中国科学 E辑: 信息科学 2008年 第38卷 第2期: 209 ~ 222
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

二次分配问题的骨架分析与算法设计

江贺[①②*], 张宪超[①], 陈国良[②], 李明楚[①]

① 大连理工大学软件学院, 大连 116621;
② 中国科技大学计算机科学与技术系, 合肥 230027
* E-mail: jianghe@dlut.edu.cn

收稿日期: 2006-10-07; 接受日期: 2007-07-16
国家自然科学基金(批准号: 60673046, 60673066)、辽宁省自然科学基金(批准号: 20051082)和大连理工大学青年教师培养基金资助项目

摘要 骨架分析是近年来NP-难解问题研究的热点, 对于衡量问题的相变、难度及算法设计具有重要意义. 骨架的理论分析及在算法设计方面的应用还处于起步阶段. 从QAP问题入手, 对QAP骨架进行了理论分析, 证明寻找QAP问题的骨架属于NP-难解问题, 不存在多项式时间的算法可以保证得到QAP问题的骨架, 为局部最优解交叉来获得近似骨架提供了合理性解释. 在此基础上, 利用偏移实例构造方法, 提出了基于偏移实例的近似骨架算法. 其基本思想是: 首先为QAP实例构造偏移实例, 其最优解恰是原QAP实例的一个全局最优解; 然后利用现有算法求得新实例的多个局部最优解, 通过对局部最优解求交得到近似骨架; 将近似骨架固定以得到规模更小的搜索空间, 最后在新空间上求解. 拓广了骨架理论研究的范围, 所提出的算法为NP-难解问题的通用算法设计提供了一种新思路.

关键词
二次匹配问题
NP-难解
骨架分析
偏移实例
元启发算法

NP-难解问题[1]在工业控制、交通调度、网络规划和超大规模集成电路等众多领域具有极其广泛的应用背景, 一直是计算机科学基础研究的核心之一. 根据计算复杂性理论[2]可知, 除非$P=NP$, 否则NP-难解问题不存在多项式时间的精确算法, 故精确算法仅适于求解小规模NP-难解问题的实例. 对于大规模实例, 人们的研究目标集中在能用较短时间得到可接受(性能上)解的启发式算法(heuristic algorithm)方面. 现有的启发式算法大致可以分为简单启发式算法和元启发式算法(meta-heuristic algorithm)两类: 前者包括贪心算法、局部搜索、禁忌搜索[3]等; 后者有蚁群算法[4,5]、遗传算法[6]、模拟退火[7]、神经网络[8]、拟人拟物[9]等.

骨架分析[10](backbone analysis)是近年来NP-难解问题研究中非常活跃的领域. 骨架是指一个NP-难解问题实例的所有全局最优解的相同部分, 对于衡量问题的难度(hardness)和相变

(phase transition)具有重要意义. Monasson等 [11]讨论了骨架对约束可满足性问题SAT(satisfiability problem)的求解难度及相变的影响. Zhang[12]分析了骨架规模对于非对称旅行商问题ATSP(asymmetric traveling salesman problem)求解难度的影响. 同时, 骨架分析已经成为当前NP-难解问题启发式算法设计的重要手段: Schneider[13]和邹鹏 [14]等利用TSP问题局部最优解交集作为近似骨架, 得到了求解TSP问题的多级规约算法, Zhang等 [15]给出了求解TSP问题的骨架导向LK算法; Zhang[16], Dubois[17]和Valnir[18]等分别给出求解SAT问题的骨架导向局部搜索; Zuo等 [19]提出了求解QAP问题的近似骨架导向的蚁群算法ABFANT(approximate backbone-guided fant).

然而, 目前骨架分析还主要停留在实验统计分析的基础上, 理论分析结果十分匮乏. 在我们的知识范围内, 尚未发现利用理论分析结果进行算法设计的成果. 目前仅有的理论分析是在TSP问题上由Kilby等 [20]证明了获取骨架属于NP-难解的. 对于更加复杂的NP-难解问题如QAP问题, 还缺乏骨架理论分析相关成果. 对于QAP问题的骨架分析, 存在以下重要问题: (1)理论上是否存在算法可以在多项式时间内得到QAP的骨架? 若存在这样的算法, 则可以直接使用骨架来进行算法设计, 而无需使用近似骨架. (2)目前普遍使用的局部最优解交集来逼近骨架的方法存在不足: 当全局最优解个数不唯一时, 骨架的规模非常小, 这样近似骨架的作用极其有限. 能否找到方法解决NP-难解问题骨架规模过小的缺陷?

本文从两个方面解决上述问题. 首先从理论上证明: 在 $P \neq NP$ 的前提下, 不存在多项式时间的算法可以获取QAP的骨架. 证明中给出了偏移QAP实例的构造方法, 对于每一个QAP实例, 均可以通过该方法得到对应的偏移QAP实例, 且新实例的最优解恰好是原QAP实例的一个全局最优解. 其次, 本文给出了求解QAP问题新的元启发式算法——基于偏移实例的近似骨架算法BI-AB(biased instance based approximate backbone). 其基本步骤 是: (1)为QAP实例构造偏移QAP实例, 其唯一的全局最优解即骨架; (2) 调用现有求解QAP问题的算法得到新QAP 实例的多个局部最优解; (3) 多个局部最优解求交得到近似骨架; (4)固定近似骨架以得到规模更小的搜索空间; (5) 调用现有算法在新搜索空间上求解. 容易看出, 利用偏移QAP实例的构造方法, 实际上解决了前面提到的由于存在多个全局最优解而导致的骨架规模小的问题. 本文以FANT算法 [21]作为从属算法, 在QAP标准实例库QAPLIB[22]上对BI-AB算法进行了测试, 实验结果表明, 对于QAPLIB中的典型实例, 新算法在解的质量上较ABFANT和随机重启FANT算法等有较为显著的提高.

本文的工作不仅拓广了 QAP 问题的研究内容, 骨架理论分析中所采用的构造偏移实例方法对于其他 NP-难解问题的骨架分析也具有较强的参考价值. 而论文中提出的先构造偏移实例, 再利用局部最优解求交来获得近似骨架的算法, 为 NP-难解问题的通用算法设计提供了一种新的思路.

1 预备知识

本节首先给出文中所用到的一些定义和记号.

定义 1 给定 n 个设备的集合 $F=\{f_1, f_2,\cdots, f_n\}$ 和 n 个位置 $L=\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}$, 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

为设备之间的流量矩阵(a_{ij} 表示设备 f_i 和 f_j 之间的流量，$a_{ij} \geqslant 0$)，记 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为位置的距离矩阵(b_{ij} 表示位置 l_i 和 l_j 之间的距离，$b_{ij} \geqslant 0$). QAP 实例(记为 $QAP(A,B)$)的可行解是指一种设备分配方法 $\pi:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$，其目标函数值记为 $g_\pi(A,B)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}$. QAP 问题的目标是寻求解 $\pi^*:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$，使得目标函数值最小，即 $g_{\pi^*}(A,B)=\min(\{g_\pi(A,B)\mid\pi\in\Pi\})$，其中 Π 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全体排列的集合.

二次分配问题QAP(quadratic assignment problem)属于经典的组合优化问题，在医院布局、键盘安排、VLSI等领域具有广泛的应用背景. Sahni等 [2]证明了该问题是NP-难解的，故精确算法仅适于求解 $n\leqslant 30$ 的小规模QAP实例，为了求解大规模实例，人们提出了多种启发式算法: 蚁群算法 [23,24]、遗传算法 [25]、模拟退火 [26]、神经网络 [27]、禁忌搜索 [28,29]、GRASP算法 [30]等.

定义 2　对于流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，记 $m_A=\max(\{a_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{1\})$，对于距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，记 $m_B=\max(\{b_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{1\})$. 定义 A 的偏移矩阵为 $\hat{A}=(a_{ij}+\xi_{ij})_{n\times n}$，其中 $\xi_{ij}=1\big/(3m_B2^{in^3+jn^2})$；定义 B 的偏移矩阵为 $\hat{B}=(b_{ij}+\delta_{ij})_{n\times n}$，其中 $\delta_{ij}=1\big/(3m_A2^{in+j})$. 本文称 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 为 $QAP(A,B)$ 的偏移 QAP 实例.

定义 3　对于 QAP 实例 $QAP(A,B)$，存在有限多个全局最优解 $\pi_1^*,\pi_2^*,\cdots,\pi_q^*$，记所有全局最优解的集合为 Π^*，其中 $q=|\Pi^*|$ 为全局最优解的个数. 记 $P(\pi)=\{(i,\pi(i))\,|1\leqslant i\leqslant n\}$，称 $P(\pi_1^*)\cap P(\pi_2^*)\cap\cdots\cap P(\pi_q^*)$ 为实例 $QAP(A,B)$ 的骨架，记为 $bone(A,B)$.

根据定义 3，一个启发式算法除非获取了骨架 $bone(A,B)$ 中的全部元素，否则不可能得全局最优解. 另一方面，若能获得骨架 $bone(A,B)$，则可以将骨架中的设备位置固定，从而有效缩小搜索空间的规模. 因此如何获取骨架 $bone(A,B)$ 成为启发式算法设计的重要课题.

Boese最早在TSP问题上观察到，局部最优解与全局最优解之间有约 80%的边重合 [31]，大量的局部最优解在全局最优解周围形成一个“大坑”(big valley)结构. 随后，研究人员又在图的划分问题 [32]、flow-shop调度问题 [33]发现了类似的性质. 由于实际运算中，全局最优解难以获得，故此很多研究人员根据局部最优解与全局最优解之间的关系，利用局部最优解的交集模拟全局最优解的交集来获得近似骨架.

定义 4　对于 QAP 实例 $QAP(A,B)$ 的局部最优解 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k$，称 $P(\pi_1)\cap P(\pi_2)\cap\cdots\cap P(\pi_k)$ 为实例 $QAP(A,B)$ 的近似骨架，记为 $a-bone(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k)$.

2　QAP 问题的骨架理论分析

不失一般性，下面讨论中假定矩阵 A 和 B 中元素 a_{ij} 和 b_{ij} 均为非负整数(即 $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$). 本文在引理 1 和 2 中分析了 QAP 实例与对应的偏移 QAP 实例解之间

的关系.

引理 1 给定设备之间的流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ($a_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$)及距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ ($b_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$), 对于任意两个不同的可行解 π_1 和 π_2, 若实例 $QAP(A,B)$ 的目标函数值满足 $g_{\pi_1}(A,B)<g_{\pi_2}(A,B)$, 则 $QAP(A,B)$ 的偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 满足

$$g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})<g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B}).$$

证明 本命题的证明分为两步:

第 1 步, 首先证明 $\max(\{b_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})\neq 0$ 并且 $\max(\{a_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})\neq 0$.

反证法. 若 $\max(\{a_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})=0$, 则根据 $a_{ij}\geqslant 0$ 可知 $a_{ij}=0$ ($1\leqslant i,j\leqslant n$), 则 $g_{\pi_1}(A,B)=g_{\pi_2}(A,B)=0$, 与题设矛盾. 同理可证 $\max(\{b_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})\neq 0$.

故此 $m_A=\max(\{a_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{1\})=\max(\{a_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})$, $m_B=\max(\{b_{ij}\,|1\leqslant i,j\leqslant n\})$ 成立.

第 2 步, 证明对于任意两个不同的可行解 π_1 和 π_2, 若实例 $QAP(A,B)$ 的目标函数值满足 $g_{\pi_1}(A,B)<g_{\pi_2}(A,B)$, 则 $QAP(A,B)$ 的偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 满足

$$g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})<g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B}).$$

根据本文假定, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ ($1\leqslant i,j\leqslant n$). 根据 $g_{\pi_1}(A,B)<g_{\pi_2}(A,B)$ 可知 $g_{\pi_2}(A,B)-g_{\pi_1}(A,B)\in\mathbb{Z}^+$ 成立.

对于任意可行解π, 根据偏移 QAP 实例的定义可知

$$\begin{aligned}
g_\pi(\hat{A},\hat{B})&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}+\xi_{ij})(b_{\pi(i)\pi(j)}+\delta_{\pi(i)\pi(j)})\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}\\
&=g_\pi(A,B)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}.
\end{aligned}$$

为叙述方便, 记

$$\Delta_\pi^1=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)},\ \Delta_\pi^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)},\ \Delta_\pi^3=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)},$$

它们分别满足

$$\varDelta_\pi^1=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{a_{ij}}{(3m_A 2^{\pi(i)n+\pi(j)})}\leqslant\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{m_A}{(3m_A 2^{\pi(i)n+\pi(j)})}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{\pi(i)n+\pi(j)}}=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{in+j}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n^2+n}}\right)<\frac{1}{3},$$

$$\varDelta_\pi^2=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \xi_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{b_{\pi(i)\pi(j)}}{(3m_B 2^{in^3+jn^2})}\leqslant\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{m_B}{(3m_B 2^{in^3+jn^2})}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{in^3+jn^2}}<\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{in+j}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n^2+n}}\right)<\frac{1}{3},$$

$$\varDelta_\pi^3=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \xi_{ij}\delta_{\pi(i)\pi(j)}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{(9m_A m_B 2^{in^3+jn^2+\pi(i)n+\pi(j)})}$$

$$=\frac{1}{9m_A m_B}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{in^3+jn^2+\pi(i)n+\pi(j)}}<\frac{1}{9m_A m_B}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{\pi(i)n+\pi(j)}}$$

$$=\frac{1}{9m_A m_B}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{1}{2^{in+j}}=\frac{1}{9m_A m_B}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n^2+n}}\right)<\frac{1}{9}.$$

又根据定义 $a_{ij}\geqslant 0$, $b_{ij}\geqslant 0$, $\xi_{ij}=1\big/(3m_B 2^{in^3+jn^2})>0$, $\delta_{ij}=1\big/(3m_A 2^{in+j})>0$, 故此 $\varDelta_\pi^1\geqslant 0$, $\varDelta_\pi^2\geqslant 0$, $\varDelta_\pi^3\geqslant 0$, 且有 $0\leqslant\varDelta_\pi^1+\varDelta_\pi^2+\varDelta_\pi^3\leqslant 7/9$ 成立.

对于任意两个可行解 $\pi_1\neq\pi_2$ 且 $g_{\pi_1}(A,B)<g_{\pi_2}(A,B)$, 有下式成立:

$$g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})-g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})=(g_{\pi_2}(A,B)-g_{\pi_1}(A,B))+(\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3)-(\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3),$$

而 $g_{\pi_2}(A,B)-g_{\pi_1}(A,B)\geqslant 1$, $-7/9\leqslant(\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3)-(\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3)\leqslant 7/9$, 故此 $g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})-g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})>0$, 原命题得证.

引理 2　给定设备之间的流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ($a_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$)及距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ ($b_{ij}\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$), 对于任意的两个不同的可行解 π_1 和 π_2, 若实例 $QAP(A,B)$ 的目标函数值满足 $g_{\pi_1}(A,B)=g_{\pi_2}(A,B)$, 则 $QAP(A,B)$ 的偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 满足 $g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})\neq g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})$.

证明　由 $g_{\pi_1}(A,B)=g_{\pi_2}(A,B)$ 可知

$$g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})-g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})=(\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3)-(\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3),$$

故下面只需证明 $(\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3)-(\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3)\neq 0$ 即可.

因为 $\pi_1\neq\pi_2$, 故存在 i ($1\leqslant i\leqslant n$), 使得 $\pi_1(i)\neq\pi_2(i)$. 记

$$h(i,j,\pi)=in^3+jn^2+\pi(i)n+\pi(j),$$
$$D_{\pi_1}=\{h(i,j,\pi_1)\,|\,h(i,j,\pi_1)\neq h(i,j,\pi_2),\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n\},$$
$$D_{\pi_2}=\{h(i,j,\pi_2)\,|\,h(i,j,\pi_2)\neq h(i,j,\pi_1),\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n\},$$

显然 $D_{\pi_1}\cap D_{\pi_2}=\varnothing$, $D_{\pi_1}\cup D_{\pi_2}\neq\varnothing$ 成立. 记 $m_{\pi_1\pi_2}=\max(D_{\pi_1}\cup D_{\pi_2})$.

$$\begin{aligned}\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)})\\&=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_1)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)})\\&\quad+\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_1)>m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)})\\&=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_2)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)})\\&\quad+\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_2)>m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}).\end{aligned}$$

根据 $m_{\pi_1\pi_2}$ 的定义可知, 对于任意 $1\leqslant i',j'\leqslant n$, 若 $h(i',j',\pi_1)>m_{\pi_1\pi_2}$, 则 $h(i',j',\pi_1)=h(i',j',\pi_2)$, 且 $\pi_1(i')=\pi_2(i')$, $\pi_1(j')=\pi_2(j')$ 成立. 因此有下式成立:

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_1)>m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)})\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_2)>m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}).\end{aligned}$$

故此有

$$\begin{aligned}&\varDelta_{\pi_1}^1+\varDelta_{\pi_1}^2+\varDelta_{\pi_1}^3-(\varDelta_{\pi_2}^1+\varDelta_{\pi_2}^2+\varDelta_{\pi_2}^3)\\=&\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_1)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_1(i)\pi_1(j)})\\&-\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\h(i,j,\pi_2)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}}(a_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}+\xi_{ij}\delta_{\pi_2(i)\pi_2(j)})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_1)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}} \left(\frac{a_{ij}}{(3m_A 2^{\pi_1(i)n+\pi_1(j)})} + \frac{b_{\pi_1(i)\pi_1(j)}}{(3m_B 2^{in^3+jn^2})} + \frac{1}{(9m_A m_B 2^{in^3+jn^2+\pi_1(i)n+\pi_1(j)})} \right)$$

$$- \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_2)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}} \left(\frac{a_{ij}}{(3m_A 2^{\pi_2(i)n+\pi_2(j)})} + \frac{b_{\pi_2(i)\pi_2(j)}}{(3m_B 2^{in^3+jn^2})} + \frac{1}{(9m_A m_B 2^{in^3+jn^2+\pi_2(i)n+\pi_2(j)})} \right)$$

$$= \frac{1}{(9m_A m_B 2^{m_{\pi_1\pi_2}})} \left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_1)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(\pi_1(i)n+\pi_1(j))} + 3m_A b_{\pi_1(i)\pi_1(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(in^3+jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i,j,\pi_1)}) \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_2)\leqslant m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(\pi_2(i)n+\pi_2(j))} + 3m_A b_{\pi_2(i)\pi_2(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(in^3+jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i,j,\pi_2)}) \right).$$

根据 $m_{\pi_1\pi_2}$ 的定义可知, $m_{\pi_1\pi_2} = \max(D_{\pi_1} \cup D_{\pi_2}) \in D_{\pi_1} \cup D_{\pi_2}$, 即 $m_{\pi_1\pi_2} \in D_{\pi_1}$ 或者 $m_{\pi_1\pi_2} \in D_{\pi_2}$. 下面证明中考虑 $m_{\pi_1\pi_2} \in D_{\pi_1}$ 的情形(对于 $m_{\pi_1\pi_2} \in D_{\pi_2}$ 的情形, 证明方法类似). 设

$$m_{\pi_1\pi_2} = h(i^*, j^*, \pi_1) = i^* n^3 + j^* n^2 + \pi_1(i^*)n + \pi_1(j^*),$$

则

$$\varDelta_{\pi_1}^1 + \varDelta_{\pi_1}^2 + \varDelta_{\pi_1}^3 - (\varDelta_{\pi_2}^1 + \varDelta_{\pi_2}^2 + \varDelta_{\pi_2}^3)$$

$$= \frac{1}{(9m_A m_B 2^{m_{\pi_1\pi_2}})} \left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_1)< m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(\pi_1(i)n+\pi_1(j))} + 3m_A b_{\pi_1(i)\pi_1(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(in^3+jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i,j,\pi_1)}) \right.$$

$$+ (3m_B a_{ij} 2^{i^* n^3 + j^* n^2} + 3m_A b_{\pi_1(i^*)\pi_1(j^*)} 2^{\pi_1(i^*)n+\pi_1(j^*)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i^*,j^*,\pi_1)})$$

$$\left. - \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_2)< m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(\pi_2(i)n+\pi_2(j))} + 3m_A b_{\pi_2(i)\pi_2(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(in^3+jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i,j,\pi_2)}) \right)$$

$$= \frac{1}{(9m_A m_B 2^{m_{\pi_1\pi_2}})} \left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ h(i,j,\pi_1)< m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(\pi_1(i)n+\pi_1(j))} + 3m_A b_{\pi_1(i)\pi_1(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2}-(in^3+jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2}-h(i,j,\pi_1)}) \right.$$

$$+(3m_B a_{ij} 2^{i^* n^3 + j^* n^2} + 3m_A b_{\pi_1(i^*)\pi_1(j^*)} 2^{\pi_1(i^*)n+\pi_1(j^*)} + 1)$$

$$\left. - \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ h(i,j,\pi_2) < m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (\pi_2(i)n + \pi_2(j))} + 3m_A b_{\pi_2(i)\pi_2(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (in^3 + jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2} - h(i,j,\pi_2)}) \right).$$

而当$1 \leqslant i, j \leqslant n, h(i,j,\pi_1) < m_{\pi_1\pi_2}$时，$3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (\pi_1(i)n + \pi_1(j))}$和$3m_A b_{\pi_1(i)\pi_1(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (in^3 + jn^2)}$及$2^{m_{\pi_1\pi_2} - h(i,j,\pi_1)}$均为偶数，$3m_B a_{ij} 2^{i^* n^3 + j^* n^2}$和$3m_A b_{\pi_1(i^*)\pi_1(j^*)} 2^{\pi_1(i^*)n+\pi_1(j^*)}$均为偶数；又当$1 \leqslant i, j \leqslant n,\ h(i,j,\pi_2) < m_{\pi_1\pi_2}$时，$3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (\pi_2(i)n + \pi_2(j))}$和$3m_A b_{\pi_2(i)\pi_2(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (in^3 + jn^2)}$及$2^{m_{\pi_1\pi_2} - h(i,j,\pi_2)}$均为偶数. 故有下式成立:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ h(i,j,\pi_1) < m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (\pi_1(i)n + \pi_1(j))} + 3m_A b_{\pi_1(i)\pi_1(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (in^3 + jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2} - h(i,j,\pi_1)})$$

$$+(3m_B a_{ij} 2^{i^* n^3 + j^* n^2} + 3m_A b_{\pi_1(i^*)\pi_1(j^*)} 2^{\pi_1(i^*)n+\pi_1(j^*)} + 1)$$

$$- \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ h(i,j,\pi_2) < m_{\pi_1\pi_2}}} (3m_B a_{ij} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (\pi_2(i)n + \pi_2(j))} + 3m_A b_{\pi_2(i)\pi_2(j)} 2^{m_{\pi_1\pi_2} - (in^3 + jn^2)} + 2^{m_{\pi_1\pi_2} - h(i,j,\pi_2)}) \neq 0.$$

从而可知，$(\Delta_{\pi_1}^1 + \Delta_{\pi_1}^2 + \Delta_{\pi_1}^3) - (\Delta_{\pi_2}^1 + \Delta_{\pi_2}^2 + \Delta_{\pi_2}^3) \neq 0$，原命题得证.

定理 1 给定设备之间的流量矩阵$A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($a_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$)及距离矩阵$B = (b_{ij})_{n \times n}$ ($b_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$)，$QAP(A,B)$的偏移 QAP 实例$QAP(\hat{A},\hat{B})$只有唯一的全局最优解.

证明 反证法. 假设原命题不成立，则$QAP(\hat{A},\hat{B})$至少存在两个以上的全局最优解. 不妨记其中两个不同的全局最优解分别是π_1和π_2，下面说明矛盾的存在.

对于$QAP(A,B)$，解π_1和π_2只有 3 种可能性:

(1) $g_{\pi_1}(A,B) = g_{\pi_2}(A,B)$.

此时根据引理 2 可知，$g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B}) \neq g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})$，矛盾.

(2) $g_{\pi_1}(A,B) < g_{\pi_2}(A,B)$.

根据引理 1 可知，$g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B}) < g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B})$，矛盾.

(3) $g_{\pi_2}(A,B) < g_{\pi_1}(A,B)$.

根据引理 1 可知，$g_{\pi_2}(\hat{A},\hat{B}) < g_{\pi_1}(\hat{A},\hat{B})$，矛盾.

综合(1)~(3)，假设不成立，原命题得证.

推论 1 给定设备之间的流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ($a_{ij}\in\mathbb{Z}^+\bigcup\{0\}$)及距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ ($b_{ij}\in\mathbb{Z}^+\bigcup\{0\}$), 偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 的全局最优解也是 $QAP(A,B)$ 的全局最优解.

证明 根据定理 1 可知, 偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 具有唯一全局最优解, 记为 π^*. 下面用反证法, 假设 π^* 不是 $QAP(A,B)$ 的全局最优解, 则至少存在一个解 $\pi\neq\pi^*$, 使得 $g_\pi(A,B)<g_{\pi^*}(A,B)$. 而根据引理 1 又推导出 $g_\pi(\hat{A},\hat{B})<g_{\pi^*}(\hat{A},\hat{B})$, 矛盾. 故假设不成立, 原命题得证.

定理 2 在 $P\neq NP$ 的假设下, 不存在多项式时间的算法可以获得 QAP 问题的骨架.

证明 本定理的证明同样采用反证法. 假设定理不成立, 则存在一个多项式算法(记为 $\varLambda$)可以获得 QAP 问题的骨架, 下面说明矛盾的存在.

对于任意给定的流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ($a_{ij}\geqslant 0$)及距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ ($b_{ij}\geqslant 0$), 实例 $QAP(A,B)$ 可以通过多项式时间算法(记为 $\varGamma$, 时间复杂度记为 $O(\bullet)$)转换为它的偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$, 而 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 本身又是一个 QAP 实例. 根据定理 1, $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 仅有一个全局最优解(即骨架), 可以用算法 $\varLambda$ 解决(时间复杂度记为 $O(*)$). 而根据推论 1 可知, $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 的全局最优解也是实例 $QAP(A,B)$ 的全局最优解.

这样, 对于任意的实例 $QAP(A,B)$, 可以利用算法 $\varGamma$ 和 $\varLambda$ 在 $O(\bullet)+O(*)$ 内解决, 即在 $P\neq NP$ 的假设下, 存在算法可以在多项式时间内得到QAP问题的全局最优解. 这显然与Sahni 等 [2]的结论相矛盾, 假设不成立, 原命题得证.

3 基于偏移实例的近似骨架算法

本节中将利用 QAP 骨架理论分析中的偏移实例构造方法, 提出一种新的求解 QAP 问题的元启发算法——基于偏移实例的近似骨架算法 BI-AB. 在本节的叙述中, 首先简要介绍目前已有的基于近似骨架的快速蚁群算法 ABFANT 的产生背景及其不足, 在此基础上给出新算法 BI-AB.

3.1 基于近似骨架的快速蚁群算法

在关于骨架的研究中, 众多研究者们将骨架引入到 NP-难解问题的算法设计中. 邹鹏等人也在 2005 年提出了求解 QAP 问题的基于近似骨架的快速蚁群算法 ABFANT.

算法: ABFANT,

输入: QAP 实例 $QAP(A, B)$,

输出: 解 π_0.

Begin

1. 利用 FANT 算法求解 $QAP(A, B)$, 获得一个解 π_0.
2. 执行下列动作:

   2.1 调用 FANT 算法 k–1 次, 获得解 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1}$,

2.2 利用解 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1}$ 获得近似骨架 $a-bone(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1})$,

2.3 固定近似骨架 $a-bone(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1})$，获得新的搜索空间 $S^*(QAP(A,B))$,

2.4 在新的搜索空间上调用 FANT 算法，得到新的解 π_k,

2.5 如果 $g_{\pi_k}(A,B)<g_{\pi_0}(A,B)$，则令 $\pi_0=\pi_k$.

3. 返回解 π_0.

End

ABFANT算法的优势是通过固定近似骨架，降低了搜索空间的规模，提高了算法的求解效率. ABFANT算法的基础是“大坑”结构，同时邹鹏也设计了求解TSP问题的多级规约算法 [14]. 然而，与基于近似骨架的多级规约算法的显著成功相比，近似骨架在QAP问题上作用却不是十分明显. 其原因在于，TSPLIB及常见的TSP实例的骨架规模通常与问题规模相同(即仅有一个全局最优解)：Slaney等 [10]发现 2 维Euclid空间正方形内随机生成的由 20 个城市组成的整数坐标TSP实例，随着正方形边长的增加，其骨架规模迅速增长达到 n，即仅存在一个全局最优解；Zhang[12]也发现，随机生成的各种不同规模的TSP实例，随着城市间距离精度的增加，其骨架迅速增长达到 n.

然而，QAP 问题解的情形更加复杂. 首先，QAP 实例的骨架规模变化比较大，以 QAPLIB 为例，其中的很多实例全局最优解个数不唯一. 本文利用穷举法，得到了规模为 12 的典型QAPLIB 实例的统计结果(见表 1). 从表 1 中可以看到, QAP 实例 chr12b, chr12c, rou12a 和 tai12a 只有一个全局最优解，此时骨架规模与实例规模相同；而 QAP 实例 scr12a 和 nug12a 有多个全局最优解，骨架规模为 0，此时利用骨架进行算法设计的意义不大.

表 1 QAPLIB 中实例的全局最优解与骨架规模的关系

实例名称	实例规模	全局最优解	骨架规模
chr12b	12	5-7-1-10-11-3-4-2-9-6-12-8	12
chr12c	12	7-5-1-3-10-4-8-6-9-11-2-12	12
rou12a	12	6-5-11-9-2-8-3-1-12-7-4-10	12
scr12a	12	2-7-10-11-3-12-8-4-9-6-1-5 3-6-11-10-2-9-5-1-12-7-4-8 5-7-2-3-11-4-8-12-1-6-9-10 5-7-10-11-3-12-8-4-9-6-1-2 8-6-3-2-10-1-5-9-4-7-12-11 8-6-11-10-2-9-5-1-12-7-4-3 10-7-2-3-11-4-8-12-1-6-9-5 11-6-3-2-10-1-5-9-4-7-12-8	0
tai12a	12	8-1-6-2-11-10-3-5-9-7-12-4	12
nug12a	12	2-10-6-5-1-11-8-4-3-9-7-12 3-9-7-12-1-11-8-4-2-10-6-5 5-6-10-2-4-8-11-1-12-7-9-3 12-7-9-3-4-8-11-1-5-6-10-2	0

同时，按照邹鹏等人的方法所得到的QAP近似骨架的规模及纯度相对TSP问题都低得多. 以QAPLIB中的典型实例为例，邹鹏等人统计发现：局部最优解交集中骨架的含量相对较低，且随着求交的局部最优解数目的增加，交集规模迅速降为 0(当局部最优解数目超过 3 时，大多数实例的交集规模都降为 0). 表 2 给出的是QAPLIB中几个典型实例 2 个局部最优解求交后的

统计结果 [19].

表 2　近似骨架的统计结果

实例名称	实例规模	近似骨架规模	近似骨架中骨架的纯度	迭代次数
chr25a	25	5	57.0	100
tai30b	30	14	77.8	100
tai40b	40	21	90.0	100
lipa40a	40	8	69.1	100
tai50b	50	12	56.3	250
chr22b	22	5	81.9	250
tai80b	80	8	84.3	10000

3.2　基于偏移实例的近似骨架算法 BI-AB

在 3.1 小节分析的基础上, 本文提出了新的求解 QAP 问题的元启发算法——基于偏移实例的近似骨架算法 BI-AB. 新算法的基本思路是通过构造原 QAP 实例的流量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 和距离矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的偏移矩阵, 得到仅有一个全局最优解(骨架规模为 n)的偏移 QAP 实例. 新实例的全局最优解也是原实例的全局最优解, 这样只需求解新实例即可. 在此基础上, 调用现有算法Λ作为从属算法, 求得新实例的 k 个局部最优解并求其交集(近似骨架), 然后将近似骨架固定以得到规模更小的新搜索空间. 最后在新的搜索空间上求解得到新的解.

算法: BI-AB,

输入: QAP 实例 $QAP(A, B)$, 从属算法Λ,

输出: 解 π_0.

Begin

1. 为实例 $QAP(A, B)$构造偏移 QAP 实例 $QAP(\hat{A},\hat{B})$.
2. 利用现有算法 Λ 求解 $QAP(\hat{A},\hat{B})$, 获得一个解 π_0.
3. 执行下列动作:
   - 3.1 调用 Λ 算法 k–1 次, 获得解 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1}$.
   - 3.2 利用解 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1}$ 获得近似骨架 $a-bone(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1})$,
   - 3.3 固定近似骨架 $a-bone(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{k-1})$, 获得新的搜索空间 $S^*(QAP(\hat{A},\hat{B}))$,
   - 3.4 在新的搜索空间上调用 Λ 算法, 得到新的解 π_k.
   - 3.5 如果 $g_{\pi_k}(\hat{A},\hat{B})<g_{\pi_0}(\hat{A},\hat{B})$, 则令 $\pi_0=\pi_k$.
4. 返回解 π_0.

End

算法 BI-AB 的时间复杂度分析如下: 步骤 1 中构造偏移 QAP 实例的时间复杂度为 $O(n^2)$; 步骤 2 中算法 Λ 求解 $QAP(\hat{A},\hat{B})$ 的时间复杂度记为 $O(\bullet)$; 步骤 3.1 的时间复杂度为 $(k-1)O(\bullet)$,

步骤 3.2 获得近似骨架的时间复杂度为 $O(kn)$, 步骤 3.3 的时间复杂度为 $O(n)$, 而步骤 3.4 的时间复杂度为 $O(\bullet)$, 步骤 3.5 的时间复杂度为 $O(n^2)$; 步骤 4 的时间复杂度为 $O(1)$. 综上可知, 算法 BI-AB 的时间复杂度为 $O(n^2)+kO(\bullet)+O(kn)$.

算法 BI-AB 具有以下优点: (1) 高度的灵活性, 元启发算法 BI-AB 并未限定从属算法 Λ 的类型, 而是提供了一种框架, 可以将现有的各种算法与之结合; (2) 实现简单, 尽管有关唯一最优解的证明比较繁琐, 但是算法实现中构造偏移 QAP 实例非常简单; (3) 骨架规模高, 通过构造偏移 QAP 实例的方式, 提高了骨架的规模以更好地发挥近似骨架的作用.

4 实验及分析

Sahni等 [2]在 1976 年证明了QAP问题不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法($\varepsilon>0$), 因此理论分析对于QAP的启发式算法并不适用, 只能采取实验方法来评价算法的性能. 元启发算法BI-AB提供了一种算法框架, 它可以使用诸如禁忌算法、贪心算法作为从属算法. 由于本文的重点在于探索近似骨架在算法设计中的应用, 因此采用FANT算法作为从属算法, 以便与ABFANT算法进行对比. 关于FANT、遗传算法、禁忌算法的性能比较可以参考文献 [34]. 本文用C++语言实现了元启发算法BI-AB(记为BI-ABFANT), 采用ABFANT算法和随机重启FANT算法Re-FANT作为对比算法. 实验中选取 $k=2$, 从属算法FANT中迭代次数为 1000(其中Re-FANT算法是运行 3 次FANT算法, 取最好解作为最终结果). 实验环境是P4 2.4 GHz微处理机, 512 MBytes内存, Redhat Linux 9.0 操作系统. 表 3 给出了不同算法在QAPLIB实例上

表 3 算法 ABFANT, Re-FANT, BI-ABFANT 在 QAPLIB 实例上的实验结果

实例	g_{opt}	ABFANT			Re_FANT			BI-ABFANT		
		$\tau_{\min}$/%	τ_{mean}/%	t_{mean}	$\tau_{\min}$/%	τ_{mean}/%	t_{mean}	$\tau_{\min}$/%	τ_{mean}/%	t_{mean}
bur26a	5426670	0	0	7.10	0	0	7.82	0	0	6.47
chr15a	9896	0	**0**	1.51	0	0.04	1.67	0	**0**	1.50
chr15b	7990	0	**0**	1.51	0	0.79	1.68	0	**0**	1.48
chr22a	6156	0	0.46	4.45	0	0.39	4.58	0	**0.34**	4.37
chr22b	6194	0	0.77	4.35	0	1.07	4.47	0	**0.63**	4.21
chr25a	3796	0	2.67	6.32	0	**0.92**	6.43	0	1.53	6.39
lip40a	31538	0	0.69	24.03	0	0.69	23.99	0	**0.59**	24.51
lip50a	62093	0	0.71	47.09	0	0.71	47.00	0	**0.53**	47.60
nug16a	1610	0	0.074	1.74	0	**0**	1.91	0	**0**	1.72
nug30a	6124	0	0.12	10.81	0	0.11	10.96	0	**0.065**	10.93
rou20a	725522	0	0.15	3.38	0	**0.091**	3.42	0	0.13	3.35
scr12a	31410	0	0	0.93	0	0	0.95	0	0	0.75
scr20a	110030	0	0.058	3.46	0	**0**	3.61	0	**0**	3.55
ste36b	15852	0	0	19.50	0	0	19.62	0	0	19.04
tai12a	224416	0	0	0.71	0	0	0.92	0	0	0.71
tai12b	39464925	0	0	0.74	0	0	0.97	0	0	0.74
tai40b	637250948	0	0.00088	24.30	0	**0**	29.35	0	**0**	25.01
tai50a	4938796	1.5	1.8	48.11	1.5	1.8	48.03	**1.2**	**1.7**	48.13
tai80b	818415043	0.015	**0.092**	237.27	0.0094	0.12	241.29	**0.0037**	0.24	238.09
tho30a	149936	0	0.031	11.16	0	0.023	11.30	0	**0**	11.29

的运行 10 次的实验结果. 其中, g_{opt} 和 t_{mean} 分别表示实例最优解目标函数值、平均运行时间(s). $\tau_{\min}$ 和 τ_{mean} 表示 10 次运行的解超出最优解的百分比(%)最小值和平均值.

从表 3 中可以发现, ABFANT, Re-FANT 和 BI-ABFANT 在求解大多数 QAPLIB 实例方面都具有良好的性能, 并且运行时间基本相同. 在总计 20 个 QAPLIB 实例中, 3 个算法在 18 个实例上均可以取得最优解, 说明从属算法 FANT 本身的性能非常好. BI-ABFANT 在解的平均质量上, 12 个实例优于 ABFANT, 7 个实例与 ABFANT 相同, 1 个实例劣于 ABFANT; BI-ABFANT 在 9 个实例上优于 Re-FANT, 3 个劣于 Re-FANT, 8 个实例与 Re-FANT 相同; ABFANT 在 4 个实例上优于 Re-FANT, 8 个劣于 Re-FANT, 8 个实例上相同. 表格中将解结果最好的项用黑体标注出来. 综合实验结果可知, BI-ABFANT 在解的质量方面较 ABFANT 和 Re-FANT 算法均有显著地提高.

5　结论

本文对于 QAP 问题的骨架进行了理论分析, 通过构造偏移 QAP 实例, 证明了寻找 QAP 问题的骨架属于 NP-难解问题, 为通过局部最优解交叉来获得近似骨架提供了理论基础. 同时, 提出了基于偏移实例的近似骨架算法. 本文工作对 NP-难解问题骨架理论分析提供了借鉴. 同时, 基于偏移实例的算法设计思想为其他 NP-难解问题利用骨架来进行算法设计提供了参考.

致谢　感谢 University of Applied Sciences of Western Switzerland 的 Éric Taillard 教授提供的 FANT 源代码, Intel(上海)研发中心邹鹏博士提供 ABFANT 的相关文献及中国科技大学周智老师的有益帮助.

参考文献

1　Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: W H Freeman, 1979, 10—35
2　Sahni S, Gonzalez T. P-complete approximation problems. J ACM, 1976, 23(3): 555—565
3　Glover F, Laguna M. Tabu Search. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997
4　Dorigo M, DiCaro G. The ant colony optimization meta-heuristic. In: Corne D, Dorigo M, Glover F, eds. New Ideas in Optimization. London: McGraw Hill, 1999. 11—32
5　段海滨. 蚁群算法原理及其应用. 北京: 科学出版社, 2005
6　陈国良, 王煦法, 庄镇泉. 遗传算法及其应用. 北京: 人民邮电出版社, 1996
7　康立山, 谢云, 尤矢勇, 等. 非数值并行算法-模拟退火算法. 北京: 科学出版社, 1994
8　周志华, 曹存根. 神经网络及其应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
9　黄文奇, 许如初. 近世计算理论导引: NP 难度问题的背景、前景及其求解算法研究. 北京: 科学出版社, 2004
10　Slaney J, Walsh T. Backbones in optimization and approximation. In: Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 254—259
11　Monasson R, Zecchina R, Kirkpatrick S, et al. Determining computational complexity for characteristic ‘phase transition’. Nature, 1998, 400(8): 133—137
12　Zhang W X. Phase transition and backbones of the asymmetric traveling salesman problem. J Artif Intell Res, 2004, 21(1): 471—497

13 Schneider J. Searching for backbones-a high-performance parallel algorithm for solving combinatorial optimization problems. Future Gener Comput Syst, 2003, 19(1): 121—131 [DOI]

14 邹鹏，周智，陈国良，等．求解 TSP 问题的多级归约算法．软件学报, 2003. 14(1): 35—42

15 Zhang W X, Looks M. A novel local search algorithm for the traveling salesman problem that exploit backbones. In: Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-05). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2005. 343—351

16 Zhang W X. Configuration landscape analysis and backbone guided local search part I: satisifiability and maximum satisfiability. Artif Intell, 2004, 158(1): 1—26 [DOI]

17 Dubois O, Seymour P. A backbone-search heuristic for efficient solving of hard 3-SAT formula. In: Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 248—253

18 Valnir F J. Backbone guided dynamic local search for propositional satisfiability. In: Proceedings of the 9th International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics (AI & Math -06). New York: Springer, 2006. 100—108

19 Zou P, Zhou Z, Chen G L, et al. Approximate-backbone guided fast ant algorithms to QAP. J Softw, 2005, 16(10): 1691—1698 [DOI]

20 Kilby P, Slaney J, Walsh T. The backbone of the traveling salesperson. In: Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI05). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2005. 175—181

21 Taillard E D. Fant: Fast ant system. Technical Report IDSIA-46-98, 1998

22 Burkard R E, Karisch S, Rendl F. Qaplib: a quadratic assignment problem library. Eur J Oper Res, 1991, 55(1): 115—119 [DOI]

23 Gambardella L, Taillard´ E, Dorigo M. Ant colonies for the QAP. J Oper Res Soc, 1999, 50(2): 167—176 [DOI]

24 Middendorf M, Reischle F, Schmeck H. Multi colony ant algorithms. J Heuristics, 2002, 8(3): 305—320 [DOI]

25 Drezner Z. A new genetic algorithm for the quadratic assignment problem. Inf J Comput, 2003, 15(3): 320—330 [DOI]

26 Tsuchiya K, Nishiyama T, Tsujita K. A deterministic annealing algorithm for a combinatorial optimization problem using replicator equations. Physica D, 2001, 149(3): 161—173 [DOI]

27 Ishii S, Sato M. Doubly constrained network for combinatorial optimization. Neurocomputing, 2001, 43(1-4): 239—257 [DOI]

28 Misevicius A. A modification of tabu search and its applications to the quadratic assignment problem. Inform Technol Contr, 2003, 2(27): 12—20

29 Drezner Z. The extended concentric tabu for the quadratic assignment problem. Eur J Oper Res, 2005, 160(2): 416—422 [DOI]

30 Oliveira C A S, Pardalos P M, Resende M G C. Grasp with path-relinking for the QAP. In: Proceedings of the 5th Metaheuristics International Conference (MIC2003). Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. 571—576

31 Boese K D. Cost versus distance in the traveling salesman problem. Technical Report CSD-950018, 1995

32 Merz P, Freisleben B. Fitness landscapes and memetic algorithms and greedy operators for graph bi-partitioning. Evol Comput, 2000, 8(1): 61—91 [DOI]

33 Reeves C R. Landscapes, operators and heuristic search. Ann Oper Res, 1999, 86(1): 473—490 [DOI]

34 Merz P, Freisleben B. A comparison of memetic algorithms, tabu search, and ant colonies for the quadratic assignment problem. In: Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC’99). Piscataway: IEEE Press, 1999. 2063—2070