

自由面重力流的边界积分方程——反演法*

温 贤 云 吴 持 恭*

(成都科技大学水电学院)

摘 要

本文对求解自由面重力流提出了一种新的数值方法。在利用 Мусхелишвили, H. И. 学派数学理论的基础上,再通过变换,我们得到了物理平面上的非奇异边界积分方程,从而克服了用解析函数理论研究该类问题时,固壁边界未知待求的困难,为利用解析函数理论研究自由面重力流开辟了新的广阔途径。理论研究和计算表明,本文方法收敛性好、收敛速度快、运算量小,与现有方法相比有明显的优越性。文中计算了挑射水流和闸孔出流,计算结果与实验吻合。

一、引 言

自从 Lauck^[1] 的开创性研究以来,用解析函数理论研究自由面重力流已有六十年的历史。这是一个困难的非线性边界条件问题,正如 Von Karman^[2] 指出,这一困难不仅在于边界条件的非线性性质,而且还由于自由面边界在事先是未知的。

六十年来,先后用解析函数法、松弛法、有限元法、边界元法进行过研究。解析函数理论是最早用于研究该方法,也是最先使用计算机进行数值计算的方法。对于曲线边界, Woods^[3] 提出了求解壁面曲线的迭代方法,但无法计入重力作用; Watters^[4] 和 Larock^[5] 假设壁面角度为辅助变量的已知函数,不能求解给定固壁的情况; Moayeri^[6] 把固壁几何形状表示为势函数的未知函数,然后形成代数方程组,同时迭代固壁和自由面形状。文献 [7, 8] 指出,在计入重力的情况下这些方法所能处理的固壁几何形状受到了很大的限制。

六十年来,用解析函数理论研究该方法有一个共同的特点,就是表示固壁几何形状的函数是未知待求函数。在求解之前,本来在物理平面上是已知的固壁边界,在其它平面上却成了未知的。即使是直线边界,对应的长度仍需迭代求解。自由边界的非线性和待定性已经使问题难于求解,而现在固壁边界也是待定的,曲线边界条件还是非线性的,这就形成了解析函数法难以克服的困难,致使该方法一直未能取得根本性进展。七十年代有限元法用于该问题的研究后,解析函数法被迅速推向次要地位,濒于销声匿迹的境地。

本文作者近年来在利用求解 Riemann-Hilbert 边值问题方法的基础上,直接将辅助平面上带柯西积分核的积分方程转化为流场边界的非奇异积分方程,克服了固壁边界未知待求的困

本文 1985 年 10 月 23 日收到,1986 年 7 月 8 日收到修改稿。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

难, 并采用以边界流线长度为自变量, 边界势函数为未知待求函数的统一迭代方法, 从而为利用解析函数理论研究自由面重力流开辟了新的途径。

二、基本公式

如图 1, 记实轴上的区间 $(-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)$ 为 D' , (a_1, b_1) 为 D'' , $D = D' \cup D''$. 设 $Q(z) = u(z) + iv(z)$ 是在上半平面解析, 在无穷远点及 a_1, b_1 点有界的函数. 在实轴 D 上, 当 $a(\eta), b(\eta), c(\eta), u^+(\eta), v^+(\eta)$ 为已知实函数, 且 $a^2(\eta) + b^2(\eta) \neq 0$, 则上半平面的 Riemann-Hilbert 边值问题为根据边界条件

$$a(\eta)u^+(\eta) - b(\eta)v^+(\eta) = c(\eta) \quad (1)$$

在 D 上求函数 $Q(z)$.

若 $\eta \in D'$, 令 $a(\eta) = 0, b(\eta) = -1, c(\eta) = g(\eta)$; $\eta \in D''$, 令 $a(\eta) = 1, b(\eta) = 0, c(\eta) = f(\eta)$, 其中 $g(\eta), f(\eta)$ 为已知函数则得混合边值问题

$$\begin{aligned} u^+(\eta) &= f(\eta), \text{ 在 } D'' \text{ 上,} \\ v^+(\eta) &= g(\eta), \text{ 在 } D' \text{ 上.} \end{aligned} \quad (2)$$

根据文献 [9, 10] 关于 Riemann-Hilbert 边值问题的一般解法可得混合边值问题解为

$$\begin{aligned} Q(z) = & \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{a_1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta-a_1)(\eta-b_1)}(\eta-z)} d\eta \right. \\ & \left. + \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(\eta)}{\sqrt{(\eta-a_1)(b_1-\eta)}(\eta-z)} d\eta - \int_{b_1}^{\infty} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta-a_1)(\eta-b_1)}(\eta-z)} d\eta \right], \end{aligned} \quad (3)$$

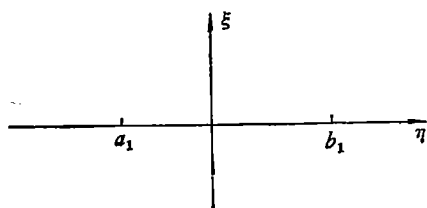


图 1

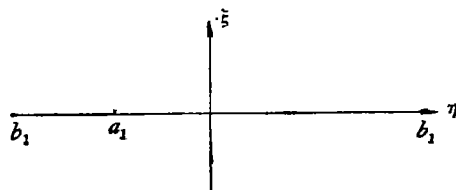


图 2

并且规定当 $\eta \in (-\infty, a_1)$ 时, $\arg \sqrt{(\eta-a_1)(\eta-b_1)} = 0$.

当 b_1 为无穷远点时(图 2), 由分式变换可将 b_1 变成实轴上一有限点, 在利用 (3) 式后再回到图 2 的平面可得:

$$Q(z) = \frac{\sqrt{a_1-z}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{a_1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{a_1-\eta}(\eta-z)} d\eta + \int_{a_1}^{\infty} \frac{f(\eta)}{\sqrt{\eta-a_1}(\eta-z)} d\eta \right]. \quad (4)$$

以下以挑射水流和孔口出流的计算为例, 来阐明如何在 (3) 或 (8) 式的基础上得到物理平面上的边界积分方程的一般步骤。

三、挑射水流的数值解

水体流经曲线边界后, 在重力作用下自由挑射、跌落的问题, 其求解是非常困难的。该问题的特征是, 流场具有两个在求解之前是未知的自由表面, 而且固壁边界是曲线的。迄今为

止, 用解析函数理论只能在略去重力的情况下求解, 其结果是水流向无限高处射去^[11,12]。

1. 边界积分方程的推导

如图 3 所示, ABCIDE 为固壁边界, AJQF, EPF 为自由表面。在 $x'Dy'$ 坐标系中, 复势与复速度有如下关系:

$$\frac{dW}{dz} = V e^{-i\theta}. \quad (5)$$

其中 $z = x' + iy'$, $W = \varphi + i\psi$, φ 为势函数, ψ 为流函数, V 为某点的流速, θ 为该点的速度方向。

引入对数流速

$$Q = \ln \left(\frac{1}{U} \frac{dW}{dz} \right) = \ln \frac{V}{U} - i\theta, \quad (6)$$

U 为流场特征流速。

设单宽流量为 q , 由变换

$$W = \frac{q}{\pi} \left(\ln \frac{1}{z} + i\pi \right), \quad (7)$$

将复势平面的带形区域变到辅助平面的上半平面(图 4), z 平面的实轴对应于流场的边界, 则

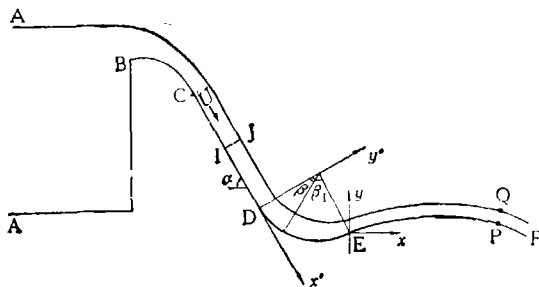


图 3 物理平面

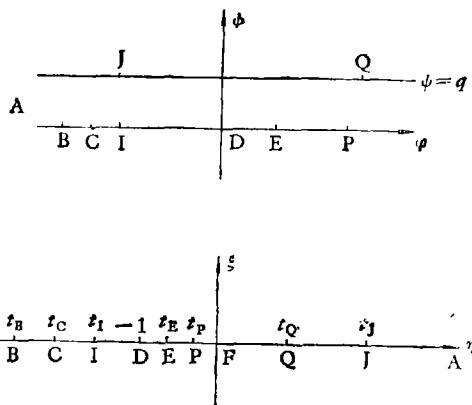


图 4 复势平面与辅助平面的转换

(6) 式中各量为 z 的函数

$$Q(z) = \ln \frac{V(z)}{U} - i\theta(z). \quad (8)$$

设 E 点的总能为 H , 在坐标系 $x_E y$ 中自由面 AF 的坐标为 x_u, y_u , EF 的坐标为 x_d, y_d . 由压力为零的条件得

$$\left. \begin{aligned} u_u &= \sqrt{2g(H - y_u)}, \\ u_d &= \sqrt{2g(H - y_d)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 u_u 为自由面 AF 的速度, u_d 为 EF 的速度。

记

$$\left. \begin{aligned} G_u(z) &= \ln \frac{u_u(z)}{U} = \ln \frac{\sqrt{2g[H - y_u(z)]}}{U}, \\ G_d(z) &= \ln \frac{u_d(z)}{U} = \ln \frac{\sqrt{2g[H - y_d(z)]}}{U}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由此得 z 平面实轴上的如下边界条件(图 4):

$$\left. \begin{aligned} \eta < t_C & \quad \operatorname{Im} Q^+(\eta) = -\beta_{AC}(\eta), \\ t_C < \eta < t_D & \quad \operatorname{Im} Q^+(\eta) = 0, \\ t_D < \eta < t_E & \quad \operatorname{Im} Q^+(\eta) = -\beta(\eta), \\ t_E < \eta < 0 & \quad RQ^+(\eta) = G_d(\eta), \\ 0 < \eta < \infty & \quad RQ^+(\eta) = G_u(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 $\beta_{AC}(\eta)$ 为 ABC 段的切线方向, $\beta(\eta)$ 为 DE 段的切线方向. 由 (4) 式得

$$Q(z) = \frac{\sqrt{t_E - z}}{\pi} \left[- \int_{-\infty}^{t_C} \frac{\beta_{AC}(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - z)} d\eta - \int_{-1}^{t_E} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - z)} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_F}^0 \frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - z)} d\eta + \int_0^{\infty} \frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - z)} d\eta \right]. \quad (12)$$

我们只需计算 JQ 和 IP 范围内的流场, 故 (12) 式中第一个积分可略去, 第三、四项的积分范围也相应缩小, 则 (12) 式可写成

$$Q(z) = \frac{\sqrt{t_E - z}}{\pi} \left[- \int_{-1}^{t_E} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - z)} d\eta + \int_{t_F}^{t_P} \frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - z)} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_Q}^{t_J} \frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - z)} d\eta \right]. \quad (13)$$

由 Сохоцкий-Plemelj^[9] 公式取边界值后得

$$G_u(t_0) = \frac{\sqrt{t_E - t_0}}{\pi} \left\{ - \int_{-1}^{t_E} \left[\frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}} - \frac{\beta(t_0)}{\sqrt{t_E - t_0}} \right] \frac{1}{\eta - t_0} d\eta + \int_{t_E}^{t_P} \frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_Q}^{t_J} \frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right\} - \frac{\beta(t_0)}{\pi} \ln \frac{t_E - t_0}{t_0 + 1} \quad (-1 < t_0 < t_E), \quad (14)$$

$$\theta_u(t_0) = \frac{\sqrt{t_0 - t_E}}{\pi} \left\{ - \int_{-1}^{t_E} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - t_0)} d\eta + \int_{t_E}^{t_P} \frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_Q}^{t_J} \left[\frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}} - \frac{G_u(t_0)}{\sqrt{t_0 + t_E}} \right] \frac{1}{\eta - t_0} d\eta \right\} \\ + \frac{G_u(t_0)}{\pi} \ln \frac{t_J - t_0}{t_0 - t_Q} \quad (t_Q < t_0 < t_J), \quad (15)$$

$$\theta_d(t_0) = \frac{\sqrt{t_0 - t_E}}{\pi} \left\{ - \int_{-1}^{t_E} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - t_0)} d\eta + \int_{t_E}^{t_P} \left[\frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}} - \frac{G_d(t_0)}{\sqrt{t_0 - t_E}} \right] \frac{1}{\eta - t_0} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_Q}^{t_J} \frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right\} + \frac{G_d(t_0)}{\pi} \ln \frac{t_P - t_0}{t_0 - t_E} \quad (t_E < t_0 < t_P), \quad (16)$$

$$G_{ID}(t_0) = \frac{\sqrt{t_E - t_0}}{\pi} \left[- \int_{-1}^{t_E} \frac{\beta(\eta)}{\sqrt{t_E - \eta}(\eta - t_0)} d\eta + \int_{t_E}^{t_P} \frac{G_d(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right. \\ \left. + \int_{t_Q}^{t_J} \frac{G_u(\eta)}{\sqrt{\eta - t_E}(\eta - t_0)} d\eta \right] \quad (t_1 \leq t_0 < -1). \quad (17)$$

其中

$$G_w(t_0) = \ln \frac{u_w(t_0)}{U}, \quad G_{ID}(t_0) = \ln \frac{u_{ID}(t_0)}{U}.$$

式中 $u_w(t_0)$, $u_{ID}(t_0)$ 分别为 ED 段及 ID 段上任一点的流速, $\theta_u(t_0)$, $\theta_d(t_0)$ 分别为 JQ 段及 EP 段上任一点的速度方向。

如图 5 所示, 把 D 和 J 点分别作为流线弧坐标 s 的原点, 那么沿流线所有的量为 s 的函数, 即 $G_w(s)$, $u_w(s)$, $\varphi_w(s)$, $\beta(s)$, $u_u(s)$, $G_u(s)$, $x_u(s)$, $y_u(s)$, $\theta_u(s)$, $\varphi_u(s)$, $u_d(s)$, $G_d(s)$, $x_d(s)$, $y_d(s)$, $\theta_d(s)$, $\varphi_d(s)$, $G_{ID}(s)$, $u_{ID}(s)$, $\varphi_{ID}(s)$. 记 ID, DE, EP, JQ 分别为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

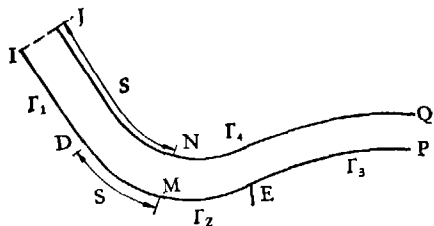


图 5 弧坐标示意图

把 (14)–(17) 式变换到物理平面, 得边界积分方程如下(线积分方向与流速方向相同):

$$\begin{aligned} G_w(s) = & \frac{\sqrt{t_E - t_w(s)}}{q} \left\{ \int_{\Gamma_2} \left[\frac{\beta(l)}{\sqrt{t_E - \eta_w(l)}} - \frac{\beta(s)}{\sqrt{t_E - t_w(s)}} \right] \frac{\eta_w(l) u_w(l)}{\eta_w(l) - t_w(s)} dl \right. \\ & - \int_{\Gamma_3} \frac{G_d(l) \eta_d(l) u_d(l)}{\sqrt{t_E - \eta_d(l)} [\eta_d(l) - t_w(s)]} dl + \int_{\Gamma_4} \frac{G_u(l) \eta_u(l) u_u(l)}{\sqrt{t_E - \eta_u(l)} [\eta_u(l) - t_w(s)]} dl \left. \right\} \\ & - \frac{\beta(s)}{\pi} \ln \frac{t_E - t_w(s)}{t_w(s) + 1} \quad s \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \theta_d(s) = & \frac{\sqrt{t_d(s) - t_E}}{q} \left\{ \int_{\Gamma_2} \frac{\beta(l) \eta_w(l) u_w(l)}{\sqrt{t_E - \eta_w(l)} [\eta_w(l) - t_d(s)]} dl \right. \\ & - \int_{\Gamma_3} \left[\frac{G_d(l)}{\sqrt{\eta_d(l) - t_E}} - \frac{G_d(s)}{\sqrt{t_d(s) - t_E}} \right] \frac{\eta_d(l) u_d(l)}{[\eta_d(l) - t_d(s)]} dl \\ & + \int_{\Gamma_4} \frac{G_u(l) \eta_u(l) u_u(l)}{\sqrt{\eta_u(l) - t_E} [\eta_u(l) - t_d(s)]} dl \left. \right\} + \frac{G_d(s)}{\pi} \ln \frac{t_P - t_d(s)}{t_d(s) - t_E} \quad s \in \Gamma_3, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta_u(s) = & \frac{\sqrt{t_u(s) - t_E}}{q} \left\{ \int_{\Gamma_2} \frac{\beta(l) \eta_w(l) u_w(l)}{\sqrt{t_E - \eta_w(l)} [\eta_w(l) - t_u(s)]} dl - \int_{\Gamma_3} \frac{G_d(l) \eta_d(l) u_d(l)}{\sqrt{\eta_d(l) - t_E} [\eta_d(l) - t_u(s)]} dl \right. \\ & + \int_{\Gamma_4} \left[\frac{G_u(l)}{\sqrt{\eta_u(l) - t_E}} - \frac{G_u(s)}{\sqrt{t_u(s) - t_E}} \right] \frac{\eta_u(l) u_u(l)}{\eta_u(l) - t_u(s)} dl \left. \right\} \\ & + \frac{G_u(s)}{\pi} \ln \frac{t_J - t_u(s)}{t_u(s) - t_Q} \quad s \in \Gamma_4, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G_{ID}(s) = & \frac{\sqrt{t_E - t_1(s)}}{q} \left\{ \int_{\Gamma_2} \frac{\beta(l) \eta_w(l) u_w(l)}{\sqrt{t_E - \eta_w(l)} [\eta_w(l) - t_1(s)]} dl - \int_{\Gamma_3} \frac{G_d(l) \eta_d(l) u_d(l)}{\sqrt{\eta_d(l) - t_E} [\eta_d(l) - t_1(s)]} dl \right. \\ & + \int_{\Gamma_4} \frac{G_u(l) \eta_u(l) u_u(l)}{\sqrt{\eta_u(l) - t_E} [\eta_u(l) - t_1(s)]} dl \left. \right\} \quad s \in \Gamma_1, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\eta_w(l) = -e^{-\frac{\pi}{q} \varphi_w(l)}, \quad t_w(s) = -e^{-\frac{\pi}{q} \varphi_w(s)}, \quad t_E = -e^{-\frac{\pi}{q} \varphi_w(E)},$$

$$\begin{aligned}\eta_d(l) &= -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_d(l)}, \quad t_d(s) = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_d(s)}, \quad t_P = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_d(P)}, \\ \eta_u(l) &= e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_u(l)}, \quad t_u(s) = e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_u(s)}, \quad t_J = e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_u(J)}, \\ t_Q &= e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_u(Q)}, \quad t_1(s) = -e^{-\frac{\pi}{q}\varphi_{1D}(s)}.\end{aligned}$$

$\varphi_w(E)$, $\varphi_d(P)$, $\varphi_u(J)$, $\varphi_u(Q)$ 分别为 E, P, J, Q 点的势函数值。

在边界积分方程 (18)–(21) 式中, 右边含有的未知函数是边界势函数和边界流速, 左边含有的未知函数是边界流速和自由面流速方向。由于是沿流线积分, 当固壁边界的几何形状给定后 $\beta(l)$ 是已知函数, 因此本文的边界积分方程对边界的适应能力与有限元法、边界元法相同。

在 xEy 坐标系中, 自由表面的角度为 $\theta - \alpha$, 故自由面的位置由

$$\left. \begin{aligned}x_u(l) &= x_J + \int_0^l \cos[\theta_u(s) - \alpha] ds, \\ y_u(l) &= y_J + \int_0^l \sin[\theta_u(s) - \alpha] ds,\end{aligned} \right\} \quad l \in \Gamma_4, \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}x_d(l) &= \int_{l_E}^l \cos[\theta_d(s) - \alpha] ds, \\ y_d(l) &= \int_{l_E}^l \sin[\theta_d(s) - \alpha] ds\end{aligned} \right\} \quad l \in \Gamma_3, \quad (23)$$

确定。

边界势函数由

$$\varphi_w(l) = \int_0^l u_w(s) ds \quad l \in \Gamma_2, \quad (24)$$

$$\varphi_d(l) = \varphi_d(E) + \int_{l_E}^l u_d(s) ds \quad l \in \Gamma_3, \quad (25)$$

$$\varphi_u(l) = \varphi_u(J) + \int_0^l u_u(s) ds \quad l \in \Gamma_4, \quad (26)$$

$$\varphi_{1D} = - \int_0^l u_{1D}(s) ds \quad l \in \Gamma_1 \quad (27)$$

确定。

2. 求解边界积分方程的迭代方法

第一步, 初始势函数的计算

给定来流断面 IJ 的位置, 设该断面的流速均匀分布, 势函数相等。根据需要取定上下两自由面的流线长度, 初设自由面的位置, 并在边界上布置节点(在以后的计算中节点间的弧长 Δs_i 不变)。假设固壁上的流速 $u_{1D}^0(s)$, $u_w^0(s)$, 并计算势函数 $\varphi_{1D}^0(s)$, $\varphi_w^0(s)$ 。由伯努利方程计算自由面上各节点的速度, 并计算相应的势函数 $\varphi_d^0(s)$, $\varphi_u^0(s)$ (上标 n 表示迭代次数)。

第二步, 曲线固壁流速及势函数的计算

把初始值代入 (18) 式得曲线段 DE 上各节点的速度 $u'_w(s)$, 由 (24) 式计算势函数 $\varphi'_w(s)$ 。

第三步, 自由面 EP 位置及势函数的计算

把 $u'_w(s)$, $\varphi'_w(s)$, $u_d^0(s)$, $\varphi_d^0(s)$, $u_u^0(s)$, $\varphi_u^0(s)$ 代入 (19) 式得 EP 各节点的速度方向 $\theta_d(s)$, 由 (23) 式计算 EP 新的位置, 由 Bernoulli 方程计算相应速度 $u'_d(s)$ 。由 (25) 式计算势函数

$\varphi'_d(s)$.

第四步, ID 段流速及势函数的计算

由 (21) 式计算 ID 各节点的流速 $u'_{ID}(s)$, 由 (27) 式计算势函数 $\varphi'_{ID}(s)$.

第五步, 自由面 JQ 位置及势函数的计算

与第三步相同, 用 (20), (22) 式和 Bernoulli 方程以及 (26) 式计算 JQ 新的位置、速度 $u'_u(s)$ 和势函数 $\varphi'_u(s)$.

重复第二到第五步的计算, 直至满足所需精度

$$\left| \frac{\varphi_d^n(P) - \varphi_d^{n-1}(P)}{\varphi_d^n(P)} \right| < \varepsilon_1 \quad \left| \frac{\varphi_u^n(Q) - \varphi_u^{n-1}(Q)}{\varphi_u^n(Q)} \right| < \varepsilon_2,$$

式中 $\varphi_d^n(P)$, $\varphi_u^n(Q)$ 为第 n 次迭代后 P 点和 Q 点的势函数值.

3. 算例

我们计算了文献 [13] 中圆弧边界的挑射水流. 自由面沿流线等距布置节点, 圆弧段 E 点附近流速变化较大, 节点局部加密 (图 6). 图 7 是把自由面流线长度取得使 P, Q 点大致位于挑射水舌最高点, 迭代 4 次即可使精度达到 0.1% 以下.

为了说明本文方法的收敛性, 图 8 中我们给出了另一组计算结果和各次迭代的自由面位置, 迭代 7 次就得到了收敛解. 从图中可以看出, 由于初设自由面有一定偏离, 最初几次迭代结果有很大的变化. 甚至出现同一次迭代上、下自由面相交和自由面自身相交的情况, 但由于收敛性得到了保证, 并且也获得了很快的收速度. 该例说明本文方法所能求解的流场范围不受限制, 迭代方法也很简便.

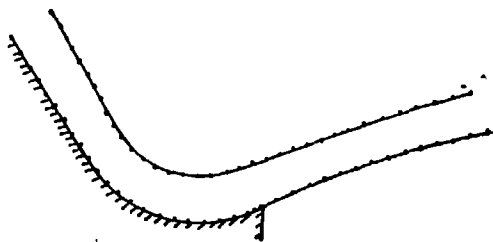


图 6 节点布置示意图

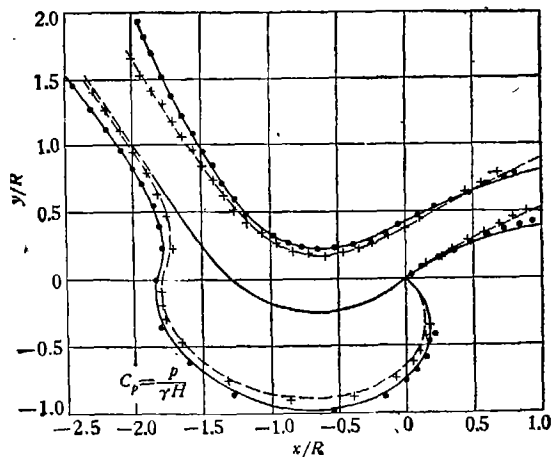


图 7 数值计算结果
($\alpha = 56^\circ 10'$, $\beta_1 = 95^\circ$)

实验值	计算值	$\frac{H}{R}$	$\frac{q}{\sqrt{2gHR}}$
.	—	3.000	0.333
+	- - -	9.000	0.333

实际工程中, 水舌将受掺气和扩散的影响, 可以在本文基础上对空中掺气作进一步的研究.

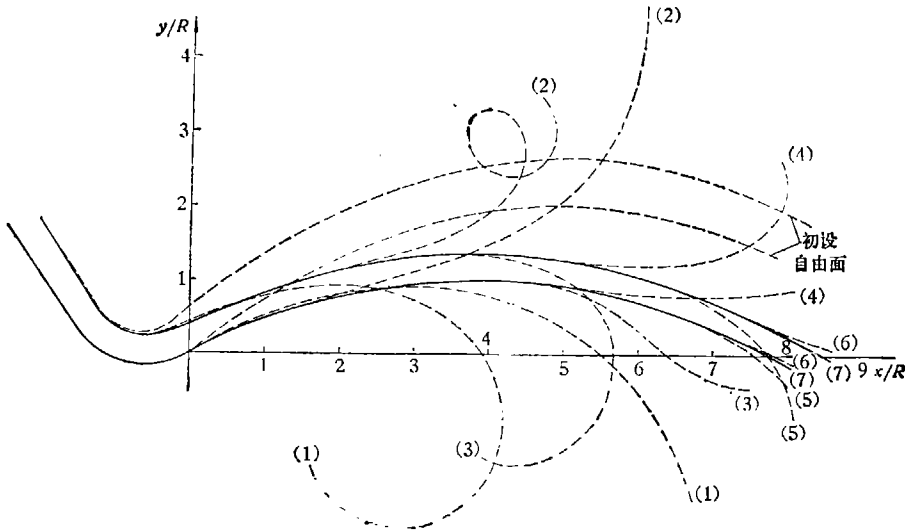


图 8 自由面收敛情况

$$(H/R = 5.113, \frac{q}{\sqrt{2gHR}} = 0.333, \alpha = 56^\circ 10', \beta_1 = 95^\circ)$$

四、收敛性及误差特性

由于边界条件的待定和非线性性质, 求解自由面重力流不可避免地需要作迭代运算. 在上一节中我们采用了以流线弧长 s 为自变量, 边界势函数为未知待求函数的迭代方法, 在流量已知的条件下, 我们来证明上节迭代过程的收敛性.

1. 收敛性的证明

不失一般性, 把势函数的坐标原点选在 IJ 断面, 即令 $\varphi_I = \varphi_J = 0$. 弧长的原点也分别选在 I 点和 J 点. 记 IP 流线的速度和势函数为 $u_1(s)$, $\varphi_1(s)$, JQ 流线的为 $u_2(s)$, $\varphi_2(s)$.

由上节公式可以看出, 边界流速可表示为

$$u_1(s) = u_1(\varphi_1(s), \varphi_2(s)), \quad (28)$$

$$u_2(s) = u_2(\varphi_1(s), \varphi_2(s)). \quad (29)$$

边界势函数可写成

$$\varphi_1(l) = \int_0^l u_1(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) ds \quad (0 \leq l \leq L_P), \quad (30)$$

$$\varphi_2(l) = \int_0^l u_2(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) ds \quad (0 \leq l \leq L_Q). \quad (31)$$

这里的 L_P 是 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 流线长度之和, 并设 $L_Q = L_P = L$.

把 (24)–(27) 式写成向量形式可得

$$\varphi(l) = \int_0^l u(\varphi(s)) ds \quad (0 \leq l \leq L). \quad (32)$$

式中

$$\varphi(l) = \{\varphi_1(l), \varphi_2(l)\}, u(\varphi(s)) = \{u_1(\varphi(s)), u_2(\varphi(s))\}$$

定义向量的长度

$$|\varphi(l)| = |\varphi_1(l)| + |\varphi_2(l)|. \quad (33)$$

设 u 满足 Lipschitz 条件

$$|u(\varphi) - u(\varphi')| < M |\varphi - \varphi'| \quad (34)$$

$M > 0$, 为一正常数.

当 $\varphi(l)$, $u(l)$ 为联合连续函数时, 通过范数

$$\|\varphi\| = \max_{0 \leq l \leq L} e^{-Ml} |\varphi(l)| \quad (35)$$

定义了一个赋范空间 C_L .

积分算子 A

$$A\varphi(l) = \int_0^l u(\varphi(s)) ds, \quad (36)$$

把 C_L 映射到 C_L 上.

设 $\varphi(l)$ 是积分方程的解, 上节的迭代过程可写成

$$\varphi^n(l) = A\varphi^{n-1}(l) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (37)$$

所以

$$\begin{aligned} \|\varphi^n - \varphi\| &= \|A\varphi^{n-1} - A\varphi\| = \max_{0 \leq l \leq L} e^{-Ml} \left| \int_0^l \{u(\varphi^{n-1}) - u(\varphi)\} ds \right| \\ &\leq M \cdot \max_{0 \leq l \leq L} \int_0^l e^{M(s-l)} e^{-Ms} |\varphi^{n-1} - \varphi| ds \leq (1 - e^{-ML}) \|\varphi^{n-1} - \varphi\|. \end{aligned}$$

记 $\rho = 1 - e^{-ML}$, 则有

$$\|\varphi^n - \varphi\| \leq \rho \|\varphi^{n-1} - \varphi\| \quad (38)$$

由 (38) 式可推得

$$\|\varphi^n - \varphi\| \leq \rho^n \|\varphi^0 - \varphi\|.$$

由于 $0 < \rho < 1$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n - \varphi\| = 0, \quad (39)$$

由范数意义下的收敛还可推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi^n - \varphi| = 0, \quad (40)$$

收敛性得以证明.

2. 误差估计

设第 n 次迭代的误差为 $h_n(l)$, 该误差包含了计算机的舍入误差和数值积分公式余项所产生的误差. 虽然 $h_n(l)$ 是具有随机性的未知元素, 但我们仍有一个估计

$$\|h_n(l)\| < \delta \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (41)$$

由此可写出

$$\varphi^n(l) = A\varphi^{n-1}(l) + h_n(l), \quad (42)$$

所以

$$\|\varphi^n - \varphi\| \leq \rho \|\varphi^{n-1} - \varphi\| + \delta. \quad (43)$$

由 (43) 式可推得误差估计式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n - \varphi\| \leq \frac{\delta}{1 - \rho} = e^{ML} \delta. \quad (44)$$

五、闸孔出流

平底明渠闸孔出流, 是上下游水面线及流量均未知的问题, 需水面线和流量同时迭代求解。

1. 边界积分方程

如图 9 所示, 设总能头为 H_0 , 闸门几何形状, 开度 e 已知。若流量为 q , 由 (7) 式将复势平面的带形区域变换到 t 平面的上半平面 (图 10)。设上游水面角度为 θ_1 , 闸门角度为 θ_2 ,

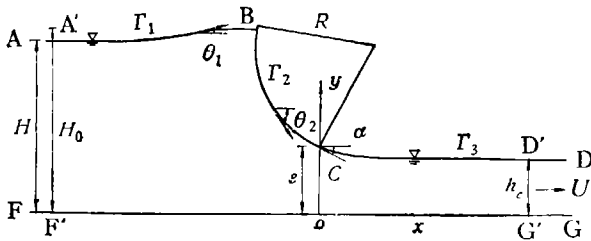


图 9 闸孔出流

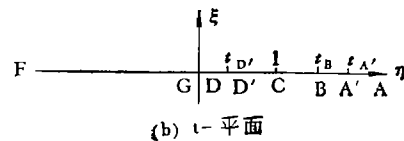
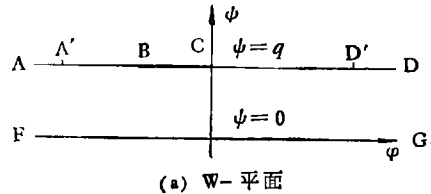


图 10

由此得 t 平面实轴上的如下边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \eta < 0 \quad \text{Im } Q^+(\eta) &= 0, \\ 0 < \eta < t_B \quad RQ^+(\eta) &= G_3(\eta) = \ln \frac{u_3(\eta)}{U}, \\ 1 < \eta < t_B \quad \text{Im } Q^+(\eta) &= -\theta_2(\eta), \\ t_B < \eta \quad \text{Im } Q^+(\eta) &= -\theta_1(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

式中 $u_3(\eta) = \sqrt{2g[H_0 - y(\eta)]}$ 为自由表面 CD 的流速。

我们只计算闸门上下游有限距离内的流场。设 $A'F'$, $D'G'$ 为流速均匀分布的断面, 并且用 Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 分别表示 $A'B$, BC , CD' 。把边界条件代入 (3) 式, 并且将沿 t 平面整个正实轴的积分用 $t_{D'}$ 到 $t_{A'}$ 的积分代替得

$$\begin{aligned} Q(t) = \frac{\sqrt{t(t-1)}}{\pi} & \left[\int_{t_{D'}}^{t_{A'}} \frac{G_3(\eta)}{\sqrt{\eta(1-\eta)(\eta-t)}} d\eta + \int_1^{t_B} \frac{\theta_2(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-t)}} d\eta \right. \\ & \left. + \int_{t_B}^{t_{A'}} \frac{\theta_1(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-t)}} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

与挑射水流的推导相同, 在取边界上的主值后, 再利用变数变换回到物理平面上, 可得物理平面上的边界积分方程如下:

$$\begin{aligned} G_1(s) = \ln \frac{u_1(s)}{U} = \frac{\sqrt{s[s-1]}}{q} & \left\{ - \int_{\Gamma_3} \frac{G_3(l)\eta(l)u_3(l)}{\sqrt{\eta(l)[1-\eta(l)][\eta(l)-s]}} dl \right. \\ & - \int_{\Gamma_2} \frac{\theta_2(l)\eta(l)u_2(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1][\eta(l)-s]}} dl - \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\theta_1(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1]}} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\theta_1(s)}{\sqrt{t(s)[t(s)-1]}} \left\{ \frac{\eta(l)u_1(l)}{\eta(l)-t(s)} dl \right\} - \frac{\theta_1(s)}{\pi} \ln \frac{t_{A'}-t(s)}{t(s)-t_B} \quad s \in \Gamma_1, \quad (47)$$

$$G_2(s) = \ln \frac{u_2(s)}{U} = \frac{\sqrt{t(s)[t(s)-1]}}{q} \left\{ - \int_{r_1} \frac{G_3(l)\eta(l)u_3(l)}{\sqrt{\eta(l)[1-\eta(l)][\eta(l)-t(s)]}} dl \right. \\ \left. - \int_{r_1} \left[\frac{\theta_2(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1]}} - \frac{\theta_2(s)}{\sqrt{t(s)[t(s)-1]}} \right] \frac{\eta(l)u_2(l)}{\eta(l)-t(s)} dl \right. \\ \left. - \int_{r_1} \frac{\theta_1(l)\eta(l)u_1(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1][\eta(l)-t(s)]}} dl \right\} - \frac{\theta_2(s)}{\pi} \ln \frac{t_B-t(s)}{t(s)-1} \quad s \in \Gamma_2, \quad (48)$$

$$\theta_3(s) = \frac{\sqrt{t(s)[1-t(s)]}}{q} \left\{ \int_{r_1} \left[\frac{G_3(l)}{\sqrt{\eta(l)[1-\eta(l)]}} - \frac{G_3(s)}{\sqrt{t(s)[1-t(s)]}} \right] \frac{\eta(l)u_3(l)}{\eta(l)-t(s)} dl \right. \\ \left. + \int_{r_1} \frac{\theta_2(l)\eta(l)u_2(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1][\eta(l)-t(s)]}} dl + \int_{r_1} \frac{\theta_1(l)\eta(l)u_1(l)}{\sqrt{\eta(l)[\eta(l)-1][\eta(l)-t(s)]}} dl \right\} \\ + \frac{G_3(s)}{\pi} \ln \frac{1-t(s)}{t(s)-t_{D'}} \quad s \in \Gamma_3. \quad (49)$$

式中

$$\eta(l) = e^{-\frac{\pi}{q} \varphi(l)}, \quad t(s) = e^{-\frac{\pi}{q} \varphi(s)}, \quad t_{A'} = e^{-\frac{\pi}{q} \varphi(A')}, \\ t_B = e^{-\frac{\pi}{q} \varphi(B)}, \quad t_{D'} = e^{-\frac{\pi}{q} \varphi(D')}.$$

$G_1(s)$, $G_2(s)$ 是 Γ_1 , Γ_2 上的对数流速, $\theta_3(s)$ 是 Γ_3 上的速度方向。

在能头 H_0 及开度 e 给定的情况, 我们在前面的迭代方法上再补充一个流量的迭代公式, 然后采用水面线和流量的同步迭代法求解该问题。

2. 给定流量的迭代方法

当流量给定后, 由 (47) 式计算上游水面的速度 $u_1(s)$, 由压力为零的条件

$$p_1(s) = H_0 - \frac{u_1^2(s)}{2g} \quad (50)$$

计算相应的水深, 然后用样条插值法计算上游水面各节点的切线方向 $\theta_1(s)$ 。其它步骤与求解挑射水流相同。

3. 流量的迭代公式

在任给一流量的情况下, 经计算表明, 用前面的迭代方法总能求得一个收敛解。但这个解不满足相容性条件, 即算出的下游水面线 D' 点处的水深 h_c 与该点流速的乘积并不等于所给流量, 且 q 与 h_c 之间呈图 11 曲线 I 的关系。要使相容性得到满足, 还需补充一个方程。

由 Bernoulli 方程

$$H_0 = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2}$$

有

$$q = h_c \sqrt{2g(H_0 - h_c)}, \quad (51)$$

q 与 h_c 的关系式 (51) 在图 11 中呈曲线 II 的形状。显然, 这两条曲线的交点就是满足相容性

$\dots, (h_c^n, q^n)$, 直至满足精度

$$\left| \frac{h_c^n - h_c^{n-1}}{h_c^n} \right| < \varepsilon_3, \quad \left| \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n} \right| < \varepsilon_4.$$

计算表明, 自由面收敛速度比流量的收敛速度快, 故用流量作为精度标准。

5. 算例

本文对铅直平板和不同开度, 不同 α , 不同半径的弧形闸门进行了大量计算。平板闸门流量系数绘于图 12 中, 图 13 是弧形闸门的典型计算结果。初设上、下游自由面分别为过 B、C 点平行于渠底的直线。在 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 上布置了 122 个节点, 流量的控制精度为 $1/10000$, 一般只需迭代 4—7 次, 在内存 4 兆, 100×10^4 次/s 的计算机上计算占用 CPU 不超过 90 s。由此可见, 本文方法有很快的收敛速度, 计算工作量也很小。

六、与有限元法、边界元法的比较

本文是求解边界积分方程, 未知量在流场边界上, 求解未知量比有限元法少得多。本文的边界积分方程与边界元法的边界积分的区别在于, 本文边界积分方程具有半解析的性质, 当部分边界是直线段时, 速度方向是常数, 可先在 t 平面上积成解析形式, 然后再化为流场边界的边界积分方程。当适当选取坐标系时, 有些边界段的积分在积分方程中不出现(例如图 5 的 ID 段, 图 9 的 FG 段)。对于平底闸孔出流, 只需迭代 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 上的未知量, 其它段的未知量可在迭代完毕后用边界积分一次求出, 因此迭代未知量明显减少。

由于本文方法利用了柯西反演的方法, 将固壁速度和自由面速度方向直接表示出来, 在节点间数值积分后, 只需直接将其相加即可, 因而省去了一个解代数方程的步骤, 这就大大减少了运算量。

本文边界积分方程中含有柯西型积分, 在取边界上的主值后, 方程中有形如

$$H(t, t_0) = \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \quad (t_1 \leq t, t_0 \leq t_2) \quad (53)$$

的被积函数。事实上我们有如下命题成立(证明从略):

假设 $h(t)$ 是实变元 t 的函数, $t_1 < t < t_2$, 它具有连续的一阶导数 $h'(t)$, 于是二元函数 $H(t, t_0)$ 是连续的。

因

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{u(s)} \frac{dq}{dt} \frac{dh}{ds},$$

由 (7) 式可知 $\frac{dq}{dt}$ 是连续函数, 所以当 $\frac{dh}{ds}$ 连续时, 被积函数即为连续的。当 $h = \frac{G(s)}{X^+(s)}$ 时

($X^+(s)$ 是诸公式中含根号的分母), $\frac{dh}{ds}$ 显然是连续的。当 $h = \frac{\theta(s)}{X^+(s)}$ 时, 只需 $\frac{d\theta(s)}{ds}$ 连续即可。 $\frac{d\theta(s)}{ds}$ 是流线曲率, 实际固壁边界的曲率往往是分段连续的, 因此只需把线积分分成若干段, 在各段内被积函数就是连续的。这样, 本文得到的边界积分方程是非奇异的。

七、结 论

1. 本文在求解 Riemann-Hilbert 边值问题的理论基础上通过变数变换直接得到了物理平

面上的边界积分方程,克服了固壁边界未知待求的困难.本文的边界积分方程和数值方法解决了复杂固壁边界条件下用解析函数理论难以求解的困难.

2. 本文的边界积分方程具有半解析的性质,数值积分只需在曲线边界和自由面上进行.

3. 由于利用反演的方法,将待求未知量用积分直接表示,省去了解代数方程的步骤.

4. 本文的边界积分方程是非奇异的.

5. 以流线长度为自变量,边界势函数为未知函数迭代求解,迭代过程的收敛性好,对初始值要求不高.

6. 理论研究和计算表明本文方法与现有方法相比有明显的优越性.

参 考 文 献

- [1] Lauck, A., *ZAMM*, 5(1925).
- [2] Von Karman, T., *Bull. Math. Soc.*, 46(1940), 615—683.
- [3] Woods, L. C., *The Theory of Subsonic Plane Flow*, Cambridge Univ. Press, England, 1961, 227—240.
- [4] Watters, G. Z. and Street, R. L., *ASCE.*, 90(1964), 4: 107—140.
- [5] Larock, B. E., *J. Fluid Mech.*, 41(1970), 851—864.
- [6] Moayeri, M. S., *ASCE.*, 99(1973), 12: 2217—2231.
- [7] Diersch, H.-J., et al., *ASCE.*, 103(1977), 3: 213—232.
- [8] Yeung, R. W., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1982, 14: 395—442.
- [9] Мухелишвили, Н. И., 数学弹性力学的几个基本问题,科学出版社, 1958.
- [10] Мухелишвили, Н. И., 奇异积分方程,上海科学技术出版社, 1966.
- [11] Tio-Chun Chen, and Yun-Shen You, *ASCE.*, 91(1965), 2: 51—63.
- [12] Орлов, В. Т., *Известия Внми*, 87(1968).
- [13] Lenau, C. W., *ASCE.*, 95(1969), 2: 633—648.