中国科学 A 辑: 数学, 2007, 37(6): 742–750
http://www.SciChina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

具有随机扰动的 Logistic 方程正解的存在唯一性、全局吸引性及其参数的极大似然估计

蒋达清 [1] 张宝学 [1] 王德辉 [2] 史宁中 [1*]

(1. 东北师范大学数学与统计学院, 长春 130024; 2. 吉林大学数学学院, 长春 130012)

摘要 讨论了随机化 Logistic 方程

$$\dot{N}(t) = (r + \alpha\dot{B}(t))N(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right],$$

其初值 $N(0) = N_0$ 且 $0 < N_0 < K$ 是一个随机变量. 主要研究了正解的存在性、唯一性及全局吸引性, 并给出了方程中参数的极大似然估计.

关键词 随机化 Logistic 方程 存在性 唯一性 全局吸引性 参数的极大似然估计

MSC(2000) 主题分类 **34F05, 34E10, 62F10**

1 引言

用微分方程描述一个简单的 Logistic 模型通常表示为

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right], \tag{1.1}$$

其中 $N(t)$ 是 t 时刻单个物种的生物种群密度, $r > 0$ 是内禀增长率, $K > 0$ 是环境容纳量. May 在文献 [1] 中对系统 (1.1) 做了很详细的讨论. 我们知道系统 (1.1) 有一个稳定的平衡点 K. 对于系统 (1.1) 的更一般情形, 已经获得了一些关于正解稳定性的有意义的结果, 可参见文献 [2, 3]. 由于生态系统稳定的正平衡点的存在性意味着物种之间的长时期共存, 因此研究生态系统稳定的正平衡点的存在性具有广泛而重要的生物学意义, 已成为微分方程定性理论研究的重要组成部分.

然而, 种群生态系统经常会遇到环境白噪声的干扰 [4], 那么研究白噪声的存在是否影响种群生态系统以及是否会使已有的结果发生变化已受到广泛的关注.

假设系统 (1.1) 中参数 r 受到如下形式的随机扰动:

$$r \to r + \alpha\dot{B}(t),$$

其中 $\dot{B}(t)$ 是白噪声, α^2 表示白噪声强度则受环境白噪声干扰的系统可以用如下的随机化 Logistic 方程描述:

$$\dot{N}(t) = (r + \alpha\dot{B}(t))N(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right], \quad r, K > 0, \tag{1.2}$$

收稿日期: 2005-03-20; 接受日期: 2007-03-28
国家自然科学基金 (批准号: 10431010 和 10571021) 和教育部重点应用统计实验室 (KLAS) 资助项目
*E-mail: shinz@nenu.edu.cn

其中 $B(t)$ $(t \geqslant 0)$ 是一维标准 Brown 运动, $B(0)=0$, 初值 $N(0)=N_0$, 且 $0<N_0<K$ 是一个随机变量. 不妨设 N_0 与 $B(t)$ 独立.

在 Itô 意义下, 方程 (1.2) 等价于

$$dN(t)=N(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right](rdt+\alpha dB(t)). \tag{1.3}$$

在 Strotonovich 意义下, 方程 (1.2) 等价于

$$dN(t)=rN(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right]dt+\alpha N(t)\left[1-\frac{N(t)}{K}\right]\circ dB(t). \tag{1.4}$$

注 1.1　Mao 等 [4] 研究了环境白噪声扰动系统

$$dN(t)=N(t)[(a+bN(t))dt+\alpha N(t)dB(t)],\ \ t\geqslant 0,$$

其中 $a,\ b,\ \alpha>0$, $N(0)=N_0$ 且 N_0 是正常数, 证明了无论环境白噪声的强度 $\alpha>0$ 多么小, 解都不会在有限时间爆破, 揭示了环境白噪声抑制解的爆破这一重要性质.

通常一个随机微分方程对于任何初值存在唯一全局解, 方程中的系数需要满足线性增长和局部 Lipschitz 条件, 参考文献 [5, 6]. 然而, 方程 (1.2) 的系数满足局部 Lipschitz 条件却并不满足线性增长条件, 因此方程 (1.2) 的解可能在有限时间内发生爆破.

本文首先讨论了方程 (1.3) 正解的存在性、唯一性和全局吸引性. 其次, 给出了方程 (1.4) 解的显式表达式. 提出了一种获得了参数 r 和 α 的极大似然估计的方法, 模拟的结果表明了极大似然估计方法是很适合的. 近些年来, 已有学者研究金融模型的参数估计问题 [7,8], 但尚未见到研究随机人口动力系统中的参数估计问题的文献. 显然, 这两个体系的参数估计问题是完全不同的. 借助第 2 节的方法, 本文还研究了更一般的 Logistic 方程.

2　解的存在性、唯一性及全局吸引性

考虑方程 (1.3). 令 $N(t)$ 是方程 (1.3) 的一个解. 显然, $N=0$ 和 $N=K$ 均是方程 (1.3) 的解. 如果 $N(t)\neq 0$ 且 $N(t)\neq K$, 由 Ito 公式,

$$\begin{aligned}
d\log\left|\frac{N}{K-N}\right| &= d\log|N|-d\log|K-N| \\
&= \left[\frac{dN}{N}-\frac{1}{2N^2}(dN)^2\right]-\left[\frac{dN}{N-K}-\frac{1}{2(N-K)^2}(dN)^2\right] \\
&= \frac{K}{N(K-N)}dN-\frac{(K-2N)K}{2N^2(K-N)^2}(dN)^2 \\
&= rdt+\alpha dB-\frac{(K-2N)\alpha^2}{2K}dt \\
&= \left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)dt+\alpha dB+\frac{N\alpha^2}{K}dt,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

则存在随机变量 $C=C(\omega)$, 使得

$$\frac{N(t)}{K-N(t)}=Ce^{rt-\frac{1}{2}\alpha^2t+\alpha B(t)+\frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N(s)ds},$$

即

$$N(t)=\frac{K}{1+\frac{1}{C}e^{-rt+\frac{1}{2}\alpha^2t-\alpha B(t)-\frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N(s)ds}}.$$

由于 $N(0)=N_0$, 且 $0<N_0<K$, 故 $C=\frac{N_0}{K-N_0}$, 则

$$N(t)=\frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt+\frac{1}{2}\alpha^2t-\alpha B(t)-\frac{\alpha^2}{K}\int_0^t N(s)ds}} \tag{2.2}$$

和

$$\frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt+\frac{1}{2}\alpha^2t-\alpha B(t)}}=:\phi(t)<N(t)<K,\quad t\geqslant 0. \tag{2.3}$$

下面定理证明了方程 (1.3) 的正解的存在性、唯一性和正解及全局吸引性.

定理 2.1 任意给定初值 $N(0)=N_0$, 且 $0<N_0<K$, 方程(1.3)存在唯一连续的正解 $N(t)$ 满足 $\phi(t)<N(t)<K$, 其中 $\phi(t)$ 由(2.3)式定义. 如果 $r>\frac{1}{2}\alpha^2$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $N(t)\to K$ a.s.

证明 首先证明正解的存在性. 作变量替换

$$N(t)=K\frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}, \tag{2.4}$$

则

$$x(t)=\log\frac{N(t)}{K-N(t)}.$$

类似获得 (2.1) 式的方法, 方程 (1.3) 可变形为

$$dx(t)=\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}\alpha^2\right)dt+\alpha dB(t),\qquad t\geqslant 0, \tag{2.5}$$

其中初值 $x(0)=x_0=:\log\frac{N_0}{K-N_0}$, 则 x_0 和 $B(t)$ 独立.

令

$$f(x)=r-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{e^x}{1+e^x}\alpha^2,\quad g(x)=\alpha.$$

显然 f 和 g 均是有界连续的函数, 且满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件. 由文献 [5] 或 [6] 可知方程 (2.5) 存在唯一连续的解 $x(t)$ $(t\geqslant 0)$, 满足初值条件 $x(0)=x_0$.

由 (2.4) 式

$$\begin{aligned}\frac{dN}{K}&=e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2dx+\frac{e^x-e^{2x}}{2(1+e^x)^3}(dx)^2\\&=\frac{N(K-N)}{K^2}\left[dx+\frac{K-2N}{2K}(dx)^2\right]\\&=\frac{N(K-N)}{K^2}\left[\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{N\alpha^2}{K}\right)dt+\alpha dB+\frac{k-2N}{2K}\alpha^2dt\right]\\&=\frac{N(K-N)}{K^2}(rdt+\alpha dB),\end{aligned}$$

故 $0<N(t)<K$, 且 $N(t)$ 是方程 (1.3) 的一个正的连续的解.

下面证明解的唯一性. 令 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是两个满足初值条件 $N_1(0)=N_2(0)=N_0$ 和 $0<N_0<K$ 的解. 由 (2.3) 式可知 $0<N_i(t)\leqslant K(i=1,2)$, 则

$$d(N_2(t)-N_1(t))=(N_2(t)-N_1(t))\left[1-\frac{N_2(t)+N_1(t)}{K}\right](rdt+\alpha dB(t)),$$

且

$$N_2(t)-N_1(t)=\int_0^t(N_2(s)-N_1(s))\left[1-\frac{N_2(s)+N_1(s)}{K}\right](rds+\alpha dB(s)).$$

令 $Z(t)=N_2(t)-N_1(t)$. 由 Itô 同构, 可得

$$\begin{aligned}E[Z^2(t)] &\leqslant 2E\left[\int_0^t Z(s)\left[1-\frac{N_2(s)+N_1(s)}{K}\right]rds\right]^2\\&\quad+2E\left[\int_0^t Z(s)\left[1-\frac{N_2(s)+N_1(s)}{K}\right]\alpha dB(s)\right]^2\\&\leqslant 18r^2E\left[\int_0^t |Z(s)|ds\right]^2+18\alpha^2\int_0^t E[Z^2(s)]ds\\&\leqslant 18(r^2t+\alpha^2)\int_0^t E[Z^2(s)]ds.\end{aligned}$$

因此函数

$$u(t)=E[Z^2(t)],\quad t\geqslant 0$$

满足

$$u(t)\leqslant A(t)\int_0^t u(s)ds,\quad A(t):=18(r^2t+\alpha^2).$$

令 $w(t)=\int_0^t u(s)ds$, 则 $w'(t)\leqslant A(t)w(t)$, 从而

$$w(t)\leqslant w(0)e^{\int_0^t A(s)ds}.$$

由于 $w(0)=0$, 则对 $t\geqslant 0$, $w(t)=0$, 从而 $u(t)=0$. 因此,

$$P\{|N_1(t)-N_2(t)|=0,\ \ \forall\, t\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)\}=1,$$

其中 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集. 根据 $t\to|N_1(t)-N_2(t)|$ 的连续性, 有

$$P\{|N_1(t)-N_2(t)|=0,\ \ \forall\, t\in[0,\infty)\}=1,$$

唯一性证毕.

最后, 证明方程 (1.3) 的解的全局吸引性. 令 $N(t)$ 是方程 (1.3) 满足初值条件 $N(0)=N_0$ 且 $0<N_0<K$ 的解. 由 (2.3) 式知 $\phi(t)<N(t)<K$, $t\geqslant 0$.

由 (2.3) 式, 如果 $r>\frac{1}{2}\alpha^2$, 那么 $\phi(t)\to K$ a.s., 故当 $t\to+\infty$ 时, 有 $N(t)\to K$ a.s., 此处用到关于一维 Brown 运动 $B(t)$ 的一个基本结果:

引理 A (The law of iterated logarithm)

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\ \ \text{a.s.}$$

注 2.1　令 $N(t)$ 是方程(1.3)满足初值条件 $N(0)=N_0$ 和 $0<N_0<K$ 的解. 由于 $0<N(t)<K$, $t\geqslant 0$, 由(2.2)式可知

$$N(t)\leqslant\frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt-\frac{1}{2}\alpha^2t-\alpha B(t)}}.$$

假设 $r<0$ 且 $r+\frac{1}{2}\alpha^2<0$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $N(t)\to 0$ a.s.

下面, 考虑方程 (1.4). 方程 (1.4) 等价于 Itô 意义下如下的随机微分方程

$$\begin{aligned}dN(t)&=\left[rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)+\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-\frac{2N(t)}{K}\right)N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)\right]dt\\&\quad+\alpha N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)dB(t)\\&=N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)\left(\left[r+\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-\frac{2N(t)}{K}\right)\right]dt+\alpha dB(t)\right),\end{aligned}\tag{2.6}$$

故

$$N(t)=\frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt-\alpha B(t)}}. \tag{2.7}$$

我们得到如下关于方程 (1.4) 正解的存在性、唯一性及全局吸引性的结果:

定理 2.2 方程(1.4)存在唯一连续正解 $0<N(t)<K$, 满足初值条件 $N(0)=N_0$ 且 $0<N_0<K$, 其中 $N(t)$ 由(2.7)式定义. 如果 $r>0$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $N(t)\to K$ a.s.

3 参数的极大似然估计

本节考虑在环境容纳量 K 给定的前提下, 求解 Itô 意义下方程 (1.3) 中参数 r 和 α 的极大似然估计的方法. 回顾在第 2 节中的变量替换 $x(t)=\log\frac{N(t)}{K-N(t)}$, 方程 (1.3) 变形为方程 (2.5), 其中 $x(0)=x_0=:\log\frac{N_0}{K-N_0}$, 则 x_0 与 $B(t)$ 独立.

对 $\Delta t>0$, 考虑以等距时间点列 $0,\Delta t,2\Delta t,\ldots,n\Delta t$ 离散化方程 (2.5) 可得

$$x_i-x_{i-1}=\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{e^{x_{i-1}}}{1+e^{x_{i-1}}}\alpha^2\right)\Delta t+\alpha\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

其中 ε_i 是一个 i.i.d. N(0,1) 序列, 且对每个 i 和 ε_i 都与 $\{x_j,j<i\}$ 独立. 由 (3.1) 式可得

$$x_i=x_{i-1}+(r+\alpha^2g(x_{i-1}))\Delta t+\alpha\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{3.2}$$

其中 $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

令 $X_0,X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是由过程 (3.2) 得到的观测序列, 且 $\mathcal{F}_{i-1}=\sigma(X_j,\,j\leqslant i-1)$. 对于给定的 $\mathcal{F}_{i-1}$, X_i 的条件概率密度函数为

$$f(x_i\mid\mathcal{F}_{i-1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sqrt{\Delta t}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2\Delta t}[x_i-x_{i-1}-(r+\alpha^2g(x_{i-1}))\Delta t]^2\right\}.$$

则对于给定的 $\mathcal{F}_0$, $(X_1,\ldots,X_n)$ 的联合条件概率密度函数为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n\mid\mathcal{F}_0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sqrt{\Delta t}}\right)^n\prod_{i=1}^n\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2\Delta t}[x_i-x_{i-1}-(r+\alpha^2g(x_{i-1}))\Delta t]^2\right\}.$$

忽略常数, 对数似然函数为

$$L_n(r,\alpha^2)=-\frac{n}{2}\log\alpha^2-\frac{1}{2\alpha^2\Delta t}\sum_{i=1}^n[x_i-x_{i-1}-(r+\alpha^2g(x_{i-1}))\Delta t]^2. \tag{3.3}$$

解似然方程

$$\frac{\partial L_n(r,\alpha^2)}{\partial\alpha^2}=0,\quad \frac{\partial L_n(r,\alpha^2)}{\partial r}=0,$$

即

$$\begin{cases}\alpha^4\displaystyle\sum_{i=1}^n g^2(x_{i-1})(\Delta t)^2+\alpha^2n\Delta t-\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1}-r\Delta t))^2=0,\\ x_n-x_0-\alpha^2\displaystyle\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\Delta t-nr\Delta t=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

得到方程 (3.4) 的解为

$$\begin{cases}\alpha^2=\dfrac{2A}{(n+\sqrt{n^2+4AB})\Delta t},\\ \hat{r}=\dfrac{1}{n\Delta t}\left[x_n-x_0-\alpha^2\Delta t\displaystyle\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\right],\end{cases} \tag{3.5}$$

其中

$$A=\sum_{i=1}^{n}[x_i-x_{i-1}]^2-\frac{1}{n}[x_n-x_0]^2,\quad B=\sum_{i=1}^{n}g^2(x_{i-1})-\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\right]^2.$$

因此, 我们获得参数 α^2 和 r 的极大似然估计.

现在给出以上估计值的一些模拟结果, 以便比较真实值与估计值. 在表 1–3 中, 假设 $\{\varepsilon_i\}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 对每个给定的参数的真实值 (α^2,r), 样本的大小以符号 "Size n" 表示并在表的第一列给出, 其中在表 1 中 $(\Delta t=1)$, 样本大小从 50 增加到 500, 在表 2 中 $(\Delta t=0.01)$, 样本大小从 10000 增加到 50000. 在计算模型 (3.2) 的随机数的极大似然估计十次平均值基础上, 分别列出 "α^2-MLE" 和 "r-MLE" 的大小. 极大似然估计的平方误差在表 ASE 中给出. 表 1 和 2 说明平方误差 α^2 和 r 均依赖于任意给定的数 α^2 和 r 的样本大小. 但是, 在正态分布的假设下, 极大似然估计值和真实值之间没有明显区别, 并且估计值 $\hat{\alpha^2}$ 和 $\hat{r}$ 很好.

众所周知, 当 $\Delta t\to 0$ 时, 离散模型 (3.2) 的解将趋于连续模型 (2.5) 的解, 故当 Δt 足够小时, 我们可以把模型 (3.2) 当作模型 (2.5). 事实上, 过程 (3.2) 的观测序列可以是 $X_0,X_k,X_{2k},\ldots,X_{mk}$ 且 $k\Delta t=1$, $n=mk$. 现在, 我们给出以上估计值的模拟结果. 在表 3 中, 样本大小为 $m=500$, $\Delta t=0.001$, $k=1000$. 在 "α^2-MLE" 和 "r-MLE" 的表中, 列出了在模型 (3.2) 仅一次随机数基础上的极大似然估计. 此表说明平方误差 α^2 和 r 均依赖于给定数 α^2 和 r 的样本大小. 但是, 在正态分布的假设下, 极大似然估计值和真实值之间没有明显区别, 并且估计值 $\hat{\alpha}^2$ 和 $\hat{r}$ 仍很好.

接下来, 考虑 Strotonovich 意义下方程 (1.4) 中参数的极大似然估计.

表 1　极大似然估计的模拟结果, $\Delta t=1$

True		Aver		ASE	
(α^2,r)	Size n	α^2-MLE	r-MLE	α^2	r
	50	0.1085	0.1047	0.0002	0.0015
(0.1,0.1)	100	0.1013	0.1028	0.0002	0.0010
	500	0.1019	0.1003	0.0001	0.0002
	50	0.2904	0.2046	0.0029	0.0055
(0.3,0.2)	100	0.2937	0.1981	0.0015	0.0054
	500	0.2992	0.2016	0.0003	0.0005
	50	0.5020	0.3894	0.0108	0.0098
(0.5,0.4)	100	0.4997	0.4064	0.0060	0.0064
	500	0.4928	0.3964	0.0009	0.0007
	50	0.7313	0.6167	0.0178	0.0341
(0.7,0.6)	100	0.7003	0.6142	0.0075	0.0107
	500	0.6977	0.6093	0.0014	0.0012
	50	0.9059	0.7869	0.0323	0.0124
(0.9,0.8)	100	0.9118	0.7981	0.0083	0.0027
	500	0.8978	0.8085	0.0033	0.0014

表 2 极大似然估计的模拟结果, $\Delta t = 0.01$

True		Aver		ASE	
(α^2, r)	Size n	α^2-MLE	r-MLE	α^2	r
(0.1,0.1)	10000	0.1008	0.1001	0.0000	0.0010
	20000	0.1011	0.0979	0.0000	0.0009
	50000	0.1004	0.1044	0.0010	0.0001
(0.3,0.2)	10000	0.3024	0.2041	0.0000	0.0017
	20000	0.3019	0.2107	0.0000	0.0012
	50000	0.3000	0.1957	0.0000	0.0002
(0.5,0.4)	10000	0.4968	0.3978	0.0001	0.0018
	20000	0.5004	0.4089	0.0000	0.0023
	50000	0.4987	0.4015	0.0000	0.0008
(0.7,0.6)	10000	0.6993	0.6027	0.0001	0.0052
	20000	0.6996	0.6140	0.0000	0.0028
	50000	0.7001	0.6027	0.0000	0.0005
(0.9,0.8)	10000	0.9018	0.7994	0.0001	0.0082
	20000	0.9022	0.8191	0.0001	0.0035
	50000	0.8967	0.8137	0.0000	0.0023

表 3 极大似然估计的模拟结果, $1000\Delta t = 1$

True		Aver		ASE	
(α^2, r)	Size m	α^2-MLE	r-MLE	α^2	r
(0.1,0.1)	500	0.0916	0.0902	0.0001	0.0001
(0.3,0.2)	500	0.2949	0.1667	0.0000	0.0011
(0.5,0.4)	500	0.4371	0.4444	0.0040	0.0020
(0.7,0.6)	500	0.6815	0.5863	0.0003	0.0002
(0.9,0.8)	500	0.9228	0.7915	0.0005	0.0001

作变量替换

$$x(t) = \log \frac{N(t)}{K - N(t)},$$

方程 (1.4) 变形为

$$dx(t) = r dt + \alpha dB(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3.6}$$

且满足初值 $x(0) = x_0 =: \log \frac{N_0}{K - N_0}$, 则 x_0 与 $B(t)$ 独立.

考虑由 (3.6) 式离散的模型, 有

$$x_i - x_{i-1} = r\Delta t + \alpha\sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

其中 ε_i 是一个 i.i.d. N(0,1) 序列, 且对每个 i, ε_i 与 $\{x_j, j < i\}$ 独立.

令 $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是过程 (3.7) 的观测序列, 且 $\mathcal{F}_{i-1} = \sigma\ (X_j, j \leqslant i-1)$. 显然

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 - \left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^2\right],$$

$$\hat{r} = \frac{1}{n\Delta t}(x_n - x_0). \tag{3.8}$$

这样我们就获得了参数 α^2 和 r 的极大似然估计.

此外, 由于序列 $\{\varepsilon_i\} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0,1)$, 我们很容易获得参数的极大似然估计的渐近性质和相合性 [9].

4 注记和相关结果

用常微分方程表示的一般 Logistic 方程具有如下形式:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left[1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right], \quad r,\, K,\, \theta > 0. \tag{4.1}$$

具体细节可以参看文献 [10, 11]. 类似的, 考虑相应于方程 (4.1) 的随机化模型

$$\dot{N}(t) = (r + \alpha\dot{B}(t))N(t)\left[1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right], \quad r, K, \theta > 0, \tag{4.2}$$

并讨论强度为 α^2 时其解的存在性、唯一性及全局吸引性. 其中当 $t \geqslant 0$, $B(t)$ 是一维标准 Brown 运动时, $B(0) = 0$, 满足初值 $N(0) = N_0$, 且 N_0 是满足 $0 < N_0 < K$ 的一个随机变量. 不妨设 N_0 与 $B(t)$ 独立.

在 Itô 意义下, 方程 (4.2) 等价于

$$dN(t) = N(t)\left[1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right](rdt + \alpha dB(t)). \tag{4.3}$$

在 Strotonovich 意义下, 方程 (4.2) 等价于

$$dN(t) = rN(t)\left[1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right]dt + \alpha N(t)\left[1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\theta}\right] \circ dB(t). \tag{4.4}$$

考虑方程 (4.3). 令 $N(t)$ 是方程 (4.3) 的一个解. 显然 $N = 0$ 和 $N = K$ 是方程 (4.3) 的解. 如果 $N(t) \neq 0$ 且 $N(t) \neq K$, 根据 Itô 公式,

$$\begin{aligned} d\log\left|\frac{N^{\theta}}{K^{\theta} - N^{\theta}}\right| &= d\log|N^{\theta}| - d\log|K^{\theta} - N^{\theta}| \\ &= \theta\left[\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)dt + \alpha dB + \frac{(\theta+1)\alpha^2}{2K^{\theta}}N^{\theta}dt\right], \end{aligned}$$

则

$$N(t) = K\left(1 + \left[\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\theta} - 1\right]e^{\theta[-rt + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \alpha B(t) - \frac{(\theta+1)\alpha^2}{2K^{\theta}}\int_0^t N^{\theta}(s)ds]}\right)^{-1/\theta}, \tag{4.5}$$

且

$$K\left(1 + \left[\left(\frac{K}{N_0}\right)^{\theta} - 1\right]e^{\theta[-rt + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \alpha B(t)]}\right)^{-1/\theta} =: \phi_{\theta}(t) < N(t) < K, \quad t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

作变量替换

$$N(t) = K\left(\frac{e^{x(t)}}{1 + e^{x(t)}}\right)^{1/\theta}, \tag{4.7}$$

则

$$x(t) = \log\frac{N^{\theta}(t)}{K^{\theta} - N^{\theta}(t)}.$$

方程 (4.3) 可以变形为

$$dx(t)=\theta\left(\left[r-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{(\theta+1)\alpha^2}{2}\frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}\right]dt+\alpha dB(t)\right),\quad t\geqslant 0, \tag{4.8}$$

初值 $x(0)=x_0=:\log\frac{N_0^\theta}{K^\theta-N_0^\theta}$:

类似于定理 2.1 的证明, 我们有以下结论:

定理 4.1 任意给定初值 $N(0)=N_0$, 且 $0<N_0<K$, 方程(4.3)存在唯一连续正解 $N(t)$ 满足 $\phi_\theta(t)<N(t)<K$, 其中 $\phi_\theta(t)$ 由(4.6)式定义. 若 $r>\frac{1}{2}\alpha^2$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $N(t)\to K$ a.s.

下面考虑方程 (4.4), 它等价于下面 Itô 意义下的随机微分方程:

$$dN(t)=N(t)\left(1-\left(\frac{N(t)}{K}\right)^\theta\right)\left(\left[r+\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-(\theta+1)\left(\frac{N(t)}{K}\right)^\theta\right)\right]dt+\alpha dB(t)\right), \tag{4.9}$$

可得

$$N(t)=K\left(1+\left[\left(\frac{K}{N_0}\right)^\theta-1\right]e^{-\theta(rt+\alpha B(t))}\right)^{-\frac{1}{\theta}}, \tag{4.10}$$

则有以下关于方程 (4.4) 正解的存在性、唯一性和全局吸引性定理:

定理 4.2. 任意给定初值 $N(0)=N_0$, 且 $0<N_0<K$, 方程(4.4)存在唯一连续正解 $N(t)$, 满足 $0<N(t)<K$, 其中 $N(t)$ 由(4.10)式给定. 如果 $r>0$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $N(t)\to K$ a.s.

注 4.1 当环境容纳量 K 和 $\theta>0$ 给定时, 可以用与第3节相同的方法获得参数 r 和 α^2 的极大似然估计.

致谢 作者真挚地感谢审稿人提出的宝贵建议.

参 考 文 献

1 May R M. Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton: Princeton University Press, 1973

2 Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. London: Kluwer Academic Publishers, 1992

3 Hale J K. Nonlinear oscillations in equations with delays, nonlinear oscillations in biolgy. *Lect in Appl Math*, **17**: 157–185 (1979)

4 Mao X, Marion G, Renshaw E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stoc Proc and Appl*, **97**: 95–110 (2002)

5 Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: Wiley, 1972

6 Fredman A. Stochastic Differential Equations and Their Applications. San Diego: Academic Press, 1976

7 Fan J, Zhang C. A reexamination of diffusion estimators with applications to financial model validation. *J Amer Stat Assoc*, **98**: 118–134 (2003)

8 Fan J, Yao Q. Nonlinear Time Series, Nonparametric and Parametric Methods. New York: Springer, 2003

9 Kendall M G. Advanced Theory of Statistics. Griffin: Charles, 1987

10 Gilpin M E, Ayala F G. Global models of growth and competition. *Proc Nat Acad Scis USA*, 1973, **70**: 3590–3593

11 Gilpin M E, Ayala F G. Schoenner's model and drosophila competition. *Theor Popul Biol*, 1976, **9**: 12–14