

关于拓扑流形到某些欧氏空间的拓扑嵌入*

郭 景 美

(南开大学数学系, 天津)

摘 要

本文研究了拓扑流形的拓扑嵌入问题, 得出了边界为 $(k-1)$ -连通的 n 维 k -连通紧带边拓扑流形能局部平坦地整齐嵌入 D^{2n-k} , 局部平坦地嵌入 S^{2n-k-1} 的一个充分性条件 ($0 \leq k \leq 2k$), 且给出了它的一些应用。

关键词: 整齐嵌入, 局部平坦嵌入, 微丛, 切割

由于拓扑流形既没有微分结构也没有 PL 结构, 因此对于拓扑流形的拓扑嵌入的研究相应就困难些, 结果也比较少。在这篇论文中我们把文献[1,2]中微分流形到某些欧氏空间的微分嵌入的方法引入到拓扑流形的拓扑嵌入中来, 证明了拓扑流形到某些欧氏空间局部平坦嵌入的定理。作为这个主要结果的应用我们给出了闭拓扑流形, 紧带边拓扑流形到某些欧氏空间的一些嵌入结果。在文献[1,2]中, 用到法向量丛这一概念, 但在拓扑范畴, 一个拓扑嵌入通常没有法向量丛, 我们通过用法微丛代替法向量丛克服了这一困难, 这里微丛的概念按照文献[3]中给出的定义。此外, 我们用与文献[1]完全不同的方法证明了一个可平行化拓扑流形经过切割可变为可平行化的拓扑流形(即引理 3)。

一、定义、记号和引理

设 M 为仿紧的 Hausdorff 空间, 如 M 局部是欧氏的, 则我们称 M 为拓扑流形。

设 M 为拓扑流形, TM 表示 M 上的切微丛, 如 TM 为平凡微丛, 则我们称 M 为可平行化拓扑流形。

设 M, N 分别为 m 维和 n 维拓扑流形, $f: M \rightarrow N$ 为拓扑嵌入, 如 U 为 N 中开集, $f(M) \subset U \subset N$ 且 U 构成 $f(M)$ 上一个微丛, 记为 η , 则 η 称为嵌入 f 的法微丛。当 M 是带边流形而 N 是无边流形时, 由于拓扑嵌入 $f: M \rightarrow N$ 总可扩张为某拓扑嵌入 $F: M \cup_{\partial M} (BdM \times [0, \infty)) \rightarrow N$, 嵌入 F 的法微丛对 M 的限制我们称为嵌入 f 的法微丛。由文献[3]中的第五节知, 给定拓扑嵌入 $f: M \rightarrow N$, 即使 N 为欧氏空间, 嵌入 f 也不一定有法微丛。

设 M 为拓扑流形, 如 M 上存在微丛 ν , 满足 $TM \oplus \nu$ 为平凡微丛, 我们就称 ν 为 M 上的法

1988 年 7 月 4 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

微丛。由文献[3]中的定理 4.1 和文献[4]中的 (III), 知每个紧拓扑流形上均存在法微丛。

设 M, N 为带边拓扑流形, 如拓扑嵌入 $f: M \rightarrow N$ 满足 $f^{-1}(BdN) = BdM$, 且对任 $x \in BdM$, x 在 $T_x M$ 中任邻域 V_x , $df_x V_x \not\subset T_{f(x)} BdN$, 则我们称 f 为整齐拓扑嵌入。这里 df 是由 f 导出的由切微丛 TM 到切微丛 TN 的映射。

设 $f: M \rightarrow N$ 是无边拓扑流形 M^m 到无边拓扑流形 N^n 的嵌入, 如对任 $x \in M$, 存在 $f(x)$ 在 N 中的邻域 U 满足 $(U, U \cap f(M))$ 与 (R^n, R^m) 同胚, 则称 f 为局部平坦嵌入。如 $f: M \rightarrow N$ 为带边拓扑流形间的整齐嵌入, f 称为局部平坦整齐嵌入可类似定义。

设 W 为 $(n+1)$ 维带边拓扑流形, $f: S^r \times D^{n-r} \rightarrow BdW$ 为拓扑嵌入, 令

$$\begin{aligned} X(BdW, f) &= \overline{BdW - f(S^r \times D^{n-r})} \cup_{\{f(S^r \times S^{n-r-1}), D^{r+1} \times S^{n-r-1}\}} \\ H(W, f) &= W \cup_{\{f(S^r \times D^{n-r}), D^{r+1} \times D^{n-r}\}} \end{aligned}$$

显然 $X(BdW, f)$ 和 $H(W, f)$ 仍为拓扑流形, 这里 $\overline{BdW - f(S^r \times D^{n-r})}$ 表 $BdW - f(S^r \times D^{n-r})$ 的闭包。

为叙述方便起见, 以后所述流形均为拓扑流形, 所述嵌入均为拓扑嵌入, 除非特别声明, 此外由文献[4]知每个微丛包含唯一以欧氏空间作为纤维的纤维丛, 因此我们约定以后所述微丛均是这样的以欧氏空间作为纤维的纤维丛。

引理 1. 设 $BToP_m, BToP$ 分别表示 m 维微丛及稳定微丛的分类空间, $i: BToP_m \rightarrow BToP$ 为自然包含, 则 $i_*: \pi_k(BToP_m) \rightarrow \pi_k(BToP)$ 在 $k < m$ 且 $m \geq 5$ 时为同构; 在 $k = m$ 且 $m \geq 5$ 时为满同态。

证. 设 BPL_m 和 BPL 分别为 m 维 PL 微丛和稳定 PL 微丛的分类空间。由文献[5]我们知 $i_m: BPL_m \rightarrow BToP_m$ 和 $j: BPL \rightarrow BToP$ 是纤维分别为 $ToP_m/PL_m, ToP/PL$ 的纤维化, 这里 i_m 和 j 是通过忘掉 PL 结构所产生的映射。于是我们有以下可换图:

$$\begin{array}{ccc} ToP_m/PL_m & \xrightarrow{i_2} & ToP/PL \\ \downarrow & & \downarrow \\ BPL_m & \xrightarrow{i_1} & BPL \\ \downarrow i_m & & \downarrow j \\ BToP_m & \xrightarrow{i} & BToP \end{array}$$

由上可换图我们可导出下面同伦恰当序列的可换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow \pi_k(ToP_m/PL_m) & \rightarrow & \pi_k(BPL_m) & \rightarrow & \pi_k(BToP_m) & \rightarrow & \pi_{k-1}(ToP_m/PL_m) \rightarrow \cdots \\ \downarrow i_{2*}^{(k)} & & \downarrow i_{1*}^{(k)} & & \downarrow i_*^{(k)} & & \downarrow i_{2*}^{(k-1)} \\ \cdots \rightarrow \pi_k(ToP/PL) & \rightarrow & \pi_k(BPL) & \rightarrow & \pi_k(BToP) & \rightarrow & \pi_{k-1}(ToP/PL) \rightarrow \cdots \\ & & & & & & \downarrow i_{1*}^{(k-1)} \end{array}$$

由文献[4]的(II)知当 $k < m$ 且 $m \geq 5$ 时 $i_{2*}^{(k)}$ 为同构, 由文献[6]中第三节的推论知如 $K = m$, $i_{2*}^{(K)}$ 为满同态; $K < m$ 时, $i_{2*}^{(K)}$ 为同构。因此由 5-项引理知当 $k < m$ 且 $m \geq 5$ 时 $i_*^{(k)}$ 为同构; 而当 $k = m$ 且 $m \geq 5$ 时, 由于 $i_{2*}^{(K)}$ 为满同态, $i_{2*}^{(K-1)}$ 和 $i_{1*}^{(K-1)}$ 为同构, 易知 $i_*^{(K)}$ 为满同态。

引理 2. 设 W 是 n 维紧带边拓扑流形, W 和 BdW 均为单连通的, $D\nu$ 是 W 上 m 维微丛 ν 的闭圆盘丛, 如 $m > 2$, 则 $D\nu$ 的边界 $Bd(D\nu)$ 是单连通的。

证. 设 $S\nu$ 表示由 $D\nu$ 导出的 W 上的球面丛, 由于 $m > 2$, 从而 $S\nu$ 的纤维 S^{m-1} 为单连通的。利用球面丛 $S\nu$ 的同伦恰当序列, 易知 $S\nu$ 为单连通的。又因为 $D\nu|_{BdW}$ 为单连通的,

$S\nu|_{BdW}$ 为连通的, 从而由 Van Kampen 定理知 $Bd(D\nu) = S\nu \cup_{|(S\nu|_{BdW})} (D\nu|_{BdW})$ 是单连通的.

引理 3. 设 W 为 n 维紧带边可平行化拓扑流形, $f: S^r \rightarrow BdW$ 是连续映射, 如 $2r < n-1$, 则存在嵌入 $F: S^r \times D^{n-r-1} \rightarrow BdW$ 满足 $F|_{S^r \times 0} \simeq f$ 且 $N = H(W, F)$ 仍为可平行化拓扑流形.

证. 我们可设 $TW|_{BdW} = T(BdW) \oplus \varepsilon_1^+$, 这里 ε_1^+ 是一维平凡丛, 它是由 BdW 在 W 中的领圈所产生, ε_1^+ 的正向为内指.

令 $\pi: S^r \times D^{n-r-1} \rightarrow S^r$ 为投影, 则 $(f \circ \pi)^*(TW|_{BdW}) = (f \circ \pi)^*T(BdW) \oplus (f \circ \pi)^*\varepsilon_1^+$, 由于 W 为可平行化的, 因此 BdW 为 S -可平行化的, 如设 $P \in BdW$, 但 $P \notin f(S^r)$, 显然 $T(BdW - P)$ 为可平行化的, 从而我们有 $(f \circ \pi)^*(T(BdW))$ 为平凡微丛.

设 $S^r \times D^{n-r-1} \subset D^{r+1} \times D^{n-r-1}$ 且 $S^r \times D^{n-r-1} \subset R_+^{n-1}$, $D^{r+1} \times D^{n-r-1} \subset R_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n | x_n \geq 0\}$. 我们可设 $T(D^{r+1} \times D^{n-r-1})|_{S^r \times D^{n-r-1}} = T(S^r \times D^{n-r-1}) \oplus \varepsilon_2^+$, 这里 ε_2^+ 是由 $S^r \times D^{n-r-1}$ 在 $D^{r+1} \times D^{n-r-1}$ 中的领圈所产生, 设它的正向为外指. 由于 $S^r \times D^{n-r-1} \subset R_+^{n-1}$, 从而我们有 $T(S^r \times D^{n-r-1})$ 为平凡微丛, 因此存在同构 $h: T(S^r \times D^{n-r-1}) \oplus \varepsilon_2^+ \rightarrow (f \circ \pi)^*[(T(BdW) \oplus \varepsilon_1^+)]$, 满足 $h|_{T(S^r \times D^{n-r-1})}: T(S^r \times D^{n-r-1}) \rightarrow (f \circ \pi)^*(T(BdW))$ 为同构, 且 $h|_{\varepsilon_2^+}: \varepsilon_2^+ \rightarrow (f \circ \pi)^*\varepsilon_1^+$ 为保持定向的同构. 利用 h 我们可以给出 $T(S^r \times D^{n-r-1})$ 到 $T(BdW)$ 的丛映射, 由文献 [7] 中的内浸定理, 知 $f \circ \pi$ 同伦于一个内浸, 由于 $2r < n-1$, 我们可设此内浸限制在 $S^r \times 0$ 上为嵌入, 从而此内浸限制在 $S^r \times 0$ 在 $S^r \times D^{n-r-1}$ 中的某邻域上为嵌入, 利用纤维收缩, 可给出此内浸正则同伦于一个嵌入 $F: S^r \times D^{n-r-1} \rightarrow BdW$.

下面我们证明 $H(W, F)$ 为可平行化流形. 由于 W 为可平行化流形, TW 有一个平凡化, 而 $D^{r+1} \times D^{n-r-1}$ 也是一个可平行化流形, 因此 $T(D^{r+1} \times D^{n-r-1})$ 也有一个平凡化, 显然只需证明这二个平凡化在交 $S^r \times D^{n-r-1}$ 上一致即可, 但第一个平凡化在 $S^r \times D^{n-r-1}$ 上的限制为 $(f \circ \pi)^*(T(BdW) \oplus (f \circ \pi)^*\varepsilon_1^+)$, 第二个平凡化在 $S^r \times D^{n-r-1}$ 上的限制为 $h(T(S^r \times D^{n-r-1}) \oplus \varepsilon_2^+)$, 由上面 h 的定义说明二个平凡化在 $S^r \times D^{n-r-1}$ 上的限制是相同的, 因此 $H(W, F)$ 是可平行化的.

引理 4. 设 W 为 n 维紧带边流形, W 和 BdW 是单连通的; $H_i(W) = 0, i > 0$; 如 $n > 5$, 则 W 拓扑同胚于 D^n .

证. 由 Poincare 对偶性, 易知

$$H_i(W; BdW) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & i < n \text{ 或 } i > n, \end{cases}$$

由对 $(W; BdW)$ 的同调恰当序列及 $H_i(W) = 0 (i \neq 0)$, 易证明

$$H_i(BdW) = \begin{cases} 0, & 0 < i < n-1 \text{ 或 } i > n-1, \\ \mathbb{Z}, & i = 0, \text{ 或 } i = n-1. \end{cases}$$

由于 BdW 是单连通的, 由文献 [4] 中的 (III) 又知 BdW 是有限复形, 易知 BdW 和 S^{n-1} 有相同伦型, 由文献 [8] 中的推论 4.13.2, 知 BdW 和 S^{n-1} 拓扑同胚. 令 $\bar{W} = W \cup_{|BdW} W$, 考虑下面的 Mayer-Vietoris 序列:

$$\cdots \rightarrow H_i(BdW) \rightarrow H_i(W) \oplus H_i(W) \rightarrow H_i(\bar{W}) \rightarrow H_{i-1}(BdW) \rightarrow \cdots$$

我们已知 BdW 和 W 的同调群, 由序列的恰当性易知

$$H_i(\bar{W}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \text{ 或 } i = n, \\ 0, & i \neq 0, n. \end{cases}$$

因为 W 单连通, BdW 连通. 由 Van Kampen 定理知 $\bar{W}$ 为单连通的, 这说明 $\bar{W}$ 和 S^n 有相同伦型, 再由文献[8]中的推论 4.13.2 知 $\bar{W}$ 和 S^n 拓扑同胚, 由文献[8]中的定理 1.8.3, 知 W 和 D^n 拓扑同胚.

二、主要定理及应用

主要定理. 设 W 是 k -连通 n 维紧带边拓扑流形, BdW 是 $(k-1)$ -连通的, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$

-1 ($k=1$ 时, 要求 BdW 是 1-连通的), 设 h 是整数, $0 \leq h \leq 2k$, 且 W 上存在一个 $(n-h-1)$ (>1) 维法微丛 ν , 则

- (1) 存在 W 到 D^{2n-h} 的局部平坦整齐嵌入, 满足嵌入的法微丛为 $\nu \oplus \varepsilon$, 这里 ε 为平凡线丛.
- (2) 存在 W 到 S^{2n-h-1} 的局部平坦嵌入, 满足嵌入的法微丛与 ν 同构.

下面我们给出主要定理的一些应用.

推论 1. 设 W 为 k -连通、边界为 $(k-1)$ -连通的 n 维紧带边拓扑流形, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$

($k=1$ 时, 要求 BdW 为 1-连通的), 则我们有:

- (1) 如 $n-k-1 \geq 5$, 则 W 可局部平坦整齐嵌入 D^{2n-k} , 可局部平坦嵌入 S^{2n-k-1} ;
- (2) 如 $1 < n-k-1 < 5$, 则 W 可整齐局部平坦嵌入 D^{n+5} , 可局部平坦嵌入 S^{n+5} .

证. 由文献[4]中的 (III), 知 W 和某有限 CW 复形有相同伦型, 又由于 W 为 k -连通、边界为 $(k-1)$ -连通的流形, 由 Poincaré 对偶性知 $H_i(W) = 0$ ($i > n-k-1$), 且 $H_{n-k-1}(W)$ 为自由群, 因此 W 和某 $(n-k-1)$ 维 CW 复形有相同伦型.

由文献[3]中定理 4.1 知, W 上一定存在法微丛, 我们总可设法微丛的维数大于或等于 $m = \max\{n-k-1, 5\}$, 从而由引理 1 及文献[3]中微丛的同伦定理知如 $n-k-1 \geq 5$, 则 W 上一定存在 $n-k-1$ 维法微丛; 如 $1 < n-k-1 < 5$, 则 M 上一定存在五维法微丛. 利用主要定理说明本推论 1 成立.

推论 2. 设 M 为 k -连通 n 维闭拓扑流形, 如 $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, 则我们有

- (1) 如 $n-k-1 \geq 5$, 则 M 可局部平坦嵌入 S^{2n-k} ;
- (2) 如 $1 < n-k-1 < 5$, 则 M 可局部平坦嵌入 S^{n+5} .

证. 令 $W = M - D^n$, 则 W 为 k -连通, 边界为 $(n-2)$ -连通的 n 维紧拓扑流形. 由推论 1 知: 如 $n-k-1 \geq 5$, 则 W 可整齐局部平坦嵌入 D^{2n-k} ; 如果 $1 < n-k-1 < 5$, 则 W 可整齐局部平坦嵌入 D^{n+5} . 设 $n-k-1 \geq 5$, $f: W \rightarrow D^{2n-k}$ 是上面给出的局部平坦整齐嵌入, 设 $P \in D^{2n-k}$ 是原点, 我们以 $f(BdW) \subset S^{2n-k-1}$ 和点 P 作锥形, 这给出局部平坦整齐嵌入 $g: D^n \rightarrow D^{2n-k}$, 利用 f 和 g , 显然我们有 $M = W \cup D^n$ 到 $D^{2n-k} \cup D^{2n-k}$ 的局部平坦嵌入

$$f \cup g: M = W \cup D^n \rightarrow D^{2n-k} \cup D^{2n-k} = S^{2n-k}.$$

如 $1 < n-k-1 < 5$, 和上面类似, 我们有 $M = W \cup D^n$ 到 $D^{n+5} \cup D^{n+5} = S^{n+5}$ 的局部平坦嵌入.

推论 3. 设 M 为 k -连通 n 维闭流形, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, $0 \leq h \leq 2k$, 且设 D^n 为 M 内的 n

维圆盘, 在 $M_0 = \overline{M - D^n}$ 上存在 $n - h - 1 (> 1)$ 维法微丛 ν , 则 M 可局部平坦嵌入 S^{2n-h} , 且满足该嵌入对 M_0 的限制存在与 $\nu \oplus \varepsilon$ 同构的法微丛.

证. 由主要定理知, M_0 可局部平坦整齐嵌入 D^{2n-h} , 满足嵌入的法微丛与 $\nu \oplus \varepsilon$ 同构, 因此 $M = M_0 \cup D^n$ 可局部平坦嵌入 $D^{2n-h} \cup D^{2n-h} = S^{2n-h}$, 且满足该嵌入对 M_0 的限制存在与 $\nu \oplus \varepsilon$ 同构的法微丛.

推论 4. 设 W 为 k -连通、边界为 $(k-1)$ -连通的 n 维紧带边可平行化拓扑流形, $1 \leq k < \frac{n}{2} - 1$ ($k=1$ 时, 要求 BdW 是 1-连通的), 则 W 可局部平坦整齐嵌入 D^{2n-2k} , 可局部平坦嵌入 $S^{2n-2k-1}$.

证. 由于 W 为可平行化拓扑流形, 因此 W 上一定存在 $n - 2k - 1 (> 1)$ 维法微丛, 由主要定理说明本推论成立.

推论 5. 设 M 为 S -可平行化闭拓扑流形 (即 $TM \oplus \varepsilon$ 为平凡微丛), 如 M 是 k -连通的, $\dim M = n$, $1 \leq k < \frac{n}{2} - 1$, 则 M 可局部平坦嵌入 S^{2n-2k} .

证. 由于 M 为 S -可平行化的, 如设 D^n 为 M 内的 n 维圆盘, 则 $M_0 = \overline{M - D^n}$ 上一定存在 $n - 2k - 1 (> 1)$ 维法微丛, 由推论 4 知 M_0 可局部平坦整齐嵌入 D^{2n-2k} , 因此 $M = M_0 \cup D^n$ 可局部平坦嵌入 $D^{2n-2k} \cup D^{2n-2k} = S^{2n-2k}$.

三、主要定理的证明

设 ε 为 W 上的一维平凡线丛, 由文献 [9] 中第二节的推论知 $\nu \oplus \varepsilon$ 包含一个闭圆盘丛. 令 $N_0 = D(\nu \oplus \varepsilon)$ 表示这个闭圆盘丛, 则 N_0 是 k -连通 $2n - h$ 维紧带边拓扑流形. 令 $I = [-1, 1]$, 借助 ε 我们可以给出整齐拓扑嵌入:

$$g: W \times I \rightarrow N_0,$$

$$(x, t) \mapsto (x, t).$$

令 $S(\nu \oplus \varepsilon)$ 表示 $D(\nu \oplus \varepsilon)$ 产生的 W 上的球面丛, 由于 $S(\nu \oplus \varepsilon)$ 同胚于通过把 ν 的每个纤维一点紧化所得的拓扑空间, 因此由文献 [9] 中命题 2.1 知 $g(W \times 1)$ 和 $g(W \times (-1))$ 在 $S(\nu \oplus \varepsilon)$ 中存在与 ν 同构的法微丛. 设 Q_0 和 Q'_0 分别表示 $g(W \times 1)$ 和 $g(W \times (-1))$ 在 $S(\nu \oplus \varepsilon)$ 中的法微丛, 我们可设 Q_0 , Q'_0 和 $g(W \times 0) = W$ 是互不相交的. 则我们有

(a) Q_0 是 BdN_0 中的拓扑子流形;

(b) $i: Q_0 \subset N_0$ 是 $(n - k - 1)$ -等价;

由于 N_0 满足 Poincaré 对偶性, 从而有

(c) $H_i(N_0) = 0$, $i > n - k - 1$, 且 $H_{n-k-1}(N_0)$ 的生成元为自由元;

由文献 [3] 中的定理 5.9, 知 $T(\nu \oplus \varepsilon)|_W \cong \nu \oplus \varepsilon \oplus TW$, 由假设这是平凡微丛, 我们可知 $\nu \oplus \varepsilon$ 可收缩到 W , 从而由微丛的同伦性质知 $T(\nu \oplus \varepsilon)$ 为平凡微丛, 因此 $TN_0 = T(\nu \oplus \varepsilon)|_{N_0}$ 为平凡微丛. 于是我们有

(d) N_0 为可平行化拓扑流形;

由引理 2, 我们还有

(c) BdN_0 是单连通的.

设 $\alpha \in \pi_{k+1}(N_0)$ 是基元素, 由于 (b), 则在 $\pi_{k+1}(Q_0)$ 中存在元 α' , 满足 $i_*[\alpha'] = [\alpha]$, 这里 $[\alpha'], [\alpha]$ 分别表示 α' 和 α 的同伦类. 由 (d) 和引理 3, 说明存在嵌入 $f: S^{k+1} \times D^{2n-k-k-2} \rightarrow \text{int}Q_0$, 满足 $[f|_{S^{k+1} \times \{x_0\}}] = [\alpha']$, 且我们还可设:

(1) $N_1 = H(N_0, f)$ 为可平行化流形;

此外我们容易证明

(2) $\pi_{k+1}(N_1) \cong \pi_{k+1}(N_0)/[\alpha]$;

(3) $x(Q_0, f) = Q_1 \subset N_1$ 仍为 $(n-k-1)$ -等价.

类似文献[1]或文献[2]主要定理的证明, 我们可以继续上面的过程, 从而我们可以得到流形 $N_0, N_1, \dots, N_r = N$, 这里 N 满足: ① $\pi_i(N) = 0, i \leq n-k-1$; ② $H_i(N) = 0, i > n-k-1$; ③ BdN 是单连通的; ④ W 是 N 中整齐子流形; ⑤ $Q'_0 \subset BdN$.

由假设 $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1, 0 \leq h \leq 2k$ 和 $n-h-1 > 1$, 知 $2n-h > 5$, 利用①, ②, ③和

引理 4, 因此我们有 N 和 D^{2n-h} 拓扑同胚, 不妨记 $N = D^{2n-h}$. 由④及 $W \subset N_0 \subset N = D^{2n-h}$, 说明 W 可局部平坦整齐嵌入 D^{2n-h} 且此整齐嵌入的法微丛与 $\nu \oplus \varepsilon$ 同构. 由⑤说明 W 可局部平坦嵌入 $BdN = S^{2n-h-1}$ 中且嵌入的法微丛与 ν 同构.

周学光教授给予作者许多帮助, 其中文献[5]和文献[8]就是他提供的, 作者表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] 周学光, 中国科学, 1981, 8: 920—928.
- [2] 郭景美, 数学年刊, 5A(1984), 1: 79—84.
- [3] Milnor, J., & Microbundle, I., *Topology*, 3(1964), 53—80.
- [4] Mazur, B., *Ann. of Math.*, 80(1964), 201—226.
- [5] Kirby, R. C. & Siebenmann, L. C., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(1969), 742—749.
- [6] Haefliger, A. & Wall, C. T. C., *Topology*, 4(1965), 209—214.
- [7] Lees, J. A., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(1969), 523—534.
- [8] Rushing, T. B., *Topological embeddings*, Academic Press, New York and London, 1973.
- [9] Browder, W., *Ann. of Math.*, 83(1966), 218—230.