中国科学 A 辑: 数学 2008 年 第 38 卷 第 12 期: 1403～1412
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

形变预投射代数与量子群的表示

杨士林*, 刘建振

北京工业大学应用数理学院, 北京 100124
* E-mail: slyang@bjut.edu.cn

收稿日期: 2007-08-23; 接受日期: 2008-03-14
北京市自然科学基金 (批准号: 1062003), 国家自然科学基金 (批准号: 10671016, 10771014) 以及北京市教委科技发展 (批准号: KM200710005013) 资助项目

摘要 设 (Γ, I) 是约束循环箭图, 其顶点对应于 Abel 群 $\mathbb{Z}_d$. 给出了所有 (Γ, I) 的不可分解表示以及其中可扩张成相应形变预投射代数 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的不可分解表示的条件. 证明了由 (Γ, I) 的可扩张不可分解表示提升得到的 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示一定是其所有单表示, 从而通过形变预投射代数的方式实现了限制量子群 $\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 的所有单表示.

关键词 预投射代数 量子群 不可分解表示

MSC(2000) 主题分类 **16G20, 17B35**

1 引言

作为一个新的数学分支, 量子群被数学家们广泛研究. 一般地, 量子群可看作非可换非余可换的 Hopf 代数. 作为例子 Kac-Moody Lie 代数的泛包络代数及其限制型均是量子群. 实际上通过研究一些量子群的表示可以得到 Yang-Baxter 方程的解. 近几年来, 形变预投射代数和量子群之间的关系也得到了研究.

有许多方式构造量子群, 一种典型的方法就是通过在路代数或者路余代数上赋予 Hopf 代数结构来得到. Green 和 Solberg 等 [1] 证明了对某些特殊的箭图, 其路代数上有 Hopf 代数结构; Cibils[2] 证明了在路代数 kZ_n 上具有 Hopf 代数结构 $kZ_n(\omega)$, 这里 ω 是 n 次本原单位根, Z_n 是循环箭图, 其顶点对应于 n 阶循环群; Crawley-Boevey 和 Holland[3] 引入形变预投射代数的概念, 它提供了通过某些箭图构造某些量子群的一个有用模型; 对于包含有限个循环分支的箭图, 杨士林 [4] 在其形变预投射代数上构造了有限量子群, 并且实现了最简单量子群 $U_q(\mathrm{sl}_2)$ 的限制型; 进一步地, 作者 [5] 通过某个偶箭图的路代数的商代数实现了 $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$ 的限制型.

受上述思想的启发, 本文将通过形变预投射代数的表示来构造量子群的表示. 所用方法是 Crawley-Boevey 和 Holland 关于可扩张模的一般结果 (见文献 [3, 定理 4.3]), 我们希望这个方法能用于构造一般量子群的限制型 $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{g})$ (参见文献 [5]) 的表示.

2 一些记号

本节引入一些记号, 并回顾一些基本事实.

总假定 k 是特征为零的固定域, 对于一个正整数 m 和参数 q, $q^2 \neq 1$, 令

$$[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}},$$
$$[m]! = [m][m-1]\cdots[2][1],$$

并且约定 $[0]! = 1$.

设 $\mathbb{Z}_d$ 是 Abel 群 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, 这里 d 是任意一个正整数.

箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是指一个有向图, 分别具有顶点集 Q_0 和箭向集 Q_1, 以及两个映射 $s, t : Q_1 \to Q_0$, 对任意箭向 $a \in Q_1$, 其起点为 $s(a)$, 终点为 $t(a)$, 从而有 $a : s(a) \to t(a)$. 箭图 Q 的一条路 γ 是指一些首尾相连的有限箭向序列 $\gamma = a_n \cdots a_2 a_1$, 它满足 $t(a_i) = s(a_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, 令 $s(\gamma) = s(a_1)$ 和 $t(\gamma) = t(a_n)$. 一条路的长度是该序列中箭向的条数; 特别地, 只具有一个顶点的平凡路长度为零.

现在我们假设 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是一个箭图, 其反向箭图表示为 Q^{op}. 注意到 Q^{op} 的顶点集是 Q_0, 并且 $a^* : t(a) \to s(a)$ 是 Q^{op} 的箭向当且仅当 $a : s(a) \to t(a)$ 是 Q 的箭向. Q 的偶图是 $\overline{Q} = Q \bigsqcup Q^{\mathrm{op}}$. 设 kQ 是与 Q 相关的路代数, Q 的路是它的一组 k-基, 注意到 kQ 的乘法定义为

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} p_1 p_2, & \text{如果 } s(p_1) = t(p_2), \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}.$$

设 R_Q 是由 Q 中所有箭向生成的 kQ 的理想, I 是 Q 中一些关系的集合, 如果存在一个正整数 $m \geqslant 2$, 使得

$$R_Q \subseteq (I) \subseteq R_Q^m,$$

其中 (I) 是是由 I 中所有关系生成的理想, 则 (Q, I) 称为一个限制箭图. 此时, 商代数 $kQ/(I)$ 称为限制箭图的路代数.

设 Q 是有限箭图, Q 的一个表示 M 定义为

(i) 对每个 Q_0 中的顶点 i, 都有一个相应的 k-向量空间 M_i.

(ii) 对 Q_1 中的每条箭向 $a : i \to j$, 都有一个相应的 k-线性映射 φ_a: $M_i \to M_j$.

箭图 Q 的预投射代数被定义成一个结合代数

$$\Pi(Q) = \frac{k\overline{Q}}{(\sum_{a \in Q_1} [a, a^*])},$$

其中 $[a, a^*] = aa^* - a^*a$; 更一般地, 具有权 λ 的形变预投射代数 $\Pi^\lambda(Q)$ 是指

$$\Pi^\lambda(Q) = \frac{k\overline{Q}}{(\sum_{a \in Q_1} [a, a^*] - \sum_{i \in Q_0} \lambda_i i)},$$

其中 $\lambda \in k^{|Q_0|}$; 若 $\lambda = 0$, 它正好是 Q 的预投射代数. 一个限制箭图 (Q, I) 的具有权 λ 的形变预投射代数自然地定义成

$$\Pi^\lambda(Q, I) = \frac{\Pi^\lambda(Q)}{I, I^*},$$

其中 I^* 是 kQ^{op} 中的关系集, 它自然地对应于 I 中的关系, 而 (I, I^*) 是由 I 和 I^* 生成的 $\Pi^\lambda(Q)$ 的理想.

我们还需要一些有用的记号.

令 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, Ringel 型定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \alpha_i \beta_i - \sum_{i \to j} \alpha_i \beta_j.$$

特别地, 定义 $q(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$, 相应的对称双线性型为

$$(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle .$$

如果 Q 的顶点 i 不含有向圈 (即没有起点和终点都是 i 的箭向), 则存在反射

$$s_i(\alpha) = \alpha - (\alpha, \varepsilon_i)\, \varepsilon_i, \quad \alpha \in k^n.$$

设 $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}^{|Q_0|}$ 表示对应于顶点 i 的坐标向量, 如果 Q 每个顶点不含有向圈, 则 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ 称为广义 Cartan 矩阵, 因而有一个相应的 Kac-Moody Lie 代数; 箭图 Q 的 Weyl 群 W 定义为由 s_i 生成的自同构群$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{|Q_0|})$ 的子群, 基本集定义为

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathbb{N}^{|Q_0|} : \alpha \neq 0 \text{ 具有连通支撑, 并且} (\alpha, \varepsilon_i) \leqslant 0,\ \forall\, i \in I\}.$$

依照定义, Q 的实根集定义为坐标向量 ε_i (顶点 i 处无圈) 在 Weyl 群 W 作用下的轨道的并, Q 的虚根集定义为 $\pm\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{F}$) 在 Weyl 群 W 作用下的轨道的并.

假定 $n \neq 4$ 且 $q \in k$ 是 n 次本原单位根, 令

$$d = \begin{cases} n, & \text{若 } n \text{ 是奇数}, \\ \dfrac{n}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

注意到 $q^2 \neq 1$. 限制型量子群 $\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 是由 E, F, K 和 K^{-1} 生成的结合代数, 满足下列关系:

$$\begin{aligned} &KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad EK = q^{-2}KE, \quad FK = q^2KF, \\ &EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad K^d = 1, \quad E^d = F^d = 0, \end{aligned}$$

$\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 具有 PBW-基 $\left\{E^i K^l F^j\right\}$ $(0 \leqslant i, j, l \leqslant d-1)$, 它具有一个 Hopf 代数结构, 余乘为

$$\begin{aligned} &\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \\ &\Delta(K) = K \otimes K; \end{aligned}$$

余单位 $\varepsilon : \overline{U}_q(\mathrm{sl}_2) \to k$ 为

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad \varepsilon(K) = 1.$$

反极 $S : \overline{U}_q(\mathrm{sl}_2) \to \overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 定义为

$$S(E) = -K^{-1}E, \quad S(F) = -FK, \quad S(K) = K^{-1}.$$

下面总假定 Γ 是一条循环箭图, 具有顶点集 $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1}\}$ 和箭向集 $\{a_{j-1} : s_{j-1} \to s_j, j = 1, 2, \ldots, d-1\}$; 特别地, $a_{d-1} : s_{d-1} \to s_0$; 换句话说, 箭图 Γ 如图 1.

设 $\overline{j} = j \pmod d$, 令 I 是 Γ 中路集合 $\{\gamma_i^d\}_{i \in \Gamma_0}$, 其中 γ_i^d 表示 Γ 中起点是 s_i 的具有长度 d 的路. 因此, 我们得到一个对应于 (Γ, I) 的形变预投射代数 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$, 其中

$$\lambda = \varepsilon(0, [2], \ldots, [2(d-1)]), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

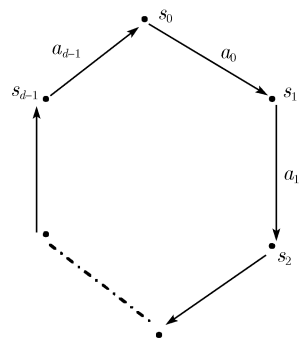

图 1

注意到对任意正整数 t, $[2t]=\frac{q^{2t}-q^{-2t}}{q-q^{-1}}\in k$. 我们有下面结果:

定理 2.1 (文献 [4, 定理 5.1]) 存在 Hopf 代数同构

$$f:\Pi^{\lambda}(\Gamma,I)\cong\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2).$$

3 (Γ,I) 的不可分解表示

为便于应用, 本节回顾 (Γ,I) 的所有不可分解表示.

设 A 是 k-代数, A 称为 Nakayama 代数当且仅当任意不可分解投射右 A-模及不可分解内射左 A-模均为单列的. 对于箭图 (Γ,I), 设 A 表示代数 $k\Gamma/(I)$, 并且 $\mathrm{rad}(A)$ 表示代数 A 的根, 它是由 Γ 中长度大于 1 的路生成的理想. 显然, A 是 Nakayama 代数.

定理 3.1 (文献 [6, 定理 V.3.5]) 设 A 是连通的 Nakayama 代数, M 是不可分解 A-模, 则存在不可分解投射 A-模 P 及整数 t $(1\leqslant t\leqslant l(P))$, 使得 $M\cong P/\mathrm{rad}^t(A)\,P$, 其中 $l(P)$ 表示 P 的长度. 特别地, A 是有限表示型的.

定理3.1 提供了一种构造所有不可分解 A- 模的方法.

设 P_i $(i=0,\ldots,d-1)$ 是所有不可分解投射 A- 模, 则 $P_i=Ae_i$ $(i=0,\ldots,d-1)$, 其中 e_i 是对应于顶点 s_i 的 A 中的幂等元, 因为 $A=\bigoplus_{i=0}^{d-1}P_i$, 任意 A- 模 P_i/rad^tP_i $(1\leqslant t\leqslant l(A))$ 均是不可分解的且任意不可分解 A- 模都同构于某个 P_i/rad^tP_i $(i=0,\ldots,d-1,1\leqslant t\leqslant l(A))$, 因此得到 (Γ,I) 所有不可分解表示, 它们如图 2 所示.

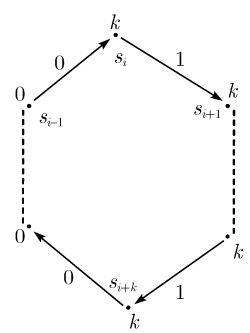

图 2

注意到这些不可分解表示具有维数向量

$$\alpha_i^k=\varepsilon_{\bar{i}}+\varepsilon_{\overline{i+1}}+\cdots+\varepsilon_{\overline{i+k}}\quad(i,k=0,\ldots,d-1),$$

其中 $\varepsilon_{\bar{i}}$ 对应于顶点 $s_i(i\in\mathbb{Z}_d)$ 的单表示的维数向量; 特别地, P_i 具有维数向量 α_i^{d-1}.

注 3.2 若存在另一个 (Γ,I) 的维数向量为 $\alpha_{i'}^{u'}$ 的不可分解表示, 则这两个表示同构当且仅当 $i=i',u=u'$. 若 $u=d-1$, 则维数向量为 α_i^{d-1} $(i=0,\ldots,d-1)$ 的不可分解表示是所有的 (Γ,I) 的不可分解投射表示.

一般情形, 若 B 是 A 的子代数, 则 A-模经过限制而成为 B- 模; 反之, B- 模未必一定能扩张成 A- 模. 因此, $k\Gamma/(I)$ 的表示未必能扩张成为 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示.

我们将探讨 (Γ, I) 的不可分解表示能扩张成 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示的条件. 箭图 (Γ, I) 的表示称为可扩张的, 若它能扩张成一个 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示.

4 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的单表示

为便于应用, 首先回顾一个重要结果:

定理 4.1 (文献 [3, 定理 4.3]) 假定 Q 是箭图且 X 是 kQ- 模, 则 kQ 在 X 上的作用能扩张成 $\Pi^\lambda(Q)$ 的作用当且仅当对任意 X 的直和项 Y, $\lambda \cdot \underline{\dim} Y = 0$.

设

$$\lambda = \varepsilon(0, [2], \ldots, [2(d-1)]), \quad \text{其中 } \varepsilon = \pm 1,$$

假定维数向量为 α_i^u $(0 \leqslant u \leqslant d-1)$ 的 (Γ, I) 的表示是可扩张的, 则有

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \alpha_i^u &= \varepsilon \sum_{0 \leqslant h \leqslant u} [2(i+h)] \\
&= \varepsilon \frac{q^{-2i}(1-q^{-2(u+1)})}{(1-q^{-2})(q-q^{-1})} - \frac{q^{2i}(1-q^{2(u+1)})}{(1-q^2)(q-q^{-1})} \\
&= \varepsilon \frac{q^{-2i+2}(1-q^{-2(u+1)}) + q^{2i}(1-q^{2(u+1)})}{(1-q^2)(q-q^{-1})} \\
&= \varepsilon \frac{q^{2i}(1-q^{2(u+1)} + q^{-4i-2} - q^{-2(u+1)+2-4i})}{(1-q^2)(q-q^{-1})} \\
&= \varepsilon \frac{q^{2i}(1-q^{2(u+1)})(1-q^{-2u-4i})}{(1-q^2)(q-q^{-1})} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

从而 $2(u+1) \equiv 0 (\bmod n)$ 或者 $2u \equiv -4i (\bmod n)$. 即

$$u = d-1 \text{ 或 } u \equiv -2i (\bmod d).$$

若 $u = d-1$, 则有 $\lambda \cdot \alpha_i^{d-1} = 0$. 由定理 4.1, 所有 (Γ, I) 的不可分解的投射表示 $V(\alpha_i^{d-1})$ 均是可扩张的; 若 $u \equiv -2i (\bmod d)$, 则 $\lambda \cdot \alpha_i^u = 0$. 由定理 4.1, 相应的 (Γ, I) 的不可分解表示 $V(\alpha_i^u)$ 均是可扩张的. 因而, 下面两类 (Γ, I) 的不可分解表示是可扩张的:

(a) 具有维数向量

$$\alpha_i^{\overline{-2i}} = \varepsilon_{\overline{i}} + \varepsilon_{\overline{i+1}} + \cdots + \varepsilon_{\overline{d-i}} \ (i = 0, 1, \ldots, d-1)$$

的不可分解表示;

(b) 具有维数向量 α_i^{d-1} 的不可分解投射表示.

考虑具有维数向量

$$\alpha_i^{\overline{-2i}} = \varepsilon_{\overline{i}} + \varepsilon_{\overline{i+1}} + \cdots + \varepsilon_{\overline{d-i}} \ (i = 0, 1, \ldots, d-1)$$

的不可分解表示.

设 Γ_i 是箭图 Γ 的连通子图, 具有顶点 $\{s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{d-i}\}$, 注意到 $s(\Gamma_i) = s_i$ 及 $t(\Gamma_i) = s_{d-i}$. 记 Γ 的维数向量为 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ 的不可分解表示为 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}}) = (V_i, V_a)$ $(i \in \Gamma_0, \quad a \in \Gamma_1)$, 则 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$ 可以按如下方式给出:

$$V_i=\begin{cases}k; & i\in\Gamma_i\\ 0; & i\notin\Gamma_i\end{cases},\quad V_a=\begin{cases}1; & a\in\Gamma_i\\ 0; & a\notin\Gamma_i.\end{cases}$$

这就是说, (Γ,I) 的表示 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$ 见图 3.

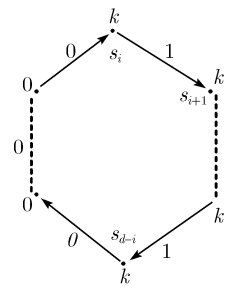

图 3

如果 $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 的表示是通过 (Γ,I) 的一个可扩张表示 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$ 得到, 则有

$$V_{a_i}V_{a_i^*}-V_{a_{i+1}^*}V_{a_{i+1}}=\lambda_i\cdot s_i,$$

从而

$$\begin{cases}-V_{a_{\overline{i}}^*}V_{a_{\overline{i}}}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2i}}-q^{\overline{-2i}}}{q-q^{-1}},\\ V_{a_{\overline{i}}}V_{a_{\overline{i}}^*}-V_{a_{\overline{i+1}}^*}V_{a_{\overline{i+1}}}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2(i+1)}}-q^{\overline{-2(i+1)}}}{q-q^{-1}},\\ \qquad\cdots\\ V_{a_{\overline{d-i-2}}}V_{a_{\overline{d-i-2}}^*}-V_{a_{\overline{d-i-1}}^*}V_{a_{\overline{d-i-1}}}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2(d-i-2)}}-q^{\overline{-2(d-i-2)}}}{q-q^{-1}},\\ V_{a_{\overline{d-i-1}}}V_{a_{\overline{d-i-1}}^*}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2(d-i-1)}}-q^{\overline{-2(d-i-1)}}}{q-q^{-1}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}V_{a_i^*}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2i}}-q^{\overline{-2i}}}{q-q^{-1}},\\ V_{a_i^*}-V_{a_{\overline{i+1}}^*}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2(i+1)}}-q^{\overline{-2(i+1)}}}{q-q^{-1}},\\ \qquad\cdots\\ V_{a_{\overline{d-i-1}}^*}=\varepsilon\dfrac{q^{\overline{2(d-i-1)}}-q^{\overline{-2(d-i-1)}}}{q-q^{-1}},\end{cases}$$

因此

$$V_{a_j^*}=\varepsilon\frac{q^{\overline{2i}}+\cdots+q^{\overline{2j}}-(q^{\overline{-2i}}+\cdots+q^{\overline{-2j}})}{q-q^{-1}},$$

即

$$V_{a_j^*}=\varepsilon\sum\nolimits_{k=i}^{j}[2k],\quad j=i,\ldots,d-i.$$

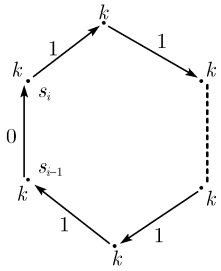

图 4

现在考虑不可分解投射表示 $V(\alpha_i^{d-1})$, 首先注意到

$$\alpha_i^{d-1}=\varepsilon_{\overline{i}}+\varepsilon_{\overline{i+1}}+\cdots+\varepsilon_{\overline{i-1}}\quad(i=0,1,\ldots,d-1),$$

因此, 任意 (Γ,I) $(i=0,\ldots,d-1)$ 的不可分解投射表示 $V(\alpha_i^{d-1})$ 均如图 4 所示.

若 $0\leqslant u\leqslant d-2$, 与上述证明过程类似, 我们有

$$V_{a_{\overline{i+u}}^*}=\varepsilon\sum_{0\leqslant h\leqslant u}[2(i+h)],\quad(0\leqslant u\leqslant d-2).$$

我们知道, 对于 (Γ,I) 的反向箭图在 $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 中应该满足关系 $\gamma_i^{*d}=0$, 因此

$$V_{a_i^*}\cdots V_{a_{d-1}^*}V_{a_0^*}\cdots V_{a_{\overline{i-2}}^*}V_{\alpha_{\overline{i-1}}^*}=0,\tag{2}$$

其中

$$V_{a^*_{\overline{i+u}}} = \varepsilon \sum_{0\leqslant h\leqslant u} [2(i+h)].$$

由等式 (1) 和 (2), 易知 $V_{a^*_{\overline{i+u}}} = V_{\alpha^*_{\overline{d-i}}} = 0$ $(0 \leqslant u \leqslant d-2)$ 仅当 $u \equiv -2i \pmod d$; 另一方面易知 $d-i \equiv i-1 \pmod d$ 当且仅当 d 是奇数且 $i = \frac{d+1}{2}$.

对具有维数向量 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ 的不可分解表示 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$, 容易知道

$$V_{a_i^*} \cdots V_{a^*_{d-1}} V_{a_0^*} \cdots V_{a^*_{\overline{i-2}}} V_{\alpha^*_{\overline{i-1}}} = 0.$$

事实上, $V_{a^*_{\overline{i+u}}}$ $(i = 0, \ldots, d-1;\ 0 \leqslant u \leqslant |d-2i|)$ 可以用自然的方式给出.

对于维数向量为 α_i^{d-1} 的不可分解投射表示, 如果 d 是奇数且 $i = \frac{d+1}{2}$, 则 $V_{a^*_{\overline{i-1}}} = 0$. 除此之外其他情形, 均有 $V_{a^*_{\overline{d-i}}} = 0$ 且 $V_{a_i^*} \cdots V_{a^*_{\overline{i-2}}} = 0$, 从而 $V_{a^*_{\overline{i-1}}}$ 要么为 0, 要么不等于 0. 若 $V_{a^*_{\overline{i-1}}} \neq 0$, 则不失一般性设 $V_{a^*_{\overline{i-1}}} = 1$.

因此, 我们有如下结果:

定理 4.2 箭图 (Γ, I) 的可扩张表示是如下两类:

(i) 具有维数向量 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ $(i \in \mathbb{Z}_d)$ 的不可分解表示, 这些表示的扩张方式是唯一的;

(ii) 具有维数向量 α_i^{d-1} $(i \in \mathbb{Z}_d)$ 的不可分解投射表示 $V(\alpha_i^{d-1})$, 除了当 d 是奇数且 $i = \frac{d+1}{2}$ 时的表示 $V(\alpha_i^{d-1})$ 外, 其他表示均有两种扩张方式.

保持上述记号并令 $\varepsilon = \pm 1$. 那些通过 (Γ, I) 可扩张的不可分解表示提升得到的 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示按如下方式给出, 这里我们沿用相同记号.

(i) 具有维数向量 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ $(i = 0, \ldots, d-1)$ 的不可分解表示 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$:

$$V_i(\alpha_i^{\overline{-2i}}) = \begin{cases} k, & i \in \Gamma_i, \\ 0, & \text{其他情形}; \end{cases}$$

$$\mathrm{V}_{a_{\overline{i+u}}}(\alpha_i^{\overline{-2i}}) = \begin{cases} 1, & a_{\overline{i+u}} \in \Gamma_i, \\ 0, & \text{其他情形}; \end{cases}$$

$$\mathrm{V}_{a^*_{\overline{i+u}}}(\alpha_i^{\overline{-2i}}) = \begin{cases} \varepsilon \sum\limits_{0\leqslant h\leqslant u} -[2(i+h)], & a^*_{\overline{i+u}} \in \Gamma_i, \\ 0, & \text{其他情形}; \end{cases}$$

其中 Γ_i 是 Γ 的子箭图, 如前所述它对应于 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$.

(ii) 具有维数向量 α_i^{d-1} $(i = 0, \ldots, d-1)$ 的不可分解投射表示 $V(\alpha_i^{d-1})$:

如果 d 是奇数且 $i = \frac{d+1}{2}$, 则相应的 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示 $V(\alpha_i^{d-1})$ 为

$$V_i(\alpha_i^{d-1}) = k\ (i = 0, \ldots, d-1),$$

$$V_{a_j}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} 1, & j = i,\ i+1, \ldots, i-2, \\ 0, & j = i-1; \end{cases}$$

$$V_{a_j^*}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} \varepsilon \sum\limits_{0\leqslant h\leqslant j-i} [2(i+h)], & j = i, i+1, \ldots, i-2, \\ 0, & j = i-1. \end{cases}.$$

其他情形, $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示 $V(\alpha_i^{d-1})$ 如下:

$$V_i(\alpha_i^{d-1}) = k\ (i = 0, \dots, d-1),$$

$$V_{a_j}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} 1, & j = i,\ i+1, \dots, i-2, \\ 0, & j = i-1; \end{cases}$$

$$V_{a_j^*}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} \varepsilon \sum\limits_{0 \leqslant h \leqslant j-i} [2(i+h)], & j = i, i+1, \dots, i-2, \\ 1, & j = i-1; \end{cases}$$

或者

$$V_i(\alpha_i^{d-1}) = k\ (i = 0, \dots, d-1),$$

$$V_{a_j}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} 1, & j = i,\ i+1, \dots, i-2, \\ 0, & j = i-1; \end{cases}$$

$$V_{a_j^*}(\alpha_i^{d-1}) = \begin{cases} \varepsilon \sum\limits_{0 \leqslant h \leqslant j-i} [2(i+h)], & j = i, i+1, \dots, i-2, \\ 0, & j = i-1. \end{cases}.$$

事实上, 由 (Γ, I) 可扩张的不可分解表示经过提升得到的 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示恰好是 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的所有不可约表示, 要理解这个事实, 需要下面的引理:

引理 4.3 (文献 [7, 定理 1.2]) α 是 $\Pi^\lambda(\Gamma)$ 的单表示的维数向量当且仅当下面两个条件成立:

(i) α 是正实根, 且 $\lambda \cdot \alpha = 0$;

(ii) 若 $\alpha = \beta + \gamma + \cdots$ 是一些正实根 $\beta, \gamma, \cdots$ 的和且满足

$$\lambda \cdot \beta = \lambda \cdot \gamma = \cdots = 0,$$

则

$$1 - q(\alpha) > (1 - q(\beta)) + (1 - q(\gamma)) + \cdots.$$

注意到形变预投射代数 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的任意不可分解表示均可看成 (Γ, I) 的表示 (可能是可分解表示), 另一方面我们已经列出 (Γ, I) 的所有不可分解表示以及可扩张的不可分解表示, 一个 (Γ, I) 的不可分解表示是可扩张的当且仅当它具有维数向量 α_i^{d-1} 或者 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ $(i = 0, \dots, d-1)$. 由引理 4.3 有

推论 4.4 $V(\alpha_i^{\overline{-2i}})$ 及 $V(\alpha_i^{d-1})$ 是所有 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的单表示.

证明 设 V 是维数向量为 α_i^{d-1} 或者 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ 的 $\Pi^\lambda(\Gamma, I)$ 的表示.

首先, 假定 V 具有维数向量

$$\alpha_i^{\overline{-2i}} = \varepsilon_{\overline{i}} + \cdots + \varepsilon_{\overline{d-i}}.$$

容易知道 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ 不能写成如下形式:

$$\alpha_{i_1}^{\overline{-2i_1}} + \alpha_{i_2}^{\overline{-2i_2}} + \cdots + \alpha_{i_s}^{\overline{-2i_s}}. \tag{$*$}$$

假定 V 具有维数向量

$$\alpha_i^{d-1} = \varepsilon_{\overline{i}} + \cdots + \varepsilon_{\overline{d-1}} + \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{\overline{i-1}},$$

若 α_i^{d-1} 能写成

$$\alpha_i^{d-1}=\alpha_{i_1}^{\overline{-2i_1}}+\alpha_{i_2}^{\overline{-2i_2}}+\cdots+\alpha_{i_s}^{\overline{-2i_s}},$$

其中

$$\alpha_{i_u}^{\overline{-2i_u}}=\varepsilon_{\overline{i_u}}+\cdots+\varepsilon_{\overline{d-i_u}},\quad (u=0,\ldots,s),$$

则

$$\alpha_i^{d-1}-\alpha_{i_1}^{\overline{-2i_1}}=\varepsilon_{\overline{d-i_1+1}}+\cdots+\varepsilon_{\overline{i_1-1}}. \tag{3}$$

等式 (3) 的右边为 $\alpha_{\overline{d-i_1+1}}^{\overline{-2(d-i_1-1)}}$, 这是因为事实 $(*)$, 即

$$\alpha_i^{d-1}=\alpha_{i_1}^{\overline{-2i_1}}+\alpha_{\overline{d-i_1+1}}^{\overline{-2(d-i_1-1)}}\ (i_1=0,\ldots,d-1).$$

注意到

$$1-q(\alpha_i^{d-1})=1,$$

以及

$$(1-q(\alpha_i^{\overline{-2i}}))+(1-q(\alpha_{\overline{d-i+1}}^{\overline{-2(d-i-+1)}}))=0,$$

有

$$1-q(\alpha_i^{d-1})>(1-q(\alpha_i^{\overline{-2i}}))+(1-q(\alpha_{\overline{d-i+1}}^{\overline{-2(d-i-+1)}})).$$

由引理 4.3, $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 的任意具有维数向量 α_i^{d-1} 或 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$ 都是其单表示.

反之, $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 的任意单表示均是 (Γ,I) 的可扩张不可分解表示, 它具有维数向量 α_i^{d-1} 或者 $\alpha_i^{\overline{-2i}}$.

下面给出 (Γ,I) 的表示 V 可扩张的一个充分必要条件.

推论 4.5 设 V 是 (Γ,I) 的一个表示, 则 V 可扩张当且仅当 V 是 (Γ,I) 的一些可扩张的不可分解表示的直和.

证明由定理 4.2 易知.

注 4.6 (Γ,I) 的一个可扩张表示可以有多种方式提升成 $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 的表示, 为理解这一事实, 我们给出一个例子.

例 4.7 设 q 是 3 次本原单位根, $\lambda=(0,-[2],-[4])$. 令 V' 和 V'' 是 (Γ,I) 的两个分别具有维数向量 $\alpha'=(0,1,1)$ 和 $\alpha''=(1,0,0)$ 的不可分解表示, 容易知道 V' 和 V'' 是可扩张的, 则 $V'\oplus V''$ 通过扩张得到的 $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 有两个 (如图 5).

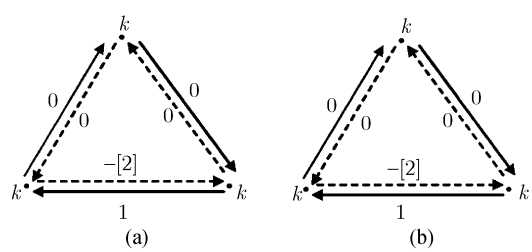

图 5

现在我们可以通过定理 2.1, 给出量子群 $\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 所有单表示.

定理 4.8 (文献 [8, 定理 VI.5.7]) $\overline{U}_q(\mathrm{sl}_2)$ 所有单表示恰好是那些经过 (Γ,I) 可扩张的不可分解表示提升得到的形变预投射代数 $\Pi^\lambda(\Gamma,I)$ 的表示.

致谢 作者感谢审稿人对初稿提出的有益的建议.

参考文献

1 Green E L, Solbergø. Basic Hopf algebras and quantum groups. *Math Z*, **29**: 45–76 (1998)

2 Cibils C. A quiver quantum group. *Comm Math Phys*, **157**: 459–477 (1993)

3 Crawley-Boevey W, Holland M P. Noncommutative deformations of Kleinan singularities. *Duke Math J*, **92**: 605–635 (1998)

4 Yang S. Quantum groups and deformations of preprojective algebras. *J Algebra,* **279**: 3–21 (2004)

5 Huang H, Yang S. Quantum group and double quiver Algebras. *Lett Math Phys*, **71**: 49–61 (2005)

6 Assem I, Simson D, Skowronski A. Elements of Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 2006

7 Crawley-Boevey W. Geometry of the moment map for representations of quivers. *Compos Math*, **126**: 257–293 (2001)

8 Kassel C. Quantum Groups. In: GTM Vol 155. New York: Springer-Verlag, 1995