

论批数不限定情况下一维 优选问题的最优策略

洪 加 威

(北京市计算中心)

摘 要

1953 年以来, Kiefer 等人提出了优选法, 研究了试验批数预先知道时的最优试验方法(即分数法^[1-4]). 但一般说来, 在实践上往往不能精确地预言需要试验的批数, 因此, 有必要从理论上探讨批数不限定情况下的最优试验方法. 本文研究了在第 n 批可做 k_n 个试验的情况, 指出了: 如果 $k_1, k_2, k_3 \cdots$ 中有无穷多个奇数或仅 k_1 是奇数, 我们就能给出一个最优的方法(当 $k_n \equiv 1$ 时就是“0.618”法, 即如果每批只做一个试验, “0.618”法就是最优的方法); 在相反的情形, 最优的方法不存在, 但是能设计出“充分接近于最优”的方法.

引 言

Kiefer 证明了单峰函数优选问题的如下结果: 如果每批可作一个试验, 共限定做 n 批试验, 那末斐波那契分数法 $\mathcal{S}_n$ 是最优的^[1]. Wilde 等人把这个结果推广到第一批作 k_1 个试验, $\cdots$ 第 n 批作 k_n 个试验, 一共限定做 n 批的情形^[2-4]. 总之, 他们都假定了试验的批数是预定的. 事实上, 在大多数情形, 开始试验前并不能确切预言试验的次数, 总要等到了满意的结果后, 才终止试验. 如果用斐波那契级数法, 原定做 n 次试验, 但第 n 次后结果还不满意而想再作一次, 就不是最优的方法了. 因此在实用上, 往往用黄金分割法而不用分数法.

本文企图从理论上探讨批数不限定情况下的最优策略. 首先, 因为批数不限定, 我们必须假定每个策略 $\mathcal{D}$ 是可以连续做下去, 不致于到某一批试验以后就不能进行了. 其次, 我们应该假定 $\mathcal{D}$ 的确定性, 即对固定的 $\mathcal{D}$, 某固定的单峰函数 f 和自然数 n , $\mathcal{D}$ 作用在 f 上 n 步之后的剩余区间是一个确定的区间, 其长度 $\delta(\mathcal{D}, f, n)$ 是一个确定的数. 第三, 和限定批数的情形一样, 采用“极小极大”的原则, 把 $\delta(\mathcal{D}, n) = \sup_f \delta(\mathcal{D}, f, n)$ 当作 $\mathcal{D}$ 在第 n 批试验后精确度的标准. 最后, 如果 $\mathcal{D}$ 对于一切 $\mathcal{Q}$, 当 n 充分大后, 就有 $\delta(\mathcal{D}, n) \leq \delta(\mathcal{Q}, n)$, 则 $\mathcal{D}$ 就是一个最优策略. 它定义了一个偏序关系, 在批数不限定的情况下具有一定的合理性.

试验批数不限定情况下最优策略的研究, 最早华罗庚同志曾利用连分数的性质巧妙地证明了, 在上述意义下, 如果每次作一个试验, 则“0.618”法是一切对折法中的最优策略. 作者

对每次取 $2k-1$ 个试验点的情况作了探讨^[5].

本文进一步考虑第 n 批可作 k_n 个试验的情形, 这里 $K = \{k_n\}$ 是正整数的一个无限数列. 如果 K 是正规的, 即 K 中有无穷多个奇数, 或 k_1 为奇数而其余均为偶数, 我们可设计出上述意义下的一个最优策略. 而在相反的情形, 最优策略不存在, 但是可以设计出“充分近似于最优”的策略. 也即对任一 $\theta < 1$, 可设计策略 $\mathcal{W}_\theta$, 使对一切策略 $\mathcal{D}$, 当 n 充分大后都有

$$0\delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq \delta(\mathcal{D}, n).$$

证明的大致轮廓如下: 对任一策略 $\mathcal{D}$, 用 $\delta(\mathcal{D}, n)$ 代表 $\mathcal{D}$ 在 n 批试验后剩余区间长度的上确界, 用 $\Delta(\mathcal{D}, n)$ 代表 $\mathcal{D}$ 在 n 批试验后剩余区间中已试点到端点距离的上确界, 令

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(\mathcal{D}, n) \\ \delta(\mathcal{D}, n) \end{pmatrix}, \text{ 则恒有递推不等式}$$

$$\mathfrak{B}: \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \leq C(k_{n+1}) \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, v_n \geq u_n \geq 0, u_0 = b - a \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

这里 $C(2i) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}$, $C(2i-1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $b-a$ 是试验区间的长度.

然后, 证明方程式

$$\mathfrak{A}: \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C(k_{n+1}) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, y_n \geq x_n \geq 0, x_0 = b - a \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

的解存在, 而且当 K 正规(见定义 5)时, 确可构造一个策略 $\mathcal{W}$, 使 $\delta(\mathcal{W}, n) = y_n$ (在 K 不正规时, 这样的 $\mathcal{W}$ 不存在, 但对任一 $\theta < 1$, 存在策略 $\mathcal{W}_\theta$, 使得 $\theta\delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq y_n$).

最后, 我们将证明: 如果 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ 满足 $\mathfrak{B}$ 而 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 满足 $\mathfrak{A}$, 则或者有 $y_n = v_n (n \geq 1)$; 或者存在 $\theta < 1$, 使当 n 充分大后就有 $y_n < \theta v_n$.

于是按照定义, $\mathcal{W}$ 就是一个最优的策略, 而当 θ 充分接近于 1 时, $\mathcal{W}_\theta$ 就是“充分接近于最优”的策略.

一、定义和记号

定义 1. 一个函数 f 在某区间 $[a, b]$ 上是单峰的, 如果存在一个点 $c_f \in [a, b]$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, c_f]$ 严格递增而在 $(c_f, b]$ 严格递减, 或者在 $[a, c_f]$ 严格递增而在 $[c_f, b]$ 严格递减.

容易见到, 对于一个单峰函数 $f(x)$ 而言, c_f 是唯一确定的, c_f 称为 f 的峰值点. 今后, 我们用 $\mathfrak{S}$ 来标记 $[a, b]$ 上所有单峰函数的集合.

仅仅在区间的有限个点上定义的函数 $s(x)$, 如果在它的定义域上和某个单峰函数有相同的值, 就称 $s(x)$ 为 $[a, b]$ 上的一个可允许函数. 一份试验结果的清单就是一个可允许函数. 在 $[a, b]$ 上全体可允许函数的集合记为 $\mathfrak{S}$. 用 s_0 代表处处无定义的函数, 约定 $s_0 \in \mathfrak{S}$.

所谓一个试验策略, 就是根据已经做过的前几批试验的结果, 来确定下一批试验应该在那些点上进行的一种方法. 从现在起, 我们假定第 n 批可作 k_n 个试验, 这里 $K = \{k_n\}$ 是正整数的一个无限序列. 我们把 $[a, b]$ 中 k_n 个数组成的集合称为一个 k_n -组, 用 $\mathfrak{R}_n$ 标记全体 k_n -组的集合. 于是可以给出下列的

定义 2. 一个试验策略 $\mathcal{D}$, 就是一组从 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{R}_n$ 的映射 $\varphi_n: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{R}_n (n = 1, 2, 3, \dots)$.

令 T 是 $[a, b]$ 中有限个点的集合, $f \in \mathfrak{F}$. 我们用记号 $s(f, T)$ 代表 $\mathfrak{S}$ 中这样一个函数, 它定义在 T 上, 而且在 T 上与 f 有相同的值. 对于一个试验策略 $\mathscr{D}: \{\varphi_n, n = 1, 2, \dots\}$, 令

$$\begin{cases} T_1(\mathscr{D}, f) = \varphi_1(s_0), \\ T_2(\mathscr{D}, f) = T_1(\mathscr{D}, f) \cup \varphi_2(s(f, T_1(\mathscr{D}, f))), \\ \dots\dots\dots \\ T_{n+1}(\mathscr{D}, f) = T_n(\mathscr{D}, f) \cup \varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathscr{D}, f))). \end{cases} \quad (1.1)$$

在这里, $T_n(\mathscr{D}, f)$ 代表在头 n 批试验之后全体作过试验的点的集合, $s(f, T_n(\mathscr{D}, f))$ 代表在头 n 批试验之后所得到的全部试验结果. $\varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathscr{D}, f)))$ 代表根据以往 n 批试验的结果, 按照策略 $\mathscr{D}$, 在第 $n+1$ 批试验应该取的 k_{n+1} 个试验点的集合. $T_{n+1}(\mathscr{D}, f)$ 代表在 $n+1$ 批试验之后作过试验点的集合, 因而是 $T_n(\mathscr{D}, f)$ 和 $\varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathscr{D}, f)))$ 的并集. 上面这一串等式描述了优选的过程. 只要 $\mathscr{D}$ 和 f 确定了, 这个过程就是唯一确定的.

设 $f \in \mathfrak{F}$,

$$T = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_t\}. \quad (1.2)$$

定义 $\mathfrak{F}$ 的子集 $\mathfrak{F}(f, T)$ 如下:

$$\mathfrak{F}(f, T) = \{g \in \mathfrak{F} \mid g(\alpha_i) = f(\alpha_i), i = 1, 2, \dots, t\}. \quad (1.3)$$

再定义 $[a, b]$ 的子集 $[f, T]$ 如下:

$$[f, T] = \{c_g \mid g \in \mathfrak{F}(f, T)\}. \quad (1.4)$$

c_g 即单峰函数 g 的峰值点. 容易证明下列的引理.

引理 1. $[f, T]$ 的构造如下:

(1) 如果有某个 $j(1 \leq j < t)$, 使得 $f(\alpha_j) = f(\alpha_{j+1})$, 那末就有

$$f(\alpha_1) < \dots < f(\alpha_j) = f(\alpha_{j+1}) > \dots > f(\alpha_t), \quad (1.5)$$

并且 $[f, T] = [\alpha_j, \alpha_{j+1}]$.

(2) 如果 (1) 不出现, 那就一定有某个 $j(1 \leq j \leq t)$, 使得

$$f(\alpha_1) < \dots < f(\alpha_j) > \dots > f(\alpha_t), \quad (1.6)$$

并且 $[f, T] = [\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}]$. 这里 $\alpha_0 = a$, $\alpha_{t+1} = b$, 代表试验区间的端点.

(3) 因此, 如果 ν 是 $[f, T]$ 的内点, 则存在 $g \in \mathfrak{F}(f, T)$, 使得 g 在 ν 点达到极大值.

引理 1 的证明从略.

引理 2. 如果 $g \in \mathfrak{F}(f, T_n(\mathscr{D}, f))$, 则有

$$T_{n+1}(\mathscr{D}, g) = T_{n+1}(\mathscr{D}, f). \quad (1.7)$$

证. 因为 $g \in \mathfrak{F}(f, T_n(\mathscr{D}, f))$, 所以 g 和 f 在 $T_n(\mathscr{D}, f)$ 上有相同的值, 故在 $T_i(\mathscr{D}, f)$ ($i \leq n$) 上有相同的值. 也就是说 $s(f, T_i(\mathscr{D}, f))$ 和 $s(g, T_i(\mathscr{D}, f))$ 是同一个可允许函数. 一开始, 我们有

$$T_1(\mathscr{D}, g) = \varphi_1(s_0) = T_1(\mathscr{D}, f),$$

现在假定 $T_i(\mathscr{D}, g) = T_i(\mathscr{D}, f)$, $i \leq n$, 那么,

$$\begin{aligned} T_{i+1}(\mathscr{D}, g) &= T_i(\mathscr{D}, g) \cup \varphi_{i+1}(s(g, T_i(\mathscr{D}, g))) \\ &= T_i(\mathscr{D}, f) \cup \varphi_{i+1}(s(g, T_i(\mathscr{D}, f))) \\ &= T_i(\mathscr{D}, f) \cup \varphi_{i+1}(s(f, T_i(\mathscr{D}, f))) \\ &= T_{i+1}(\mathscr{D}, f). \end{aligned}$$

这样就证明了引理 2.

现在,我们令

$$[\mathcal{P}, f, n] = [f, T_n(\mathcal{P}, f)], \quad (1.8)$$

它代表在 n 批试验之后的剩余区间. 根据引理 1, $[\mathcal{P}, f, n] \cap T_n(\mathcal{P}, f) = [f, T_n(\mathcal{P}, f)] \cap T_n(\mathcal{P}, f)$ 不超过三个点, 包括 $[\mathcal{P}, f, n]$ 的两个端点 a_1 和 b_1 在内. 如果还有一个点, 就记为 c_1 , 我们令

$$[\mathcal{P}, f, n]' = \begin{cases} [a_1, b_1], & \text{如果 } c_1 \text{ 不存在,} \\ [a_1, c_1], & \text{如果 } c_1 \text{ 存在且 } c_1 - a_1 \geq b_1 - c_1, \\ [c_1, b_1], & \text{如果 } c_1 \text{ 存在且 } c_1 - a_1 < b_1 - c_1, \end{cases} \quad (1.9)$$

于是, $[\mathcal{P}, f, n]' \cap T_n(\mathcal{P}, f)$ 恰包含两个点, 即 $[\mathcal{P}, f, n]'$ 的端点. 再定义

$$\Delta(\mathcal{P}, f, 0) = \delta(\mathcal{P}, f, 0) = b - a, \quad (1.10)$$

$$\Delta(\mathcal{P}, f, n) = |[\mathcal{P}, f, n]'| \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (1.10)$$

$$\delta(\mathcal{P}, f, n) = |[\mathcal{P}, f, n]| \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad (1.11)$$

$$\Delta(\mathcal{P}, n) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \Delta(\mathcal{P}, f, n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \quad (1.12)$$

$$\delta(\mathcal{P}, n) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \delta(\mathcal{P}, f, n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (1.13)$$

定义 3. $\delta(\mathcal{P}, n)$ 称为策略 $\mathcal{P}$ 在 n 批试验之后的精度.

定义 4. 如果策略 $\mathcal{W}$ 对任何策略 $\mathcal{P}$ 当 n 充分大后都有 $\delta(\mathcal{W}, n) \leq \delta(\mathcal{P}, n)$, 就称 $\mathcal{W}$ 为一个最优策略.

定义 5. 序列 $K = \{k_n\}$ 称为正规的, 如果其中有无穷多个奇数, 或者 k_1 是奇数而其余全是偶数.

二、递推的矩阵不等式

引理 3. $[\mathcal{P}, f, n] \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, f)$ 不超过 $k_{n+1} + 3$ 个点, $[\mathcal{P}, f, n]' \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, f)$ 不超过 $k_{n+1} + 2$ 个点.

证. 因为

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, f, n] \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, f) &= [\mathcal{P}, f, n] \cap \{T_n(\mathcal{P}, f) \cup \varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathcal{P}, f)))\} \\ &\subseteq \{[\mathcal{P}, f, n] \cap T_n(\mathcal{P}, f)\} \cup \varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathcal{P}, f))). \end{aligned}$$

根据引理 1, $[\mathcal{P}, f, n] \cap T_n(\mathcal{P}, f) = [f, T_n(\mathcal{P}, f)] \cap T_n(\mathcal{P}, f)$ 最多只有三个点, 而 $\varphi_{n+1}(s(f, T_n(\mathcal{P}, f)))$ 最多只有 k_{n+1} 个不同点, 故 $[\mathcal{P}, f, n] \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, f)$ 最多只有 $k_{n+1} + 3$ 个点. 引理 3 的另一半可以同样证明.

引理 4. 设

$$[\mathcal{P}, f, n] \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, f) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t\},$$

则存在 $g, h \in \mathfrak{F}$, 使

$$\Delta(\mathcal{P}, h, n+1) \geq \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t-1, \quad (2.1)$$

$$\delta(\mathcal{P}, g, n+1) \geq \alpha_{i+2} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t-2. \quad (2.2)$$

证. 因为 $\alpha_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, t-2)$ 是 $[\mathcal{P}, f, n]$ 的内点, 故也是 $[f, T_n(\mathcal{P}, f)]$ 的内点, 根据引理 1, 存在单峰函数 $g_i \in \mathfrak{F}(f, T_n(\mathcal{P}, f))$, 使 g_i 在 α_{i+1} 处达到极大值. 根据引理 2,

$T_{n+1}(\mathcal{P}, g_i) = T_{n+1}(\mathcal{P}, f)$. 因为 $g_i(\alpha_i) < g_i(\alpha_{i+1}) > g_i(\alpha_{i+2})$, 根据引理 1 有

$$[g_i, T_{n+1}(\mathcal{P}, f)] = [\alpha_i, \alpha_{i+2}].$$

故得

$$[\mathcal{P}, g_i, n+1] = [g_i, T_{n+1}(\mathcal{P}, g_i)] = [g_i, T_{n+1}(\mathcal{P}, f)] = [\alpha_i, \alpha_{i+2}].$$

所以

$$\delta(\mathcal{P}, g_i, n+1) = \alpha_{i+2} - \alpha_i,$$

$$\Delta(\mathcal{P}, g_i, n+1) = \max\{\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1} - \alpha_i\}.$$

于是可在 g_i 中取 g 及 h , 使

$$\delta(\mathcal{P}, g, n+1) \geq \alpha_{i+2} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, t-2,$$

$$\Delta(\mathcal{P}, h, n+1) \geq \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, t-1.$$

引理 5. 如果 $k_{n+1} = 2i$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则对任何 $g, h \in \mathfrak{F}$, 存在 $g', h' \in \mathfrak{F}$, 使得

$$\Delta(\mathcal{P}, h, n) \leq \Delta(\mathcal{P}, h', n+1) + i\delta(\mathcal{P}, g', n+1), \quad (2.3)$$

$$\delta(\mathcal{P}, g, n) \leq (i+1)\delta(\mathcal{P}, g', n+1). \quad (2.4)$$

证. 设

$$[\mathcal{P}, g, n] \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, g) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_t\}.$$

根据引理 3, $t \leq 2i+3$. 不妨设 $t = 2i+3$, 于是根据引理 4, 可取到 $g'_1 \in \mathfrak{F}$, 使

$$\delta(\mathcal{P}, g'_1, n+1) \geq \max\{\alpha_{i+2} - \alpha_i | i = 1, 2, \dots, t-2\}.$$

所以

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{P}, g, n) &= \alpha_t - \alpha_1 = (\alpha_{2i+3} - \alpha_{2i+1}) + (\alpha_{2i+1} - \alpha_{2i-1}) + \dots + (\alpha_3 - \alpha_1) \\ &\leq (i+1)\delta(\mathcal{P}, g'_1, n+1). \end{aligned}$$

若 $t < 2i+3$, 不等式更应成立. 再设

$$[\mathcal{P}, h, n]' \cap T_{n+1}(\mathcal{P}, h) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_t\}.$$

根据引理 3, $t \leq 2i+2$. 不妨设 $t = 2i+2$, 根据引理 4, 可取到 h', g'_2 使

$$\Delta(\mathcal{P}, h', n+1) \geq \max\{\alpha_{i+1} - \alpha_i | i = 1, 2, \dots, t-1\},$$

$$\delta(\mathcal{P}, g'_2, n+1) \geq \max\{\alpha_{i+2} - \alpha_i | i = 1, 2, \dots, t-2\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{P}, h, n) &= \alpha_t - \alpha_1 = (\alpha_{2i+2} - \alpha_{2i+1}) + (\alpha_{2i+1} - \alpha_{2i-1}) + \dots + (\alpha_3 - \alpha_1) \\ &\leq \Delta(\mathcal{P}, h', n+1) + i\delta(\mathcal{P}, g'_2, n+1). \end{aligned}$$

取 g' 为 g'_1 和 g'_2 中 $\delta(\mathcal{P}, g'_j, n+1)$, $j = 1, 2$ 值较大者, 就有

$$\Delta(\mathcal{P}, h, n) \leq \Delta(\mathcal{P}, h', n+1) + i\delta(\mathcal{P}, g', n+1),$$

$$\delta(\mathcal{P}, g, n) \leq (i+1)\delta(\mathcal{P}, g', n+1).$$

用同样的方法可以证明

引理 6. 如果 $k_{n+1} = 2i-1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则对任何 $g, h \in \mathfrak{F}$, 都存在 $g', h' \in \mathfrak{F}$, 使得

$$\Delta(\mathcal{P}, h, n) \leq i\delta(\mathcal{P}, g', n+1), \quad (2.5)$$

$$\delta(\mathcal{P}, g, n) \leq \Delta(\mathcal{P}, h', n+1) + i\delta(\mathcal{P}, g', n+1). \quad (2.6)$$

定义矩阵

$$C(2i) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}, \quad C(2i-1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

从引理 5 及引理 6 立刻得到

引理 7. 对任何策略 $\mathcal{P}$, 存在 $g_n, h_n \in \mathfrak{F}(n = 0, 1, 2, \dots)$, 使得

$$\left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, h_n, n)}{\delta(\mathcal{P}, g_n, n)} \right) \leq C(k_{n+1}) \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, h_{n+1}, n+1)}{\delta(\mathcal{P}, g_{n+1}, n+1)} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

令 $Z_n = \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, n)}{\delta(\mathcal{P}, n)} \right) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, f, n)}{\delta(\mathcal{P}, f, n)} \right)$, 由引理 5 及引理 6 得到:

引理 8. Z_n 满足不等式组

$$\mathfrak{B}: Z_n \leq C(k_{n+1})Z_{n+1}, \quad (0, 1)Z_n \geq (1, 0)Z_n \geq 0, \quad (1, 0)Z_0 = b - a \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

三、最优策略的构造

设 $W_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 满足下列方程

$$\mathfrak{A}: W_n = C(k_{n+1})W_{n+1}, \quad (0, 1)W_n \geq (1, 0)W_n \geq 0, \quad (1, 0)W_0 = b - a \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

我们将在第六节证明 $\mathfrak{A}$ 的解的存在唯一性, 本节不妨假定解的存在性已获证明, 进而讨论最优策略的构造.

引理 9. $2x_n \geq y_n \geq x_n > 0$. (3.1)

若 k_m 是一个奇数, 则 $y_n > x_n (n < m)$. 若 k_m 是 K 中最后一个奇数, 则 $y_n = x_n (n \geq m)$. 证. 从方程 $\mathfrak{A}$ 得到

$$2x_n - y_n = (2, -1)C(k_{n+1}) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \geq \begin{cases} 2x_{n+1} \geq 0, & \text{当 } k_{n+1} \text{ 是偶数,} \\ y_{n+1} - x_{n+1} \geq 0, & \text{当 } k_{n+1} \text{ 是奇数,} \end{cases} \quad (3.2)$$

故有 $2x_n \geq y_n \geq x_n \geq 0$. 若 $x_n = 0$, 则 $y_n = 0$. 从方程 $\mathfrak{A}$ 推知 $x_0 = b - a = 0$, 这不可能, 故 $x_n > 0$. 这就证明了 (3.1) 式.

我们观察

$$y_n - x_n = (-1, 1)C(k_{n+1}) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} y_{n+1} - x_{n+1}, & \text{当 } k_{n+1} \text{ 是偶数,} \\ x_{n+1} > 0, & \text{当 } k_{n+1} \text{ 是奇数,} \end{cases} \quad (3.3)$$

故若 $y_n - x_n = 0$, 则 k_{n+1} 是偶数, 且 $y_{n+1} - x_{n+1} = 0$. 因此对一切整数 $j \geq 0$, k_{n+j} 全是偶数, 而且 $y_{n+j} - x_{n+j} = 0$. 所以当 k_m 是奇数时, 对 $n < m$, 有 $y_n > x_n$.

若 k_m 是最后一个奇数, $k_{m+j+1} (j \geq 0)$ 全是偶数, 则有

$$y_{m+j} = \left(\frac{k_{m+j+1}}{2} + 1 \right) y_{m+j+1} \quad (j \geq 0). \quad (3.4)$$

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 对任一 $\epsilon > 0$, 有 $j \geq 0$, 使 $y_{m+j} < \epsilon$. 从 (3.3) 式得到

$$0 \leq y_m - x_m = y_{m+j} - x_{m+j} \leq y_{m+j} < \epsilon.$$

所以 $y_m - x_m = 0$, 从而 $y_{m+j} = x_{m+j} (j \geq 0)$. 引理 9 证毕.

现在, 如果 K 中有无穷多个奇数, 则 $y_n > x_n$, 就可以在长为 $b - a$ 的区间上按照下列规则 $\mathfrak{R}$ 定义一个策略 $\mathcal{W}$.

$\mathfrak{R}$: 在第 n 批试验时, 把试验点分配得使上批试验后的剩余区间恰被分成大小相间的段, 大段长为 x_n , 小段长为 $y_n - x_n$.

为了说明 $\mathfrak{R}$ 的合理, 需要证明下列的命题.

命题 1. 如果 K 中有无穷多个奇数, 且 $W_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的解, 则 $\mathfrak{R}$ 确实能在长为 $b - a$ 的初始区间上定义一个优选策略 $\mathscr{W}$, 满足

$$\Delta(\mathscr{W}, n) = x_n, \quad \delta(\mathscr{W}, n) = y_n \quad (n \geq 1), \quad (3.5)$$

$$\Delta(\mathscr{W}, 0) = x_0 = b - a. \quad (3.6)$$

证. 在第一批试验时, 如果 $k_1 = 2i$, 则

$$x_0 = b - a = x_1 + iy_1 = (i + 1)x_1 + i(y_1 - x_1). \quad (3.7)$$

于是我们可以选择 $2i$ 个分点, 使得长为 x_0 的区间被分成 $2i + 1$ 段, 其中有 $i + 1$ 段(大段)长为 x_1 , 有 i 段(小段)长为 $y_1 - x_1$, 并且可以一大一小相间排列(见图 1).

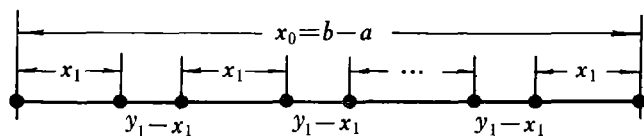


图 1 $k_1 = 2i$ 时, 按规则 $\mathfrak{R}$ 第一批应取的 $2i$ 个试验点

如果 $k_1 = 2i - 1$, 则

$$x_0 = b - a = iy_1 = ix_1 + i(y_1 - x_1). \quad (3.8)$$

于是我们可以选择 $2i - 1$ 个分点, 把初始区间分成大小相间的 $2i$ 段, 大段长为 x_1 , 小段长为 $y_1 - x_1$. (见图 2).

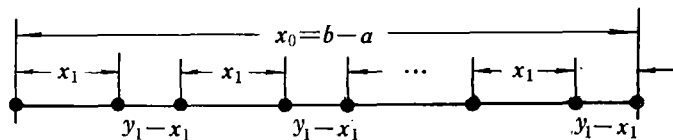


图 2 $k_1 = 2i - 1$ 时, 按规则 $\mathfrak{R}$ 第一批应取的 $2i - 1$ 个试验点

这样一来, 在第一批试验之后, 根据引理 1, 剩余区间的长度为 $x_1 + (y_1 - x_1) = y_1$ (容易看出, 如果剩余区间的长度是 x_1 或 $y_1 - x_1$, 可以把它适当放宽到 y_1 这么长), 而且中间有一已试点, 把剩余区间分成长为 x_1 和 $y_1 - x_1$ 的两部分.

设在第 $n - 1$ 步后剩余区间的长为 y_{n-1} , 中间有一已试点, 把剩余区间分成长为 x_{n-1} 和 $y_{n-1} - x_{n-1}$ 的两段. 当 $k_n = 2i$ 时,

$$\begin{cases} x_{n-1} = x_n + iy_n = (i + 1)x_n + i(y_n - x_n), \\ y_{n-1} - x_{n-1} = (i + 1)y_n - (x_n + iy_n) = (y_n - x_n). \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\quad (3.10)$$

当 $k_n = 2i - 1$ 时,

$$\begin{cases} x_{n-1} = iy_n = ix_n + i(y_n - x_n), \\ y_{n-1} - x_{n-1} = (x_n + iy_n) - iy_n = x_n. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\quad (3.12)$$

无论在那种情况, 我们总可以选择 k_n 个分点, 使它们连同原来的已试点, 恰把剩余区间分成 $k_n + 2$ 个大小相间的段, 大段长为 x_n , 小段长为 $y_n - x_n$ (见图 3 和图 4). 于是第 n 批试验后, 剩余区间的长度就是 $x_n + (y_n - x_n) = y_n$. 中间有一已试点, 把区间分成长为 x_n 和 $y_n - x_n$ 的两部分.

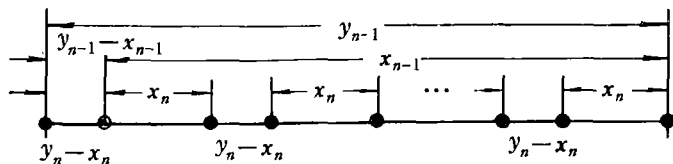


图 3 当 $k_n = 2i$ 时,按规则 $\mathcal{R}$ 第 n 批应取的 $2i$ 个试验点
(其中 $\circ$ 处是已试点)

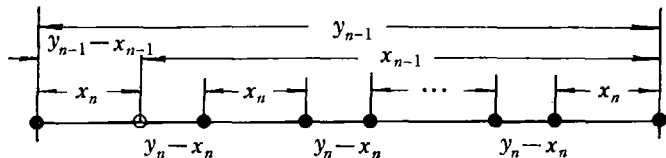


图 4 当 $k_n = 2i - 1$ 时,按规则 $\mathcal{R}$ 第 n 批应取的 $2i - 1$ 个试验点
(其中 $\circ$ 处是已试点)

这样,就归纳地证明了命题 1. 不难按照定义 2,用一组映射 φ_n 的形式把 $\mathcal{W}$ 写出来.

当 K 中只有 k_i 是奇数时,我们可以在长为 $b - a$ 的区间上按照下列规则 $\mathcal{R}'$ 定义一个策略 $\mathcal{W}$:

$\mathcal{R}'$: 每次都把剩余区间等分.

命题 2. 设 $k_1 = 2i_1 + 1$, $k_n = 2i_n$ ($n \geq 2$), 则可根据规则 $\mathcal{R}'$ 设计一个策略 $\mathcal{W}$, 使得 $\delta(\mathcal{W}, n) = y_n$.

证. 第一批试验点应取为:

$$a + \frac{b-a}{2(i_1+1)}, a + \frac{b-a}{2(i_1+1)} \cdot 2, \dots, a + \frac{b-a}{2(i_1+1)} (2i_1+1).$$

剩余区间 $[a_1, b_1]$ 长为 $\frac{b-a}{i_1+1} = x_0/(i_1+1) = y_1$, 在中点处已作过一次试验. 在第二批试验时(包括中间已试点),取分点为:

$$a_1 + \frac{b_1-a_1}{2(i_2+1)}, a_1 + \frac{b_1-a_1}{2(i_2+1)} \cdot 2, \dots, a_1 + \frac{b_1-a_1}{2(i_2+1)} (2i_2+1).$$

故剩余区间 $[a_2, b_2]$ 长为 $\frac{b_1-a_1}{i_2+1} = y_1/(i_2+1) = y_2$. 利用归纳法就证明了命题 2.

命题 3. 若 K 不正规,则对任一 $\theta < 1$, 存在一个策略 $\mathcal{W}_\theta$, 使当 n 充分大后有

$$\theta \delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq y_n.$$

证. 令 $e^{-\epsilon} = \theta$, 于是 $\epsilon > 0$. 设 K 中最后一个奇数是 k_m . 令 $k_m = 2i_0 - 1$, $k_{m+j} = 2i_j$ ($j > 0$). 我们这样设计策略 $\mathcal{W}_\theta$: 从第一步到第 $m-1$ 步, 按照规则 $\mathcal{R}$ 进行. 根据命题 1, 这个规则在头 $m-1$ 步是可行的, 而且第 $m-1$ 批试验之后, 剩余区间的长度是 y_{m-1} , 中间还有一已试点, 把它分成长 x_{m-1} 和 $y_{m-1} - x_{m-1}$ 的两段. 但是据引理 9,

$$\begin{cases} y_{m-1} = x_m + i_0 y_m = (i_0 + 1) x_m = (i_0 + 1) y_m, \\ y_{m-1} - x_{m-1} = x_m = y_m. \end{cases} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

设在第 $m-1$ 步后, 剩余区间为 $[a_{-1}, b_{-1}]$, $b_{-1} = a_{-1} + (i_0 + 1) x_m$. 我们这样设计: 第 m 步的 $2i_0 - 1$ 个分点为:

$$a_{-1} + x_m + \epsilon_0, a_{-1} + 2x_m, a_{-1} + 2x_m + \epsilon_0, \dots, a_{-1} + i_0 x_m + \epsilon_0.$$

这里 $\epsilon_0 = y_m \epsilon / 2$. 于是第 m 步后的剩余区间长度不超过

$$x_m + \epsilon_0 = y_m + \epsilon_0 = y_m(1 + \epsilon/2). \quad (3.15)$$

在第 $m+j$ 步, 设上批试验后的剩余区间为 $[a_{j-1}, b_{j-1}]$, 取 $\epsilon_j = \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1} \cdot \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$, $k_{m+j} = 2i_j$ 个分点这样取:

$$a_{j-1} + \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1}, a_{j-1} + \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1} + \epsilon_j, \\ a_{j-1} + 2 \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1}, \dots, a_{j-1} + i_j \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1} + \epsilon_j,$$

于是, 在 $m+j$ 批试验之后, 剩余区间的长度不超过

$$\begin{aligned} \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1} + \epsilon_j &= \frac{b_{j-1} - a_{j-1}}{i_j + 1} \left(1 + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &\leq \frac{1 + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}}{i_j + 1} \cdot \frac{1 + \frac{\epsilon}{2^j}}{i_{j-1} + 1} (b_{j-2} - a_{j-2}) \\ &\leq \left(\prod_{v=0}^j \frac{1 + \frac{\epsilon}{2^{v+1}}}{i_v + 1}\right) (b_{-1} - a_{-1}) \\ &= \left(\prod_{v=0}^j \frac{1 + \frac{\epsilon}{2^{v+1}}}{i_v + 1}\right) y_{m-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

但是从 $\mathfrak{A}$ 得到

$$y_{m+j} = \left(\prod_{v=0}^j \frac{1}{i_v + 1}\right) y_{m-1}. \quad (3.17)$$

故

$$\frac{\delta(\mathcal{W}_\theta, m+j)}{y_{m+j}} \leq \prod_{v=0}^j \left(1 + \frac{\epsilon}{2^{v+1}}\right) < \prod_{v=0}^j e^{\frac{\epsilon}{2^{v+1}}} < \prod_{v=0}^{\infty} e^{\frac{\epsilon}{2^{v+1}}} = e^\epsilon = \theta^{-1}. \quad (3.18)$$

于是

$$\theta \delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq y_n.$$

上面的证明对于 K 中不存在任何奇数的特殊情况也是适用的. 不难按照定义 2, 用一组映射 φ_n 的形式把 $\mathcal{W}_\theta$ 写出来.

四、限定做 m 批试验的情况

本文主要讨论批数不限的情况, 但是从引理 8 和命题 1 很容易推出批数限定情况下的基本定理, 顺便叙述如下: 设 Δ 和 δ 是满足

$$\Delta \geq \delta - \Delta > 0 \quad (4.1)$$

的两个实数, 对 $n \leq m$, 令

$$F(\Delta, \delta, n, m) = C(k_{n+1})C(k_{n+2}) \cdots C(k_m) \left(\frac{\Delta}{\delta}\right) = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = W_{nm}, \quad (4.2)$$

显然, $W_{nm} (n = 0, 1, 2, \dots, m)$ 满足

$$\mathfrak{W}: W_n = C(k_{n+1})W_{n+1}, (0,1)W_n \geq (1,0)W_n \geq 0 \quad (n = 0, 1, \dots, m-1).$$

采用引理 9 同样的证明方法及条件 (4.1), 容易知道

$$x_n \geq y_n - x_n > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m). \quad (4.3)$$

根据命题 1 的论断, 我们从 W_{nm} ($n = 0, 1, 2, \dots, m$), 遵照规则 $\mathfrak{R}$, 可构造出一个策略 $\mathcal{F}_m(\Delta, \delta)$, 它满足 $\Delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), m) = \Delta$, $\delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), m) = \delta$, 且有 $\Delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), 0) = (1, 0)F(\Delta, \delta, 0, m)$.

另一方面, 设 $\mathcal{D}$ 满足 $\Delta(\mathcal{D}, m) \leq \Delta$, $\delta(\mathcal{D}, m) \leq \delta$, 则根据引理 8, 应该有

$$\Delta(\mathcal{D}, 0) \leq (1, 0)C(k_1)C(k_2) \cdots C(k_m) \left(\frac{\Delta}{\delta} \right) = (1, 0)F(\Delta, \delta, 0, m). \quad (4.4)$$

于是我们得到:

定理 1. 设 Δ, δ 满足 (4.1) 式, 则策略 $\mathcal{F}_m(\Delta, \delta)$ 满足:

$$\Delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), m) = \Delta, \delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), m) = \delta, \quad (4.5)$$

$$\Delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), 0) = (1, 0)F(\Delta, \delta, 0, m). \quad (4.6)$$

而且对任何满足

$$\Delta(\mathcal{D}, m) \leq \Delta, \quad \delta(\mathcal{D}, m) \leq \delta \quad (4.7)$$

的策略 $\mathcal{D}$, 都有

$$\Delta(\mathcal{D}, 0) \leq \Delta(\mathcal{F}_m(\Delta, \delta), 0). \quad (4.8)$$

定理 1 有各种推论和变形. 例如:

推论 1. 设初始区间的长度为 L , 并规定两试验点的距离不得小于 d (分辨距离), 设 t 为一次方程

$$(1, 0)F(t - d, t, 0, m) = L \quad (4.9)$$

的解, $\mathcal{D}$ 为任意策略, 则有

(1) 如果 $t \geq 2d$, 则

$$\delta(\mathcal{D}, m) \geq t = \delta(\mathcal{F}_m(t - d, t), m), \quad (4.10)$$

(2) 如果 $t < 2d$, 则

$$\delta(\mathcal{D}, m) \geq 2d,$$

而且确有 $\mathcal{D}$ 使等号成立.

推论 2. 设初始区间的长度为 L , r 为一次方程

$$(1, 0)F(r, 2r, 0, m) = L \quad (4.11)$$

的解, $\mathcal{D}$ 为任意试验策略, 则

$$\Delta(\mathcal{D}, m) \geq r = \Delta(\mathcal{F}_m(r, 2r), m). \quad (4.12)$$

推论 1 和推论 2 按不同的标准 (δ 或 Δ) 给出了批数限定情况下的最优策略 ($\mathcal{F}_m(t-d, t)$ 或 $\mathcal{F}_m(r, 2r)$).

五、进一步的一组不等式

引理 10. 设 $\alpha, \beta, x, y, z, u, v, w$ 都是正实数, 满足

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y \leq z, \\ \alpha u + \beta v \geq w. \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\quad (5.2)$$

则 $\alpha^2 xu > \beta^2 yv$ 或 $x^2 uv \geq w^2 xy$ 或 $vz > wy$.

证. 设 $\alpha^2xu \leq \beta^2yv$, 且 $wy \geq vz$, 则有

$$\begin{aligned}\beta vz &\geq \beta v(\alpha x + \beta y) = \alpha\beta xv + \beta^2yv \geq \alpha\beta xv + \alpha^2xu \\ &= \alpha x(\alpha v + \beta v) \geq \alpha xw\end{aligned}\quad (5.3)$$

把 (5.2) 和 (5.1) 式分别乘以 z 和 w , 然后相减得:

$$\begin{aligned}\alpha uz - \alpha xw &\geq \beta yw - \beta vz, \\ \alpha uz &\geq \alpha xw + \beta yw - \beta vz, \\ \frac{uz}{xw} &\geq 1 + \frac{\beta}{\alpha xw} (yw - vz).\end{aligned}\quad (5.4)$$

因为假定 $yw - vz \geq 0$ 及 (5.3) 式成立, 故有

$$\frac{uz}{xw} \geq 1 + \frac{\beta}{\beta vz} (yw - vz) = \frac{yw}{vz}$$

所以 $z^2uv \geq w^2xy$. 引理 10 证毕.

设 $W_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的解, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ 满足不等式组 $\mathfrak{B}$. 令

$$\mu(m, n) = \frac{v_n x_m}{u_m y_n}, \quad (5.5)$$

$$\lambda(m, n) = \frac{v_n y_m}{v_m y_n}, \quad (5.6)$$

$$\rho(m, n) = \frac{u_n x_m}{u_m x_n}, \quad (5.7)$$

显然有下列的引理.

引理 11.

$$\lambda(m, l)\lambda(l, n) = \lambda(m, n), \quad (5.8)$$

$$\rho(m, l)\rho(l, n) = \rho(m, n), \quad (5.9)$$

$$\mu(m, l)\lambda(l, n) = \mu(m, n), \quad (5.10)$$

$$\rho(m, l)\mu(l, n) = \mu(m, n). \quad (5.11)$$

引理 12. 如果 $k_{n+1} = 2i$, 则

$$\lambda(n, n+1) \geq 1, \quad (5.12)$$

$$\mu(n, n+1) \geq i/(i+1) \geq \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

如果 $k_{n+1} = 2i - 1$, 则

$$\lambda(n, n+1) \geq i/(i+1) \geq \frac{1}{2}, \quad (5.14)$$

$$\mu(n, n+1) \geq 1. \quad (5.15)$$

证. 当 $k_{n+1} = 2i$ 时, $y_n = (i+1)y_{n+1}$, $v_n \leq (i+1)v_{n+1}$, 故 $\lambda(n, n+1) = v_{n+1}y_n/v_n y_{n+1} \geq 1$. 同时, 从 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{B}$ 又可得到

$$x_{n+1}/x_n + iy_{n+1}/x_n = 1, \quad (5.16)$$

$$u_{n+1}/u_n + iv_{n+1}/u_n \geq 1, \quad (5.17)$$

两式相减得

$$i \left(\frac{y_{n+1}}{x_n} - \frac{v_{n+1}}{u_n} \right) \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{u_n}.$$

所以 $i \frac{y_{n+1}}{x_n} \leq (i+1) \frac{v_{n+1}}{u_n}$ 或

$$\mu(n, n+1) \geq i/(i+1) \geq \frac{1}{2}.$$

引理 12 的另一半可同样证明.

引理 13. 如果 $\lambda(n, n+1) < 1$, 则 $\mu^{-1}(n+1, n) \geq \lambda^{-1}(n, n+1)$. 如果 $\mu(n, n+1) < 1$, 则 $\rho(n, n+1) \geq \mu^{-1}(n, n+1)$.

证. 如果 $\lambda(n, n+1) < 1$, 根据引理 12, k_{n+1} 是奇数, 设 $k_{n+1} = 2i - 1$. 这时

$$\begin{cases} x_{n+1} + i y_{n+1} = y_n, \\ u_{n+1} + i v_{n+1} \geq v_n. \end{cases}$$

根据引理 10, 应当有 $1^2 \cdot x_{n+1} u_{n+1} > i^2 y_{n+1} v_{n+1}$, 或者 $y_{n+1}^2 u_{n+1} v_{n+1} \geq v_n^2 x_{n+1} y_{n+1}$, 或者 $v_{n+1} y_n > y_{n+1} v_n$. 但因 $x_{n+1} \leq y_{n+1}$, $u_{n+1} \leq v_{n+1}$, $1 \leq i$, 故第一式不能成立. 又因 $\lambda(n, n+1) < 1$, 第三式也不能成立. 故只能第二式成立, 也就是

$$\mu^{-1}(n+1, n) \geq \lambda^{-1}(n, n+1).$$

引理 13 的另一半可以同样证明.

引理 14. 设 $c > 0$, $a_i \geq 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

$$A_i \geq \max\{a_1 a_2 \cdots a_i a_{i+1}^{-1}, a_1 a_2 \cdots a_i c\}$$

则或者存在一个 $\theta < 1$, 使当 n 充分大后有 $A_n \geq \theta^{-1}$, 或者 $a_i \equiv 1$.

证. 设有 j , 使 $a_j > 1$. 令 $B_i = a_1 a_2 \cdots a_i$. 因为 $a_i \geq 1$, 所以 $\lim_{i \rightarrow \infty} B_i = B \geq 1$. 如果 $B = \infty$, 则因 $A_i \geq B_i c$, 故 $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \infty$, 引理为真. 故可设 $B < \infty$, 这时 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{-1} = 1$. 可以找到 $N > 0$, 当 $n \geq N$ 后便有 $a_n^{-1} \geq a_j^{-1/2}$. 于是当 $n \geq \max\{N, j\}$ 后就有

$$A_n \geq a_1 a_2 \cdots a_j \cdots a_n a_{n+1}^{-1} \geq a_j \cdot a_j^{-1/2} = a_j^{1/2} > 1.$$

取 $\theta = a_j^{-1/2} < 1$, 便得到我们的结论.

引理 15. 如果存在 m , 使对一切 $j \geq 0$ 均有 $\mu(m+j, m+j+1) < 1$, 则存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大后有

$$\mu(m, n) > \theta^{-1}.$$

证. 根据引理 13, 我们有

$$\rho(m+j, m+j+1) \geq \mu^{-1}(m+j, m+j+1) \quad (j \geq 0). \quad (5.18)$$

所以从引理 11

$$\begin{aligned} \mu(m, n) &= \rho(m, n-1) \mu(n-1, n) \\ &= \rho(m, m+1) \rho(m+1, m+2) \cdots \rho(n-2, n-1) \mu(n-1, n) \\ &\geq \mu^{-1}(m, m+1) \mu^{-1}(m+1, m+2) \cdots \mu^{-1}(n-2, n-1) \mu(n-1, n). \end{aligned}$$

令 $a_i = \mu^{-1}(m+i-1, m+i)$, 根据引理 12, $1 < a_i \leq 2$, 于是

$$\mu(m, m+1+i) \geq \max\{a_1 a_2 \cdots a_i a_{i+1}^{-1}, a_1 a_2 \cdots a_i / 2\}.$$

故引理 14 可以应用, 所以存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大后就有

$$\mu(m, n) > \theta^{-1}.$$

引理 16. 如果引理 15 的条件不成立(即那样的 m 不存在), 并且设 $\lambda(m, m+1) < 1$. 这时必有唯一的一个 $m' > m+1$, 使对一切 $j: m < j < m'-1$, 有 $\mu(j, j+1) < 1$, 但是 $\mu(m'-1, m') \geq 1$. 我们有:

$$(1) \quad \lambda(m, m') \geq \lambda^{-1}(m, m+1) > 1, \quad (5.19)$$

$$(2) \quad \lambda(m, j) \geq \lambda(m, m+1) \quad (m < j \leq m'). \quad (5.20)$$

证. 根据引理 13, $\mu^{-1}(m+1, m) \geq \lambda^{-1}(m, m+1)$. 同时, 对满足 $m < j < m'-1$ 的 j 有 $\rho(j, j+1) \geq \mu^{-1}(j, j+1) > 1$. 根据引理 12, k_{j+1} 都是偶数, 因此 $\lambda(j, j+1) \geq 1$. 于是

$$\lambda(m, j+1) = \lambda(m, m+1)\lambda(m+1, m+2) \cdots \lambda(j, j+1) \geq \lambda(m, m+1).$$

其中 j 适合 $m < j < m'-1$. 又 $j = m$ 时, 上式显然也成立. 把 $j+1$ 改写为 j , 就得到 (2). 根据引理 11 可以写为

$$\begin{aligned} \lambda(m, m') &= \mu^{-1}(m'-1, m)\mu(m'-1, m') \geq \mu^{-1}(m'-1, m) \\ &= \mu^{-1}(m+1, m)\rho(m+1, m'-1) \\ &\geq \lambda^{-1}(m, m+1)\rho(m+1, m+2)\rho(m+2, m+3) \cdots \rho(m'-2, m'-1) \\ &\geq \lambda^{-1}(m, m+1)\mu^{-1}(m+1, m+2)\mu^{-1}(m+2, m+3) \cdots \mu^{-1}(m'-2, m'-1) \\ &\geq \lambda^{-1}(m, m+1). \end{aligned}$$

这就证明了 (1). 引理 16 得证.

引理 17. 对任一自然数 $m_1 \geq 0$, 或者存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大后有 $\lambda(m_1, n) > \theta^{-1}$, 或者对一切 $n \geq m_1$ 有 $\lambda(m_1, n) = 1$.

证. 设 m 是一个自然数, 如果 $\lambda(m, m+1) \geq 1$, 我们就称 $m+1$ 为 m 的直接后继者. 如果 $\lambda(m, m+1) < 1$, 则 m 的直接后继者不存在. 但若这时满足引理 16 条件的 m' 存在, 就说 m' 是 m 的间接后继者. 令 m_1 的后继者为 m_2 , m_2 的后继者为 m_3 , $\cdots$. 这时一般地有 $\lambda(m_i, m_{i+1}) \geq 1$, 并且等号仅在 $m_{i+1} = m_i + 1$ 也即 m_{i+1} 是 m_i 的直接后继者时才有可能成立.

首先, 设到某一个 m_k 之后, m_k 的后继者不存在了. 这时, 对一切 $j \geq 0$ 均有 $\mu(m_k + j, m_k + j + 1) < 1$, 根据引理 15, 用 $m_k + 1$ 代替 m , 就可知当 n 充分大后有 $\mu(m_k + 1, n) > \theta^{-1}$ 对某个 $\theta < 1$ 成立. 因 m_k 的直接后继者不存在, 故 $\lambda(m_k, m_k + 1) < 1$. 根据引理 13, $\mu^{-1}(m_k + 1, m_k) \geq \lambda^{-1}(m_k, m_k + 1) > 1$, 于是从引理 11 有

$$\begin{aligned} \lambda(m_1, n) &= \lambda(m_1, m_2)\lambda(m_2, m_3) \cdots \lambda(m_{k-1}, m_k)\lambda(m_k, n) \\ &= \lambda(m_1, m_2)\lambda(m_2, m_3) \cdots \lambda(m_{k-1}, m_k)\mu^{-1}(m_k + 1, m_k)\mu(m_k + 1, n). \end{aligned} \quad (5.21)$$

从 (5.19) 式知 $\lambda(m_1, m_2) \geq 1$, $\lambda(m_2, m_3) \geq 1$, $\cdots$, $\lambda(m_{k-1}, m_k) \geq 1$ (当 m_{i+1} 是 m_i 的直接后继者时等号可能成立). 就得

$$\lambda(m_1, n) \geq \mu^{-1}(m_k + 1, m_k)\mu(m_k + 1, n) > \mu(m_k + 1, n) > \theta^{-1}. \quad (5.22)$$

引理 17 为真. 故我们可以假设引理 15 中的条件不成立, 也即寻找后继者的过程可以无限继续. 设 $m_k < j + m_k \leq m_{k+1}$. 则有

$$\begin{aligned} \lambda(m_1, m_k + j) &= \lambda(m_1, m_2)\lambda(m_2, m_3) \cdots \lambda(m_{k-1}, m_k)\lambda(m_k, m_k + j) \\ &\geq \lambda(m_1, m_2)\lambda(m_2, m_3) \cdots \lambda(m_{k-1}, m_k)\lambda(m_k, m_k + 1) \\ &\geq \lambda(m_1, m_2)\lambda(m_2, m_3) \cdots \lambda(m_{k-1}, m_k)\lambda^{-1}(m_k, m_{k+1}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

以上不等式的推导用到 (5.20) 和 (5.19) 式. 令 $a_i = \lambda(m_i, m_{i+1})$. 因为 $\lambda(m_k, m_k + 1) \geq 1/2$,

故有

$$\lambda(m_1, m_k + j) \geq \max\{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k^{-1}, a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot 1/2\}. \quad (5.24)$$

令 $A_k = \max\{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k^{-1}, a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot 1/2\}$ 根据引理 14, 或者对一切 i 有 $a_i = \lambda(m_i, m_{i+1}) = 1$, 于是 m_{i+1} 是 m_i 的直接后继者, $m_{i+1} = m_i + 1$, $m_i = m_1 + i - 1$.

$$\lambda(m_1, n) = \lambda(m_1, m_1 + 1) \lambda(m_1 + 1, m_1 + 2) \cdots \lambda(n - 1, n) \equiv 1. \quad (5.25)$$

或者存在 $\theta < 1$, 使当 k 充分大后有 $A_k \geq \theta^{-1}$. 也即当 n 充分大后有

$$\lambda(m_1, n) \geq \theta^{-1}.$$

引理 17 证毕.

引理 18. 或者对 $n \geq 1$ 有 $\mu(0, n) \equiv 1$, 或者存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大后有 $\mu(0, n) > \theta^{-1}$.

证. 设对一切 $j \geq 0$ 均有 $\mu(j, j + 1) < 1$, 则根据引理 15, 存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大后就有 $\mu(0, n) > \theta^{-1}$. 引理 18 为真. 故可设 l 是这样一个数: $\mu(l, l + 1) \geq 1$, 但对一切 j , $0 \leq j < l$ 都有 $\mu(j, j + 1) < 1$. 根据引理 13, $\rho(j, j + 1) \geq \mu^{-1}(j, j + 1) > 1$. 根据引理 11

$$\mu(0, l + 1) = \rho(0, 1) \rho(1, 2) \cdots \rho(l - 1, l) \mu(l, l + 1) \geq \mu(l, l + 1) \geq 1, \quad (5.26)$$

等号仅当 $l = 0$ 及 $\mu(0, 1) = 1$ 时成立. 进一步有

$$\mu(0, n) = \mu(0, l + 1) \lambda(l + 1, n) \geq \lambda(l + 1, n). \quad (5.27)$$

如果一切 $n \geq l + 1$, 有 $\lambda(l + 1, n) \equiv 1$, 并且 $l = 0$, $\mu(0, 1) = 1$, 这时 $\mu(0, n) = \mu(0, 1) \lambda(1, n) \equiv 1$. ($n \geq 1$) 如果上述三条件中有一条不成立, 易见存在 $\theta < 1$, 当 n 充分大时就有 $\mu(0, n) > \theta^{-1}$. 引理 18 证毕.

六、 $\mathfrak{U}$ 的解存在唯一

设初始区间为 $[a, b]$, Δ_m, δ_m 是满足

$$\Delta_m \geq \delta_m - \Delta_m > 0, \quad (6.1)$$

$$(1, 0)F(\Delta_m, \delta_m, 0, m) = b - a \quad (6.2)$$

的一串数对. 令 $W_{nm} = F(\Delta_m, \delta_m, n, m)$, 从 (4.2) 式知 W_{nm} ($n = 0, 1, 2, \cdots, m$) 满足 $\mathfrak{U}$. 从引理 9 可得:

$$\begin{aligned} 2(1, 0)W_{0m} &\geq (0, 1)W_{0m} > 0, \\ 2(b - a) &\geq (0, 1)W_{0m} > 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

因此, 存在自然数的子序列 m_j , 使 $(0, 1)W_{0m_j}$ 有极限. 令 $W_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} W_{0m_j}$, 但是 $W_{0,n_j} = C(k_1)W_{1m_j}$, $C(k_1)$ 又是非退化的, 故 W_{1m_j} 的极限存在, 记为 $W_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} W_{1m_j}$. 同样, 下列极限存在

$$W_n = \lim_{j \rightarrow \infty} W_{nm_j}. \quad (6.4)$$

显然, W_n ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 满足方程组 $\mathfrak{U}$. 于是我们得到:

命题 4. $\mathfrak{U}$ 的解存在.

引理 19. 设 $(1, 0)C(k_1)C(k_2)\cdots C(k_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 则 k_1 为奇数, $k_2, k_3, \cdots, k_n$ 为偶数.

证. 如果 D 是一个每个元素均大于 0 的 2×2 矩阵, 则易见 $D \cdot C(k_i)$ 和 $C(k_i)D$ 的每

一个元素均大于 0. 设 k_i 是偶数, k_{i+1} 是奇数, 易见 $C(k_i)C(k_{i+1})$ 的各元素均大于 0. 故 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 中偶数不能在奇数的前面出现. 设 k_1, k_2 是奇数, 则 $C(k_1)C(k_2)$ 的各元素均大于 0, 故最多有一个奇数. 于是 $k_2, \dots, k_n$ 全是偶数. 若 k_1 也是偶数, 易见这时有 $(1, 0)C(k_1)C(k_2) \cdots C(k_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$. 故 k_1 不能是偶数. 引理 19 证毕.

命题 5. $\mathfrak{A}$ 的解唯一.

证. 设 $W_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ 同为 $\mathfrak{A}$ 的解. 并且设 $\mu(0, n) \equiv 1$ ($n \geq 1$) 不成立. 根据引理 18, 当 n 充分大后就有 $\mu(0, n) > 1$. 因为 $\mu(0, n) = \frac{v_n x_0}{u_0 y_n} = v_n / y_n$, 故当 n 充分大后有 $v_n > y_n$. 但是 W_n 和 Z_n 的地位是对等的, 我们同样可以证明当 n 充分大后有 $y_n > v_n$, 得到矛盾. 于是只能

$$\mu(0, n) \equiv 1 \quad (n \geq 1), \quad y_n = v_n \quad (n \geq 1).$$

如果对某一 $m \geq 1$ 有 $x_m = u_m$, 则根据矩阵 $C(k_n)$ 的非退化性, 立刻可推得 $x_n = u_n$ 对一切 n 成立. 我们设对任一 $n \geq 1$, $x_n \neq u_n$. 从

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C(k_1)C(k_2) \cdots C(k_n) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = C(k_1)C(k_2) \cdots C(k_n) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

两式相减得:

$$(1, 0)C(k_1)C(k_2) \cdots C(k_n) \begin{pmatrix} x_n - u_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (6.7)$$

根据引理 19, k_1 是奇数, 而 $k_n (n \geq 2)$ 全是偶数. 根据引理 9, 当 n 充分大后, $x_n = y_n = v_n = u_n$, 得到矛盾. 故只能 $x_n = u_n$ 对一切 n 成立, 由此得到 $\mathfrak{A}$ 的解的唯一性.

因为 $F(\Delta_m, \delta_m, 0, m)$ 的任何一个极限点都给出 $\mathfrak{A}$ 的一组解, 这个解又是唯一的, 于是 $F(\Delta_m, \delta_m, 0, m) (m = 0, 1, 2, \dots)$ 只能有一个极限点. 我们得到

命题 6. 设 Δ_m, δ_m 是满足

$$\Delta_m \geq \delta_m - \Delta_m > 0, \quad (6.8)$$

$$(1, 0)F(\Delta_m, \delta_m, 0, m) = b - a \quad (6.9)$$

的一串数对. 则极限

$$W_n = \lim_{m \rightarrow \infty} F(\Delta_m, \delta_m, n, m) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

存在, 它的值与 Δ_m 和 δ_m 的选择无关, 而且是 $\mathfrak{A}$ 的唯一解.

七、基本定理

引理 20. 若 K 不正规, 则不存在策略 $\mathscr{D}$, 使

$$\delta(\mathscr{D}, n) = y_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.1)$$

其中 y_n 是 $\mathfrak{A}$ 的解中的第二个分量.

证. 设 $\mathscr{D}$ 是任一策略, 满足 (7.1) 式, 根据引理 7, 存在单峰函数 $h_n, g_n \in \mathfrak{F}$, 使得

$$\left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, h_n, n)}{\delta(\mathcal{P}, g_n, n)} \right) \leq C(k_{n+1}) \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, h_{n+1}, n+1)}{\delta(\mathcal{P}, g_{n+1}, n+1)} \right).$$

令 $Z_n = \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, h_n, n)}{\delta(\mathcal{P}, g_n, n)} \right) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, Z_n 满足 $\mathfrak{B}$. 于是, 根据引理 18, 有 i) $v_n > y_n$ 对充分大的 n 成立, 或 ii) $v_n = y_n (n \geq 1)$. 但因为 $v_n \leq \delta(\mathcal{P}, n) = y_n$, i) 不成立, 故只能 $v_n = y_n (n \geq 1)$.

设对充分大的 n 有 $u_n < x_n$, 则从

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C(k_1)C(k_2)\cdots C(k_n) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \leq C(k_1)C(k_2)\cdots C(k_n) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

两式相减, 考虑到 $u_0 = b - a = x_0$, 得到 $0 \leq (1, 0)C(k_1)C(k_2)\cdots C(k_n) \begin{pmatrix} u_n - x_n \\ 0 \end{pmatrix}$, 故

$$(1, 0)C(k_1)C(k_2)\cdots C(k_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.4)$$

由引理 19, 知 k_1 是奇数, 其余全是偶数, 于是 K 是正规的, 和题设不合. 故存在充分大的 m , 使 $u_m \geq x_m$. 从引理 9 得到 $u_m \geq x_m = y_m = v_m \geq u_m$. 故 $u_m = x_m = y_m = v_m$.

$$\Delta(\mathcal{P}, h_m, m) = x_m = y_m = v_m. \quad (7.5)$$

设 $[\mathcal{P}, h_m, m]' = [a_1, b_1]$, 再设根据策略 $\mathcal{P}$, 作用在 h_m 上 $m+1$ 步选取的不同试点为:

$$a_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_t < \alpha_{t+1} = b_1, \quad t \leq 2i_{m+1} = k_{m+1}.$$

故得

$$\begin{aligned} y_m &= \alpha_{t+1} - \alpha_0 = (\alpha_{t+1} - \alpha_{t-1}) + (\alpha_{t-1} - \alpha_{t-3}) + \cdots + (\alpha_3 - \alpha_1) \\ &\quad + (\alpha_2 - \alpha_0) + (\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\leq (i_{m+1} + 1)\delta(\mathcal{P}, m+1) + (\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= (i_{m+1} + 1)y_{m+1} + (\alpha_1 - \alpha_2) = y_m + (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

但 $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$, 则矛盾, 故这样的 $\mathcal{P}$ 不存在. 引理 20 证毕.

下面我们叙述和证明基本的定理.

定理 2. K 正规是最优策略存在的充要条件.

(1) 如果 K 正规, 则由规则 $\mathfrak{R}$ 或 $\mathfrak{R}'$ 定义的策略 $\mathcal{W}$ 是最优策略. 即对任一策略 $\mathcal{P}$, 当 n 充分大后, 就有

$$\delta(\mathcal{W}, n) \leq \delta(\mathcal{P}, n).$$

(2) 如果 K 不正规, 则最优策略不存在. 更进一步, 对任一策略 $\mathcal{P}$, 都存在一个 $\theta < 1$ 和一个策略 $\mathcal{Q}$, 使当 n 充分大后, 就有

$$\theta\delta(\mathcal{P}, n) \geq \delta(\mathcal{Q}, n).$$

但是, 对任何 $\theta < 1$, 都存在一个策略 $\mathcal{W}_\theta$, 使对任何策略 $\mathcal{P}$, 当 n 充分大后都有

$$\theta\delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq \delta(\mathcal{P}, n).$$

证. 如果 K 正规, 根据命题 1 及 2, 可构造策略 $\mathcal{W}$, 满足 $\delta(\mathcal{W}, n) = y_n$. 对任一策略 $\mathcal{P}$, $Z_n = \left(\frac{\Delta(\mathcal{P}, n)}{\delta(\mathcal{P}, n)} \right)$ 满足 $\mathfrak{B}$. 于是根据引理 18, 对充分大的 n 有 $\delta(\mathcal{P}, n) \geq y_n = \delta(\mathcal{W}, n)$.

这就证明了定理 2 的 (1).

如果 K 不正规, 根据命题 3, 有 $\mathcal{W}_\theta$, 使 $\theta\delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq y_n$. 同时对充分大的 n , 又有 $\delta(\mathcal{P}, n) \geq y_n$; 故对充分大的 n 有

$$\theta\delta(\mathcal{W}_\theta, n) \leq y_n \leq \delta(\mathcal{P}, n).$$

对于任一策略 $\mathcal{P}$, 由引理 20 知 $\delta(\mathcal{P}, n) = y_n (n \geq 1)$ 不可能成立, 故由引理 18 知存在 $\theta_1 < 1$, 当 n 充分大后, 有 $\theta_1\delta(\mathcal{P}, n) \geq y_n$, 取 θ_2 , 使得 $\theta_1 < \theta_2 < 1$, 就有

$$\theta_1\delta(\mathcal{P}, n) \geq y_n \geq \theta_2\delta(\mathcal{W}_{\theta_2}, n),$$

$$\theta\delta(\mathcal{P}, n) \geq \delta(\mathcal{Q}, n)$$

(这里 $\theta = \theta_1/\theta_2 < 1$, $\mathcal{Q} = \mathcal{W}_{\theta_2}$). 对充分大的 n 成立, 定理证毕.

在优选法的问题中, 经常遇到这样的情形: 需要在“充分近”的两点各作一次试验. 为了讨论上的方便, 我们可以把这充分近的两点就看做是在同一点上做了两次试验, 而凡是做了两重试验的点, 就算是知道了函数在这一点的增长性质.

不妨在这种意义下作一些非形式的讨论. 这时, 从定理的证明和结论中不难看出: 我们不必把 K 分为正规的和非正规的, 对任意的 K , 限定做 m 批试验时的最优策略 $\mathcal{F}_m$ 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 趋向于一个极限策略 $\mathcal{W}$, 这个极限策略 $\mathcal{W}$ 就是在极限情形下 (即在定义 4 的意义下) 的最优策略. 也就是说“最优”和“极限”两个词在这里具有某种可交换性.

本文以 $\delta(\mathcal{P}, n) = \sup_f \delta(\mathcal{P}, f, n)$ 作为精度的定义 (不妨称为 δ -精度) 开展了讨论, 同样能以 $\Delta(\mathcal{P}, n) = \sup_f \Delta(\mathcal{P}, f, n)$ 作为精度的定义 (不妨称为 Δ -精度) 开展平行的讨论. 这时, 对某些序列 K 来说, “最优”和“极限”的交换性质仍然成立. 特别, 当 $k_i \equiv 1$ 时, 可以先证明不等式

$$\Delta(\mathcal{P}, n) \leq \Delta(\mathcal{P}, n+1) + \Delta(\mathcal{P}, n+2).$$

然后逐字逐句搬用文献 [5] 中 §5 的论证, 就得到黄金分割法在 Δ -精度意义下于无穷远处的最优性. 但是应该指出, 在 Δ -精度意义下, “最优”和“极限”一般来说不一定可交换, K 非正规的情况就是不可交换的例子.

致谢: 本文承北京师范大学王世强同志和数学研究所吴方同志仔细看过, 提出了不少宝贵意见, 作者在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] Kiefer, J., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 502—506.
- [2] Avriel, M. & Wilde, D. J., *Management Sci.*, **12** (1966), 722—731.
- [3] Karp, R. M. & Miranker, W. L., *J. of Comb. Theory*, **4** (1968), 19—35.
- [4] Beamer, J. H. & Wilde, D. J., *Management Sci.*, **16** (1970), 529—541.
- [5] 洪加威, 数学的实践与认识, 1973, 2, 34—41.
- [6] 洪加威, 科学通报, **18** (1973), 2, 70—71.