy}}$ 对某 $\lambda_{x,y} \in k^*$, 则

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bigoplus_{x\in G_0} \Big(\bar{A}_1 \bigotimes_k k\bar{\hat{x}}\Big) + \bigoplus_{y\in G-G_0} \Big(A_1 \bigotimes_k C_y\Big)\\ &= \bar{A}_{G_0} + \bar{A}_{G-G_0},\end{aligned}$$

所以

$$\bar{A}_{G_0} = \bigoplus_{x\in G_0} \Big(\bar{A}_1 \bigotimes_k k\bar{\hat{x}}\Big) = \bigoplus_{x\in G_0} \bar{A}_1\,\bar{\hat{x}}$$

是 G_0 在 $\bar{A}_1$ 上的交叉积, 而

$$\bar{A}_{G-G_0} = \bigoplus_{y\in G-G_0} \Big(\bar{A}_1 \bigotimes_k C_y\Big) = \bar{A}_1 C_{G-G_0}$$

是一个幂零理想, 从而包含在根基之中. 对每个 $x \in G_0$, 令 $\hat{x} \in A_x$ 是 $\bar{\hat{x}}$ 在 A_x 中的一个原像; 因为同态 $A \to \bar{A}$ 的核 $I = AJ(A_1)A$ 包含在根基 $J(A)$ 中, 所以每

个 $\hat{x} \in A_x$ 是可逆的，于是

$$A_{G_0} = \bigoplus_{x \in G_0} A_x = \bigoplus_{x \in G_0} A_1 \hat{x}$$

是群 G_0 在 A_1 上的交叉积．最后，用 J 记 $\bar{A}$ 的幂零理想 $\bar{A}_{G-G_0}$ 在 A 中的全原像．注意到 $I = AJ(A_1)A \subseteq J(A)$, 就得出 J 是 A 的 G- 分次理想而且包含在根基 $J(A)$ 中，且 $A_{G-G_0} \subseteq J$, 所以 $A = A_{G_0} + J$. 这就是本引理所要证明的结论.

从现在起回到定理 1 的假设并证明该定理.

首先证明定理 1 的论断 (1). 设 α 是 $A = A_G$ 的一个点；我们将找出 G 的一个 Hall p'- 子群 H, 使得 $\alpha \bigcap A_H \neq \varnothing$. 在 A_1 中取一个完全正交的本原幂等元分解 $1 = f_1 + \cdots + f_t$, 再在 A 中把它加细为完全正交的本原幂等元分解，就可以得到 A_1 中的本原幂等元 f 和 $i \in \alpha$ 满足 $fi = i = if$. 令 $B = fAf$, 则 B 是 A 的嵌入子代数，它也是 G- 分次的代数，但是它的 1- 分量 B_1 有惟一点，而且 $i = fif \in B$; 由注 2(2) 得知 $\alpha' = \alpha \bigcap B$ 是 B 的一个点．再一次引用注 2(2), 就知道只需证明存在一个 Hall p'- 子群 H, 使得 $\alpha' \bigcap B_H \neq \varnothing$.

由引理 1, 存在 G 的子群 G_0, 使得 $B = B_{G_0} + J$, 其中 B_{G_0} 是交叉积而 J 是一个包含在根基 $J(B)$ 中的分次理想．从注 2(1), 就得知 $\alpha'' = \alpha' \bigcap B_{G_0}$ 是 B_{G_0} 的一个点；因为 G_0 仍然是 p- 可解的，可以引用推论 A, 得到群 G_0 的一个 Hall p'- 子群 H_0, 使得 $\alpha'' \bigcap B_{H_0} \neq \varnothing$. 取群 G 的一个包含 H_0 的 Hall p'- 子群 H, 就有

$$\alpha' \bigcap B_H \ \supseteq \ \alpha'' \bigcap B_{H_0} \ \neq \ \varnothing.$$

现在仍保持定理 1 的假设，来证明定理的论断 (2). 论断 (2) 的必要性显然是对的．下面证明充分性．设 H 是群 G 的一个 Hall p'- 子群而 β 是 A_H 的一个点，它满足定理中 (2) 的条件．为证明 (2) 的结论，只需指出存在 $j \in \beta$, 它在 $A_G = A$ 中仍然是本原的．类似于上面的证明，分两步来达到目的．首先，存在 A_1 的本原幂等元 f 和 $j \in \beta$, 满足 $fj = j = jf$, 令 $B = fAf$, 则 B 是 A 的 G- 分次的嵌入子代数，但是 B 的 1- 分量 B_1 有惟一点，而 $\beta' = \beta \bigcap B_H$ 是 B_H 的点，由注 2(2) 易验证：分次代数 B 和 B_H 的点 β' 仍然满足定理中 (2) 的条件；再一次引用注 2(2), 只需指出存在 $j \in \beta'$, 它在 B_G 中仍然是本原幂等元.

其次，同上面一样，引用引理 1, 得到 G 的一个子群 G_0, 使得 $B = B_{G_0} + J$, 其中 B_{G_0} 是交叉积而 J 是包含在根基 $J(B)$ 中的分次理想．因为 J 是 B 的 G- 分次理想，即 $J = \bigoplus_{x \in G} J_x$, 其中 $J_x = J \bigcap B_x$, 所以 $B_H = B_{H \cap G_0} + J_H$, 这里 J_H 记 J 的 H- 分量，再由注 2(1), $J_H = B_H \bigcap J \subseteq J(B_H)$, 即

$$B_H = B_{H \cap G_0} + J_H, \qquad\qquad J_H \subseteq J(B_H)\ .$$

仍由注 2(1), $\beta' \bigcap B_{H \cap G_0}$ 是 $B_{H \cap G_0}$ 的一个点，因此可以取 $j \in \beta' \bigcap B_{H \cap G_0}$. 取 G_0 的一个包含 $H \cap G_0$ 的 Hall p'- 子群 H_0, 再取 G 的一个包含 H_0 的 Hall p'- 子群 H_1, 就有 $j \in \beta' \bigcap B_{H_1}$, 则 j 在 B_{H_1} 中是本原幂等元．而 $B_{H_0} \subseteq B_{H_1}$, 所以 j 在 B_{H_0} 中也是本原的．注意到 $B_{H_0} \subseteq B_{G_0}$, 下面验证 G_0- 分次代数 B_{G_0} 和 B_{H_0} 的本原

幂等元 j 仍然满足定理 1 中 (2) 的条件：若 H_0' 是 G_0 的 Hall p'- 子群，而 $j \in B_{H_0'}$，令 H' 是 G 的包含 H_0' 的 Hall p'- 子群，则 $j \in B_{H_0'} \subseteq B_{H'}$, 从而 j 在 $B_{H'}$ 中是本原的；但是，注意到 $B_{H' \cap G_0} = B_{H_0'}$, 如同上面一样有

$$B_{H'} = B_{H_0'} + J_{H'}, \qquad J_{H'} \subseteq J(B_{H'})\,;$$

由注 2(1), 知道 j 在 $B_{H_0'}$ 中还是本原的．于是可以把推论 A 用于 G_0- 分次代数 B_{G_0}, 得到 B_{H_0} 的本原幂等元 j 在 B_{G_0} 中仍然是本原的. 最后，因为 $B = B_{G_0} + J$ 且 $J \subseteq J(B)$, 由注 2(1) 就可断言 $j \in \beta'$ 在 B 中仍然是本原幂等元．证毕.

致谢 作者非常感谢 Lluis Puig 教授，就此课题作者与他有很多富有成效的讨论.

参　考　文　献

1 Fan Y, Puig L, Zhou Y Y. On a theorem of Fong. J Algebra, 2001, 239: 735∼741
2 Fong P. Solvable groups and modular representation theory. Trans Amer Math Soc, 1962, 103: 484∼494
3 Green J A. On the indecomposable representations of a finite group. Math Z, 1959, 70: 430∼445
4 Isaacs I M. Fong characters in π-separable groups. J of Algebra, 1986, 99: 89∼107
5 Puig L. Pointed groups and construction of characters. Math Z, 1981, 176: 265∼292
6 Thévenaz J. G-Algebras and Modular Representation Theory. Oxford: Clarendon Press, 1995
7 Fottner H, Külshammer B. On indecomposable and imprimitive modules for finite groups —— a G-algebra approach. J London Math Soc, 1999, 59: 828∼844
8 Fan Y, Külshammer B. Group-graded rings and finite block theory. Pacific J Math, 2000, 196: 177∼186
9 Dade E C. Blocks of fully graded rings. Pacific J Math, Olga Taussky-Yodd Memorial Issue, 1997, 85∼122
10 Grzeszczuk P. On G-systems and G-graded rings. Proc Amer Math Soc, 1985, 95: 248∼252
11 Feit W. The Representation Theory of Finite Groups. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1982