研究通讯

小于 3 亿的全部偶数均为哥德巴赫数

“不小于 6 的任一偶数都是两个素数之和”这就是至今未能证明的哥德巴赫猜想. 国外已有人验证一亿之内的全部偶数都是两个素数之和.

最近我们用计算机证实 1 亿到 3 亿之间全部偶数也都是两个素数之和.

若 M,L 为两偶数，$M<L$, X 为 $[M, L]$ 间的一个偶数. 令 $X = P_1 + P_2$. P_1, P_2 均为素数. 则可能有许多解. 这个程序能找出使 P_1 最小的一种解. 具体作法如下:

1. 用筛法找出小于$\lfloor\sqrt{L}\rfloor$的全部奇素数序列 P_1.

2. 用筛法找出 $M - \lfloor\sqrt{L}\rfloor$到 L 间的全部素数序列 P_2.

3. 由小到大顺序用 P_1 中的一个素数加 P_2 中的一个素数，得一偶数. 若这个偶数在区间 $[M, L]$ 内则将它剔除. 这样可按 P_1 的大小对 $[M, L]$ 间的偶数分类.

4. 若以上工作作完，$[M, L]$ 间仍有偶数未被剔除，则应作进一步验证. 但实际计算表明，1 亿到 3 亿间的一亿个偶数中 P_1 大于 1000 的偶数只有 30 个，最大 P_1 值也仅为 1321，远远小于 $\lfloor\sqrt{L}\rfloor$.

尹　定
（华北石油设计研究院，任丘）

半单调类上可测函数的构造

设 Ω 为基本集合，$\mathscr{K}$为 Ω 的子集系，称 $(\Omega, \mathscr{K})$ 为$\mathscr{K}$可测空间，简称可测空间. 又设 f 为 Ω 到 R^1 的函数，我们采用以下记号:

$$f^+: f^+(\omega) \triangleq \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega) \geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } f(\omega) < 0 \end{cases};$$

$$f^-: f^-(\omega) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{当 } f(\omega) \geqslant 0 \\ -f(\omega), & \text{当 } f(\omega) < 0 \end{cases};$$

$$N_\alpha(f) = \{\omega | f(\omega) > \alpha\},$$
$$N_{\bar{\alpha}}(f) = \{\omega | f(\omega) \geqslant \alpha\},$$
$$N_{\underline{\alpha}}(f) = \{\omega | f(\omega) < \alpha\},$$
$$N_{\bar{\underline{\alpha}}}(f) = \{\omega | f(\omega) \leqslant \alpha\};$$
$$\bigvee = \sup, \ \bigwedge = \inf.$$

定义 1　称函数 $f: \Omega \to R^1$ 为 $(\Omega, \mathscr{K})$ 上的上开(闭)可测函数，如果对 $\forall \alpha \in [0, \infty)$ 有 $N_\alpha(f^+)$, $N_\alpha(f^-) \in \mathscr{K}$ $(N_{\bar{\alpha}}(f^+), N_{\bar{\alpha}}(f^-) \in \mathscr{K})$; 如果有

$N_{\underline{\alpha}}(f^+)$, $N_{\underline{\alpha}}(f^-) \in \mathscr{K}(N_{\bar{\underline{\alpha}}}(f^+), N_{\bar{\underline{\alpha}}}(f^+) \in \mathscr{K})$,
则称 f 为下开(闭)可测的.

为简单计，我们恒假定 f 为非负的.

定义 2　称 $\varphi: \Omega \to [0, \infty)$ 为 $(\Omega, \mathscr{K})$ 上的拟简单函数，如果

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i},$$

满足: $A_i \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $\alpha_i > \alpha_j \Rightarrow A_i \subset A_j i$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 而称 $\psi: \Omega \to [0, \infty]$ 为 $(\Omega, \mathscr{K})$ 上的伪简单函数，如果

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i},$$

满足: $A_i \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $\alpha_i > \alpha_j \Rightarrow A_i \supset A_j$, i, $j = 1, 2, \cdots, n$, 其中 I_A 表示集合 A 的特征函数.

定理 1　设$\mathscr{K}$为 Ω 上的下半单调类，即有 ϕ, $\Omega \in \mathscr{K}$, 且若 $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{K}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{K}$, 那么，$f$ 为 $(\Omega, \mathscr{K})$ 上的上开可测函数的充要条件是存在一列非负不减拟简单函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$; 若 f 是有界的，则此收敛对任意 $\omega \in \Omega$ 还可以是一致的.

定理 2　设$\mathscr{K}$为 Ω 上的下半单调类，则 f 为 $(\Omega, \mathscr{K})$ 上的下开可测函数的充要条件是存在一列非负不增的伪简单函数
$\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = f$. 当 f 为有界时，此收敛对

任意 $\omega\in\Omega$ 还可以是一致的.

定理 3 设$\mathscr{K}$为单调半环, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为$(\Omega,\mathscr{K})$上的上开(下开)可测函数列, 则 $f_1+f_2, f_1\cdot f_2$, $\sup\{f_n\}$, $\inf\{f_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ 也是 $(\Omega,\mathscr{K})$ 上的上开(下开)可测函数.

赵汝怀
(中国人民武装警察部队技术学院,西安)

关于拟对称函数的 Beurling-Ahlfors 扩张的伸缩商

任意一个 ρ 拟对称函数 $\mu(x)$ 都能扩张成上半平面到自身的 K 拟共形映照 Beurling 与 Ahlfors 给出了这样的拟共形扩张

$$f_{r,\mu}(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1[\mu(x+ty)+\mu(x-ty)]dt,\\ v(x,y)=\dfrac{r}{2}\displaystyle\int_0^1[\mu(x+ty)-\mu(x-ty)]dt,\ r>0. \end{cases}$$

许多人研究了 $f_{r,\mu}$ 的最大伸缩商 $K[f_{r,\mu}]$. 例如 Beurling 与 Ahlfors, J. Reed, 李忠, M. Lehtinen 分别证明了在适当选取 r 时 $f_{r,\mu}$ 的最大伸缩商

$$K\leqslant\rho^2,\ 8\rho,\ 4.2\rho,\ 2\rho.$$

本文主要结果是证明了无论怎样选取参数 r, Lehtinen 的结果 $K\leqslant 2\rho$ 中的系数 2 已不能再改进.

我们引进了记号

$$K_\rho=\sup_{\mu\in C_\rho}\{\inf_{r>0}K[f_{r,\mu}]\},$$

其中 C_ρ 是一切 ρ 拟对称函数的集合. 本文证明了

$$K_\rho\geqslant 2\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{\rho^2}\right)\rho.\qquad(\rho\geqslant 48)$$

这个结果表明: 对任意的 $\varepsilon>0$, 要证明 $K\leqslant(2-\varepsilon)\rho$ 是不可能的. 把这个结果与 Lehtinen 的结果结合起来,我们有(当 $\rho\to\infty$ 时)

$$K_\rho=2\rho+o(\rho).$$

证明的关键是构造一个 ρ 拟对称函数, 使它的 Beurling-Ahlfors 扩张的最大伸缩商较小. 这里我们考虑函数

$$h_\tau(x)=\begin{cases} 1+(\tau-1)(x-1), \\ \qquad 当\ x\geqslant 1;\\ 1-\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{1}{\tau-1}\left(x-\dfrac{1}{\tau}\right),\\ \qquad 当\ \dfrac{1}{\tau}\leqslant x<1;\\ (\tau-1)x,\ 当 -1+\dfrac{1}{\tau}\leqslant x<\dfrac{1}{\tau};\\ -\tau^2+[\tau^3-(\tau-1)^2](x+1),\\ \qquad 当\ -1\leqslant x<-1+\dfrac{1}{\tau};\\ -\tau^2+(\tau-1)(x+1),\\ \qquad 当\ x<-1. \end{cases}$$

通过复杂的计算我们证明了: $h_\tau(x)$ 是 $\rho_\tau=\tau^2+\tau$ 拟对称的函数,而它的 Beurling-Ahlfors 扩张无论参数 r 如何选取,其最大伸缩商

$$K[f_{r,h_\tau}]\geqslant\sqrt{P(\tau)}\rho_\tau.$$

这里 $P(\tau)$ 是 τ 的一个多项式. 经过适当化简即得出我们的主要结果.

李 伟　　　　刘 勇
(山东菏泽师范专科学校) (北京大学数学系)

递阶控制大系统的新研究

在社会上广泛存在着分层递阶控制结构,比如: 公司 $\rightleftarrows$ 企业 $\rightleftarrows$ 车间 $\rightleftarrows$ 班组. 这些结构作为实体与基层子系统(如班组)有机地组合成一个整体, 结构中的每一个决策机构都是这个整体的一个子系统, 仅是根据信息渠道的不同而把各子系统分布在不同的递阶层次. 作者把这种整体称为递阶控制大系统, 并在高为炳教授的启发和指导下对之进行了研究. 这些研究与以前的大系统递阶控制有所区别.

递阶控制大系统可以分为两大类: 全信息多层递阶控制大系统和部分信息多层递阶控制大系统. 前者的最高领导层可以得知系统的全部输出信息, 而后者则不然. 我们建立了递阶控制大系统的一般数学表达式, 并重点研究了线性定常全信息多层递阶控制大系统. 主要研究结果是:

定理 1 线性定常全信息多层递阶控制大系