# Ginzburg-Landau 旋涡与调和映射的自相似解*

简怀玉
(清华大学数学科学系,北京 100084)

王友德
(中国科学院数学研究所,北京 100080)

**摘要** 得到了带 pinning 效应的 Ginzburg-Landau 方程组的 $H^1$-紧性,证明了其二维情况的旋涡被 pinning 函数的最小点所吸引,构造了调和映射发展方程的自相似解.

**关键词** 旋涡 Ginzburg-Landau 方程 调和映射 椭圆估计

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 是一光滑、有界、单连通区域. 考虑关于函数 $V_\varepsilon=(V_\varepsilon^1,\cdots,V_\varepsilon^m):\Omega\to\mathbb{R}^m$ 的边值问题

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(A(x)\nabla V)=\dfrac{B(x)V}{\varepsilon^2}(1-|V|^2)+P(x)V, & x\in\Omega,\\ V(x)=g(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{0.1}$$

其中的偏微分方程是模拟非均匀超导材料和具有变厚度的三维超导薄膜的共同模型的一个简单情形. 对于非均匀超导体,超导电子密度函数是一个光滑正函数,$a=a(x)$. 该模型的稳态情形是由 Likharev[1]提出的,用下列方程刻画:

$$-\Delta u=\frac{u}{\varepsilon^2}(a(x)-|u|^2).\tag{0.2}$$

对于与时间有关的更复杂的方程,参见文献[2]. 令 $V(x)=u(x)/\sqrt{a}(x)$, 则方程(0.2)变为形如(0.1)的方程,此时系数为

$$A(x)=a(x),\ B(x)=a^2(x),\ P(x)=\sqrt{a(x)}\Delta\sqrt{a(x)}.$$

还有一个模型也归结于问题(0.1),这就是下列方程:

$$-\frac{1}{a(x)}\operatorname{div}(a(x)\nabla u)=\frac{u}{\varepsilon^2}(1-|u|^2).\tag{0.3}$$

这个方程用于描述具有变厚度的三维超导薄膜[3]. 显然方程(0.3)是方程(0.1)的特殊情形.

本文研究当 $\varepsilon\to0$ 时问题(0.1)解的渐近性态. 在 $m=2$, $A=B\equiv1$ 和 $P\equiv0$ 的情形,这个问题在文献[4]中得到了充分的研究,其主要结果说明解的旋涡,即解的零点集,收敛于重整能量泛函(参见文献[4],p.21)的临界点. 但对方程(0.2)和(0.3)或(0.1),情况会完全不一样. 文献[2,3]的形式分析和计算结果表明:方程(0.2)或(0.3)的旋涡是被函数 $a(x)$ 的最小点所吸引. 本文的目的是严格证明这一预测.

对于维数 $m\geqslant2$ 的情况,本文证明:问题(0.1)收敛于调和热流的自相似解. 因此,我们给

1999-11-15 收稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号:19701018)

出了自相似解的一种构造方法. 自相似解的存在性是调和映射的一个重要问题[5],直到最近才有些初步的结果[6,7].

应该指出:文献[8~10]研究了与方程(0.2)或(0.3)有关的泛函最小元的收敛性,他们的方法取决于文献[4],而本文的方法不同于文献[4],似乎更简洁. 本文方法的关键是应用 Pohozaev 恒等式控制能量,利用椭圆估计研究旋涡的渐近行为.

注意到在 Ye 文1)中,函数 $a(x)$ 对二维 Emden-Fowler 方程

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla u)=\frac{a(x)}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^u$$

的渐近行为($\varepsilon\to 0$)也起着关键的作用. Γ-收敛和 Ginzburg-Landau 方程组的关系见文献[11].

## 1 主要结果

为简单起见,只考虑 $A(x)$ 有唯一最小点的情形. 设

($h_1$) $\Omega$ 关于某点 $b\in\Omega$ 为星形区域;

($h_2$) $A\in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $B,P\in C^1(\bar{\Omega})$ $(\alpha>0)$, $A(x)>0$ 和 $B(x)>0,\forall x\in\bar{\Omega}$;

($h_3$) $\nabla A(x)\cdot(x-b)+(m-2)A(x)>0$ 和 $\nabla B(x)\cdot(x-b)+mB(x)>0$, $\forall x\neq b$, $x\in\bar{\Omega}$;

($h_4$) $g\in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $|g(x)|\equiv 1$.

虽然假设($h_3$)不很令人满意,但它是合理的,并且容易看出,当 $\Omega$ 较小时,它是自然满足的.

本文的主要结果叙述如下:

**定理 1.1** 设维数 $m\geqslant 2$,假设($h_1$)~($h_4$)满足,令 $V_\varepsilon$ 是问题(0.1)的古典解($\varepsilon>0$),那么存在正数 $\varepsilon_0$,使得函数集 $\{V_\varepsilon:\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\}$ 在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus\{b\})$ 中有界. 而且,任意给定序列 $\varepsilon_n\to 0^+$,都存在子列(仍记为本身)使得 $V_{\varepsilon_n}\to V$ 在 $H^1_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus\{b\})$ 中弱收敛, $|V(x)|=1$ a.e. 于 $\Omega$ 中, $V=g$ 在 $\partial\Omega$ 上,并且 $V$ 在 $\Omega\setminus\{b\}$ 中满足下列方程:

$$-\operatorname{div}(A\nabla V)=AV|\nabla V|^2.$$

特别,取 $A=\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4}}$,那么 $V$ 就是调和热流的自相似解[5,6],即 $|V|=1$ a.e. 于 $\Omega$ 且 $V$ 满足

$$\frac{1}{2}x\cdot\nabla V-\Delta V=V|\nabla V|^2. \tag{1.1}$$

**推论 1.1** 如果 $\Omega$ 关于原点是星形的,那么调和热流自相似解方程(1.1)在 $\Omega\setminus\{0\}$ 中存在弱解,它在 $\partial\Omega$ 上满足预定的 Dirichlet 边值条件.

**定理 1.2** 设维数 $m=2$,假设($h_1$)~($h_4$)满足,那么,对任意 $\delta>0$,存在 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\delta)>0$,使得 $\{x\in\bar{\Omega}:V_\varepsilon(x)=0\}\subset B_\delta(b)$ 对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ 成立,并且估计式

$$1-C\varepsilon\leqslant|V_\varepsilon(x)|\leqslant 1+C\varepsilon$$

1) Ye D, Zhou F. A generalized two dimensional Emden-Fowler equation with exponetial nonlinearity. In: Long Y, Zhang K C, eds. Proceeding of the Second International Conference on Nonlinear Analysis. Tianjing, 14~19 June, 1999. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2000 (待发表)

对所有 $x\in\bar{\Omega}\setminus B_\delta(b)$，$\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$和某个 $C>0$ 成立.

本文自始至终使用同一个字母 $C$ 表示与 $\varepsilon$ 无关但可与 $\Omega,A,B,P,g$ 等已知量有关的常数.

## 2　定理 1.1 的证明

**引理 2.1**　假设$(h_2)$和$(h_4)$满足，$V_\varepsilon$ 是方程(0.1)的解($\varepsilon>0$)，那么存在正常数 $\delta_1$(只与 $A$ 和 $P$ 有关)，使得

$$|V_\varepsilon(x)|^2\leqslant 1+\varepsilon, \tag{2.1}$$

和

$$|\nabla V_\varepsilon(x)|\leqslant\frac{C}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

对所有 $x\in\bar{\Omega}$ 和 $\varepsilon\in(0,\delta_1)$成立.

**证**　考虑 $W=|V_\varepsilon|^2$ 所满足的方程，对其使用极大值原理和椭圆估计容易得证，故略去细节.

**引理 2.2**　设 $V_\varepsilon$ 是方程(0.1)的解，$(h_1)\sim(h_4)$满足，那么，对所有 $\varepsilon\in(0,\delta_1)$，均有

$$\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial N}\right|^2+\int_\Omega\left[(\nabla A\cdot(x-b)+(m-2)A)|\nabla V_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}(1-|V_\varepsilon|^2)^2\right]\mathrm{d}x\leqslant C,$$

其中 $N$ 是$\Omega$ 的单位外法向量.

**证**　不难看出$(h_1)\sim(h_3)$保证存在常数 $\alpha>0$，使得

$$\operatorname{div}(B(x)(x-b))\geqslant\alpha,\quad\forall x\in\bar{\Omega} \tag{2.3}$$

和

$$(x-b)\cdot N\geqslant\alpha,\ \forall x\in\partial\Omega. \tag{2.4}$$

用

$$\nabla V_\varepsilon\cdot(x-b)=\left(\frac{\partial V_\varepsilon^1}{\partial x_k}(x_k-b_k),\cdots,\frac{\partial V_\varepsilon^m}{\partial x_k}(x_k-b_k)\right)$$

乘问题(0.1)中的方程，并在 $\Omega$ 上积分所得等式，略去下标 $\varepsilon$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega(1-|V|^2)^2\operatorname{div}(B(x)(x-b))\\=&-\int_{\partial\Omega}A\frac{\partial V}{\partial N}(\nabla V\cdot(x-b))+\int_\Omega A\nabla V\nabla(\nabla V\cdot(x-b))\\&-\int_\Omega PV\nabla V\cdot(x-b)=I_1+I_2+I_3,\end{aligned} \tag{2.5}$$

选 $\Omega$ 的单位切向量 $T$，使得$\{N,T\}$在$\partial\Omega$ 上正交，利用(2.3)和(2.4)式及 Young 不等式，可知 $I_1$ 的被积函数满足

$$A\frac{\partial V}{\partial N}\left(\frac{\partial V}{\partial N}N+\frac{\partial V}{\partial T}T\right)(x-b)\geqslant A\left|\frac{\partial V}{\partial N}\right|^2\left(N\cdot(x-b)-\frac{\alpha}{8}\right)-C,$$

而 $I_2$ 的被积函数可写为

$$\operatorname{div}\left(\frac{A}{2}|\nabla V|^2(x-b)\right)-\frac{|\nabla V|^2}{2}[(x-b)\cdot\nabla A+(m-2)A].$$

所以由(2.3)~(2.5)式推出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big[[\nabla A\cdot(x-b)+(m-2)A]|\nabla V|^2+\frac{\alpha}{4\varepsilon^2}(1-|V|^2)^2\Big]\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{\partial\Omega}A\Big[\Big(\frac{|\nabla V|^2}{2}-\Big|\frac{\partial V}{\partial N}\Big|^2\Big)N\cdot(x-b)+\frac{\alpha}{8}\Big|\frac{\partial V}{\partial N}\Big|^2\Big]\mathrm{d}s+I_3+C\\
&=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}A\Big(\Big|\frac{\partial V}{\partial T}\Big|^2-\Big|\frac{\partial V}{\partial N}\Big|^2\Big)N\cdot(x-b)+\frac{\alpha}{8}\int_{\partial\Omega}A\Big|\frac{\partial V}{\partial N}\Big|^2+I_3+C\\
&\leqslant C+I_3-\frac{3\alpha}{8}\int_{\partial\Omega}A\Big|\frac{\partial V}{\partial N}\Big|^2.
\end{aligned}\tag{2.6}$$

但由(2.1)式,有

$$\begin{aligned}
I_3&=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}P\nabla|V|^2\cdot(x-b)\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}P|V|^2N\cdot(x-b)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|V|^2\mathrm{div}((x-b)P)\leqslant C.
\end{aligned}$$

将此式代入(2.6)式,即证得引理.

**定理 1.1 的证** 对任意 $r\in(0,\mathrm{dist}(b,\partial\Omega))$,由($h_2$)、($h_3$)和引理 2.2,可找到常数 $\lambda=\lambda(r)>0$, 使得

$$\lambda(r)\int_{\Omega\setminus B_r(b)}|\nabla V_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|V_\varepsilon|^2)^2\leqslant C,\quad\forall\varepsilon\in(0,\delta_1).\tag{2.7}$$

这就证明了有界性. 应用(2.7)式和对角线法,不难证明 $V_\varepsilon$ 的紧性及其弱极限所满足的方程,故略去其细节.

# 3 定理 1.2 的证明

注意到 $|\nabla V_\varepsilon|^2=\Big|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial N}\Big|^2+\Big|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial T}\Big|^2=\Big|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial N}\Big|^2+\Big|\frac{\partial g}{\partial T}\Big|^2$ 在$\partial\Omega$ 上成立,因此对任意的 $\delta\in(0,\mathrm{dist}(b,\partial\Omega))$,由引理 2.2 和($h_3$)导出

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla V_\varepsilon|^2+\int_{\Omega\setminus B_{\frac{\delta}{4}}(b)}|\nabla V_\varepsilon|^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega}(1-|V_\varepsilon|^2)^2\leqslant C(\delta),\ \forall\varepsilon\in(0,\delta_1).\tag{3.1}$$

**引理 3.1** 对任意 $\delta\in(0,\mathrm{dist}(b,\partial\Omega))$,存在常数 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta)>0$,使得

$$\Big\{x\in\bar{\Omega}:\ |V_\varepsilon(x)|<\frac{3}{4}\Big\}\subset B_\delta(b),\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

**证** 采用反证法. 若引理不真,则存在 $\delta_2\in(0,\mathrm{dist}(b,\partial\Omega))$,序列 $\varepsilon_k\searrow0$, $\varepsilon_k\in(0,\delta_1)$和 $\{x_k\}\subset\bar{\Omega}\setminus B_{\delta_2}(b)$, 使得 $\big|V_{\varepsilon_k}(x_k)\big|<\frac{3}{4}$对所有正整数 $k$ 成立,其中 $\delta_1$ 为引理 2.2 中的常数. 而且由(2.2)式、条件 $m=2$ 和 $|V_\varepsilon|=|g|=1$ 在边界$\partial\Omega$ 上成立推出存在球 $B_{C_1\varepsilon_k}(x_k)\subset\Omega\setminus B_{\delta_2/2}(b)$ ($C_1>0$ 为某常数),满足 $\big|V_{\varepsilon_k}(x)\big|\leqslant4/5$ 对一切 $k$ 和所有 $x\in B_{C_1\varepsilon_k}(x_k)$成立. 令 $r_k=C_1\varepsilon_k$, $B_k=B_{r_k}(x_k)$和 $V_k=V_{\varepsilon_k}$, 那么有

$$\frac{1}{\varepsilon_k^2}\int_{B_k}(1-|V_k|^2)^2\geqslant C_2>0,\ \forall k,\tag{3.2}$$

其中 $C_2$ 是仅与 $C_1$ 有关的常数.

对每一个 $k$,任意 $r\in(r_k,\sqrt{r_k})$,记 $B_r=B_r(x_k)$ 和 $\Omega_r=B_r\cap\Omega$. 同引理 2.2 的证明一样,可找到常数 $C$ 和 $n$,使得对所有 $k\geqslant n$ 和所有 $r\in(r_k,\sqrt{r_k})$,均有

$$\frac{1}{4\varepsilon_k^2}\int_{\Omega_r}(1-|V_k|^2)^2\leqslant Cr\left\{1+\int_{\partial\Omega_r}\left[\frac{(1-|V_k|^2)^2}{\varepsilon_k^2}+|\nabla V_k|^2\right]\mathrm{d}s+\int_{\Omega_r}|\nabla V_k|^2\right\}. \tag{3.3}$$

显然,可将 $V_\varepsilon$ 扩充到 $G\supset\supset\Omega$ 中去,使得 $|V_\varepsilon|\equiv1$ 在 $\bar{G}\setminus\Omega$ 中成立,且有

$$\int_{G/\Omega}|\nabla V_\varepsilon|^2\leqslant C(g),\ \forall\,\varepsilon\in(0,\delta_1).$$

因 $r_k\to0$ 和 $x_k\in\Omega\setminus B_{\delta_2}(b)$,可假定 $B_{\sqrt{r_k}}(x_k)\subset G\setminus B_{\delta_2/3}(b)$, $\forall\,k\geqslant n$. 于是,由(3.1)式保证

$$\int_{B_{\sqrt{r_k}}(x_k)}|\nabla V_k|^2+\frac{1}{\varepsilon_k^2}(1-|V_k|^2)^2\leqslant C(\delta_2),\ \forall\,k\geqslant n. \tag{3.4}$$

而对每一个 $k\geqslant n$,使用(3.4)式和 Fubini 定理,可找到 $r\in(r_k,\sqrt{r_k})$,使得

$$r\int_{\partial B_r}\left\{|\nabla V_k|^2+\frac{1}{\varepsilon_k^2}(1-|V_k|^2)^2\right\}\leqslant 2|\log r_k|^{-1}C(\delta_2). \tag{3.5}$$

所以,注意到 $B_k\subset\Omega\setminus B_{\delta_2/2}(b)$,并利用(3.1)和(3.3)~(3.5)式,可得

$$\frac{1}{4\varepsilon_k^2}\int_{B_k}(1-|V_k|^2)^2\leqslant C(\delta_2)|\log r_k|^{-1},\ \forall\,k\geqslant n, \tag{3.6}$$

这与(3.2)式矛盾. 故引理 3.1 为真,从而证明了定理 1.2 的第 1 部分.

为完成定理 1.2 的证明,使用(2.1)式和引理 3.1,导出

$$(1+\varepsilon)\geqslant|V_\varepsilon(x)|^2\geqslant\frac{1}{2},\quad\forall\,x\in\bar{\Omega}\setminus B_{\delta/4}(b) \tag{3.7}$$

对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$和某个 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta)\in(0,1)$成立. 令 $R_0$ 是一个待定的正常数,固定 $r_0\in\left(0,\min\left\{\frac{\delta}{4},R_0\right\}\right)$,它将选得充分小. 对任意 $y\in\Omega\setminus B_\delta(b)$,选 $R\in\left(0,\min\left\{\frac{\delta}{8},\frac{R_0-r_0}{2}\right\}\right)$,满足 $B_{2R+r_0}(y)\subset\Omega\setminus B_{\delta/2}(b)$. 同文献[12]一样,将 $V_\varepsilon(x)$在 $B_{2R+r_0}(y)$中写为 $V_\varepsilon(x)=\rho_\varepsilon(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_\varepsilon(x)}$,结果方程(0.1)变为

$$\mathrm{div}(A\rho_\varepsilon^2\nabla\psi_\varepsilon)=0 \tag{3.8}$$

和

$$-\mathrm{div}(A\nabla\bar{U}_\varepsilon)+\frac{C_\varepsilon(x)}{\varepsilon^2}\bar{U}_\varepsilon=f_\varepsilon, \tag{3.9}$$

其中 $\bar{U}_\varepsilon(x)\equiv1-\rho_\varepsilon(x)$, $0<C_\varepsilon(x)\equiv(1+\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon B$ 和 $f_\varepsilon\equiv|\nabla\psi_\varepsilon|^2\rho_\varepsilon-P(x)\rho_\varepsilon$. 而且,使用(3.1)式和 Fubini 定理,可得到 $R_\varepsilon\in\left(R,R+\frac{r_0}{2}\right)$, 使得

$$\int_{\partial B_{R_\varepsilon}(y)}|\nabla V_\varepsilon|^2+\frac{(1-|V_\varepsilon|^2)^2}{\varepsilon^2}\leqslant 2r_0^{-1}C(\delta). \tag{3.10}$$

现在由(3.1)和(3.7)式可得

$$\max_{x\in\partial B_{R_\varepsilon}(y)}\left|1-|V_\varepsilon(x)|^2\right|\leqslant C(r_0^{-1},\delta)\varepsilon,$$

此式和(3.7)式一起,可导出

$$\left|1-|V_\varepsilon|\right|\leqslant C_4\varepsilon,\ \forall x\in\partial B_{R_\varepsilon}(y),\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0). \tag{3.11}$$

一方面,对方程(3.8)使用文献[13]第5章定理2.2,可知

$$\left(\int_{B_{R+\frac{r_0}{2}}(y)}|\nabla\psi_\varepsilon|^p\right)^{\frac{2}{p}}\leqslant C_5\int_{B_{2R+r_0}(y)}|\nabla\psi_\varepsilon|^2\leqslant C(\delta)C_5, \tag{3.12}$$

对某个 $p>2$, $R_0>0$, $C_5>0$ 和所有 $R<\dfrac{R_0-r_0}{2}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$成立.

另一方面,由(3.11)和(3.12)式,对方程(3.9)使用标准的椭圆估计(参看文献[14]中的定理8.16),可得

$$|\overline{U}_\varepsilon(x)|\leqslant C(\delta)\varepsilon,\quad \forall x\in B_{R_\varepsilon}(y).$$

由这个结果和(3.7)式给出

$$1-C\varepsilon\leqslant\rho_\varepsilon(x)=|V_\varepsilon(x)|\leqslant 1+C\varepsilon,\ \forall x\in B_{R_\varepsilon}(y),\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{3.13}$$

这里常数 $C$ 与 $\varepsilon$ 无关. 特别,(3.13)式对所有 $x\in B_R(y)$和 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$成立.

最后,使用覆盖论证法,不难得到定理1.2的结论.

## 参 考 文 献


1 Likharev K. Superconducting weak links. Rev Modern Phys, 1979, 51: 101 ~ 159

2 Chapman S J, Richardson G. Vortex pinning by inhomogeneities in type-II super-conductors. Phys D, 1997, 108: 397 ~ 407

3 Chapman S J, Du Q, Gunzburger M D. A model for variable thickness superconducting thin films. Z Angew Math Phys, 1996, 47: 410 ~ 431

4 Bethuel T, Brezis H, Hélein F. Ginzburg-Landau Vortices. Boston: Birkhäuser, 1994. 1 ~ 68

5 Struwe M. Geometric evolution problems. In: Hardt R, Wolf M, eds. Nonlinear Partial Differential Equations in Differential Geometry. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1996. 259 ~ 339

6 范辉军. 调和映射热流中自相似解的存在性. 中国科学, A辑, 1998, 28(11): 981 ~ 998

7 Lin F, Wang C. Harmonic and quasi-harmonic sphere. Comm Anal Geom, 1999, 7: 397 ~ 429

8 Rubinstein J. On the equilibrium position of Ginzburg Landau vortices. Z Angew Math Phys, 1995, 46: 739 ~ 751

9 Andre N, Shafir I. Asymptotic behaviour for the Ginzburg-Landau functional with weights (I). Arch Rat Mech Anal, 1998, 142: 45 ~ 98

10 丁时进, 刘祖汉. 关于一类 Ginzburg-Landau 泛函的渐近性态的注记. 数学年刊, A辑, 1998, 19(5): 621 ~ 628

11 简怀玉. 泛函 Γ-收敛和相应梯度流的关系. 中国科学, A辑, 1998, 28(10): 865 ~ 871

12 Lin F H. Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices. Commu Pure Appl Math, 1996, 49: 323 ~ 359

13 Giaquinta M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems. Princeton: Princeton Univ Press, 1983

14 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1977