介紹陳建功教授的數學研究工作

程 民 德

（北京大學）

陳建功教授的數學研究工作，在短短的時間內要全面而又深入地介紹出來是不可能的。我們都知道，陳建功先生站在學術界的前列數十年如一日，他的貢獻是累積了幾十年來始終不渝的勤勞工作而得到的；無論他工作的深度或者廣度，都不是簡短的介紹所能刻畫出來的。在這裏我只預備片段地介紹一下陳先生工作的一部分。

我首先要提出的是陳先生早期在絕對收斂的富利埃級數方面的貢獻。與陳先生同時，英國的數學家哈代曾獨立地在這方面得到相同的結論。但是在資本主義國家的學術工作中，引證到這方面的結果時，只稱道是哈代的定理，這是非常不合理的。我們必須珍視我們祖國數學家的貢獻而予以公正的評斷。

在介紹這一個工作的內容以前，我先介紹一下在富利埃級數理論方面的主要問題。簡單地說，在一個變數的富利埃級數理論中，主要的問題是收斂問題，它可以分兩方面來談：一方面是如何從函數本身的性質得出它的富利埃級數收斂的充分而且必要的條件，這是一個沒有解決的問題〔假如擴充收斂的概念到求和的概念，那末，依蔡沙羅意義求和時，這個問題基本上已經解決，依利斯意義求和，則為我國著名的數學家王福春教授所解決〕；另一方面是連續函數的富利埃級數是否一定收斂，當然，這兒所說的收斂是指區間上除掉一個測度為零的點集而論。這一個問題不但沒有解決，連一個比較肯定的預測也沒有。有的在猜想是否可以找到一個連續函數，它的富利埃級數處處發散；有的在猜想連續函數的富利埃級數不收斂的點一定是一個測度為零的點集〔這個問題在求和方面是已經解決了；對可積函數來說，這問題也全部解決了，這是蘇聯數學家廓爾莫郭洛夫的著名的工作，他作出了一個依勒貝格意義可積的函數，它的富利埃級數處處發散〕。

現在把我們的問題轉到絕對收斂的問題，首先是怎樣從函數本身的性質得出它的富利埃級數絕對收斂的充分而且必要的條件，其次是問那一種函數族的富利埃級數絕對收斂。陳建功先生的工作就把這兩個問題統一地解決了。他直接證明了下面的結果：

絕對收斂的三角級數所表示的函數一定是楊氏連續函數，楊氏連續函數的富利埃級數一定絕對收斂。

楊氏連續函數 $f(x)$ 的表達式如下：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)\, f_2(t+x)\,dt,$$

其中 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 是屬於 $L^2(0,2\pi)$ 的週期函數，它們的週期是 2π。凡是能這樣表達的函數 $f(x)$ 都叫做楊氏連續函數，它的連續性直接可以從定義推出。

由於這一定理的發現，在全區間上絕對收斂的問題，對富利埃級數而論已得到了徹底的解決。

其次我們要介紹一下陳建功先生在正交函數系方面的工作。這也是陳先生比較早期的工作，關於這方面的文獻，一部分已被列入在1935年出版的波蘭叢書之一關於正交函數系的專門著作中(Kaczmarz–Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen)。這裏簡單地提出一兩個結果。

首先是關於勒貝格函數的估計，這是正交函數級數收斂問題的核心。設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是一系在區間 $(0,1)$ 上的就範正交函數，作 $\rho_n(x)=\int_0^1\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)\right|dy$，$\rho_n(x)$ 稱

爲勒貝格函數。拉得馬赫證明:

$\rho_n(x)=O((\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\cdot n^{\frac{1}{2}})$ 在 $(0,1)$ 中除了一個測度爲零的點集而外成立。這個結果爲陳建功先生所改進，他證明 $\rho_n(x)=O((\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\cdot n^{\frac{1}{2}})$ 在 $(0,1)$ 中除去一個測度爲零的點集而外成立。

另外一個問題同樣是圍繞着收斂問題而來的，就是如何從正交函數級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\nu}\varphi_{\nu}(x)$ 的係數 c_{ν} 的性質來判斷級數的收斂。[在三角級數方面也有類似的研究，蘇聯數學家普藍斯納爾和廖爾奧郭洛夫證明：若級數

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\log n$$

收斂，則三角級數 $\frac{a_0}{2}+\Sigma(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 除掉一個測度爲零的點集而外處處收斂。顯然假如我們能够從 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 的收斂推出三角級數的收斂，那末連續函數的富利埃級數的收斂問題就也能得到肯定的答案。] 蘇聯數學家門腮夫證明：若級數

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}c_{\nu}^2(\log\nu)^2$$

收斂，則正交函數級數 $\Sigma c_{\nu}\varphi_{\nu}(x)$ 在區間 $(0,1)$ 上除了一個測度爲零的點集而外處處收斂。同時他又直接證明了下面的定理：若級數

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}c_{\nu}^2(\log\log\nu)^2$$

收斂，則 $\Sigma c_{\nu}\varphi_{\nu}(x)$ 在區間 $(0,1)$ 上除了一個測度爲零的點集而外，處處可用算術平均法求和。陳建功先生統一了門腮夫的這兩個定理，證明這兩個定理都和下面的定理等價：

設 $\Sigma c_{\nu}^2(\log\log\nu)^2<\infty$，則敍列 $S(x,2)$, $S(x,2^2)$, ……, $S(x,2^n)$, ……在區間 $(0,1)$ 上除掉一個測度爲零的點集而外，處處收斂。這裏 $S(x,p)$ 表示部分和 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots\cdots+c_p\varphi_p(x)$。

現在我們再談一談陳先生在複變函數論中關於單葉函數族方面的貢獻，他早在 1935 年就證明了奇的單葉函數的係數 a_n 滿足不等式 $|a_n|<e^2$。陳先生在這方面的工作開始得很早，並且得到了比當時立特烏德更進一步的結果。解放之後，有關單葉函數的研究有了迅速的開展，在陳建功先生的正確指導下，通過學習蘇聯，掌握了蘇聯數學家格魯金等人的最新成就之後，許多優秀的有關單葉函數的研究結果已由年輕的數學工作者連續不斷地發表了出來。

陳先生的工作是無法在短短時間內敍述詳盡的。我們最後還應當提到的是在 1942—1948 年間的困難的日子裏，陳先生的工作依舊沒有絲毫的間斷；關於絕對求和方面的貢獻正是在這一段時間內完成的，它的內容非常豐富。這裏我們舉一個絕對求和方面的定理爲例，它超出了一系列國際學者在這方面研究的成就:

設 $p>1$, $0<k<1$, $\psi(t)$ 是函數 $\varphi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}$ 的共軛函數，設有實數 q 存在使 $q+pk>1$ 且使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\psi(t+h)-\psi(t-h)|^p t^{-q}\,dt=O(h^{pk})\qquad(h\to+0),$$

則 $f(t)$ 的富利埃級數可以 $|C,\alpha|\left(\alpha>\max\left(\frac{1}{2}-k,\ \frac{1}{p}-k\right)\right)$ 求和，並且當 $\beta>-k$ 時可以 (C,β) 求和。'

這裏 $|C,\alpha|$ 求和是表示依蔡沙羅意義 α 級絕對求和，而 (C,β) 表示普通的 β 級蔡沙羅求和。

解放到現在，陳建功先生不但繼續不斷地貢獻出學術方面的新的成就，而且在培養研究人才方面，也起了很大的作用。由於陳先生新的工作大部分已在我國的刊物上發表，這裏就不再提出。我們相信，在已經開始的大規模建設中，陳建功先生將以更大的成就貢獻給我們的祖國。