

恒星表面层内 He^+ 、 He^{2+} 电离复合的 随机过程研究

王建民 徐树山

(河北师范学院物理系, 石家庄 050091)

关键词 恒星、非平衡态热力学、 He^+ 、 He^{2+} 电离复合、恒星振荡

一、前言

恒星是一个远离平衡态的开放系统. 这样的开放系统其结构和演化有许多有趣的特征. 恒星振荡是其中重要特征之一. Zhevakin 等人(1953)指出, 恒星振荡可能受激于氦的电离区(He^+). Baker 和 Kippenhahn (1962) 等人的线性非绝热计算证实了 Zhevakin 的结论^[1]. Hofmeister 的计算表明表面层内产生最大自激的区域正好是在氦电离区内, 当电离区受到压缩时, 此区的不透明度会显著变大, 使这个区域实际变为不透明, 而成为自激区^[2].

对于恒星振荡所表现出的这样一种有序结构, 考虑远离平衡态的恒星状态就显得十分必要. 因为即使是在非平衡态的线性区内, 系统因受最小熵产生原理的支配而使之趋向平衡结构^[3]. 文献[4—7]用超熵判据等非平衡态热力学理论对恒星结构稳定性问题进行了初步研究. 本文采用 Prigogine 学派发展的一种处理非平衡系统的简化形式——平均场描述的随机理论^[3], 对恒星表面层内 He^+ 、 He^{2+} 电离复合过程激发恒星振荡做了探讨, 得出了几个有意义的结果.

二、恒星表面层内的非线性主导方程

在远离平衡态的开放系统中, 如果存在对流、扩散、化学反应等情况, 系统的宏观性质由下述一组方程描述^[3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{j}_i + \rho_i \mathbf{v}_i) + f_i(\{\rho_i\}) \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, n), \{\rho_i\} = (\rho_1, \dots, \rho_n),$$

式中 $-\text{div} \mathbf{j}_i$ 为扩散项, $-\text{div} \rho_i \mathbf{v}_i$ 为对流项, $f_i(\{\rho_i\})$ 为化学反应项. 考虑到恒星表面层内密度足够稀薄, 取 $\mathbf{j}_i = -D_i \nabla \rho_i$, D_i 是扩散系数. (1)式改写为

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\text{div}(\rho_i \mathbf{v}_i) + D_i \nabla^2 \rho_i + f_i(\{\rho_i\}). \quad (2)$$

本文用 Prigogine 学派提出用于研究涨落的平均场理论^[3], 探讨恒星表面层内 He^+ 、 He^{2+} 电离复合的随机过程.

本文 1991 年 6 月 5 日收到.

在恒星的表面层内没有核反应发生,氢已全部电离,但存在 He^+ 、 He^{2+} 电离复合过程,即



我们忽略重元素的电离复合过程。为讨论简单起见,假设 He^+ 电离与 He^{2+} 和电子复合速率相等。

现在用平均场描述的随机理论,推导(3)式的主导方程。将(2)式改写为

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i \cdot \nabla \rho_i + \mathcal{D}_i \nabla^2 \rho_i + f_i(\{\rho_i\}), \quad (4)$$

用随机过程处理方程(4)时,我们关心的是粒子在某给定区域 ΔV 内出现的概率,而对于正在对流,扩散着的粒子的确切位置可以忽略,只要区域 ΔV 取足够小,在 ΔV 内,我们可以认为 ρ_i 均匀,即 $\nabla \rho_i = 0$, 并令 $\nabla \cdot \mathbf{v}_i = K_i$ (对流常数),而 $\nabla^2 \rho_i$ 不为零,因为它反映 ΔV 边界面上的物质扩散,那么(4)式改写为

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\rho_i K_i + \mathcal{D}_i \nabla^2 \rho_i + f_i(\{\rho_i\}), \quad (5)$$

(5)式是决定论方程,从随机过程的角度讲,右边第一、三项均为生灭过程,第二项反映扩散过程。这样我们可以写出(5)式关于(3)式的以宏观变量 X, Y 为随机变量的主导方程:

$$\begin{aligned} \frac{dP(X, Y, t)}{dt} = & \frac{1}{N_0} [(X+1)(Y-1)P(X+1, Y-1, t) - XYP(X, Y, t)] \\ & + \frac{1}{N_0} [(X-1)(Y+1)P(X-1, Y+1, t) - XYP(X, Y, t)] \\ & + \mathcal{D}_X \langle X \rangle [P(X-1, Y, t) - P(X, Y, t)] \\ & + (\mathcal{D}_X + K_X) [(X+1)P(X+1, Y, t) - XP(X, Y, t)] \\ & + \mathcal{D}_Y \langle Y \rangle [P(X, Y-1, t) - P(X, Y, t)] \\ & + (\mathcal{D}_Y + K_Y) [(Y+1)P(X, Y+1, t) - YP(X, Y, t)], \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式中 X, Y 分别为 ΔV 内 He^{2+} 、 He^+ 的粒子数,是随机变量,也可以是一组随机变量的集合, $P(X, Y, t)$ 是 $P_{\Delta V}(X, Y, t)$ 省略了 ΔV 。(3)式的反应速率反比于 N_0 , N_0 与系统的大小成正比^[3]。 $\mathcal{D}_X$ 、 $\mathcal{D}_Y$ 、 K_X 、 K_Y 分别是 He^{2+} 、 He^+ 的扩散系数 ($\mathcal{D}_i$) 和对流常数 (K_i)。 $\langle X \rangle$ 、 $\langle Y \rangle$ 分别是 X, Y 在 ΔV 内的平均值,即

$$\langle X \rangle = \sum_{X=0}^{\infty} XP(X, Y, t), \quad \langle Y \rangle = \sum_{Y=0}^{\infty} YP(X, Y, t).$$

为求解方程(6),引入母函数

$$F(s_1, s_2, t) = \sum_{X=0}^{\infty} \sum_{Y=0}^{\infty} s_1^X s_2^Y P(X, Y, t), \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式可求得母函数方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & \frac{1}{N_0} (s_1^2 + s_2^2) \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{2}{N_0} s_1 s_2 \frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \partial s_2} + \mathcal{D}_X \langle X \rangle (s_1 - 1) F \\ & + \mathcal{D}_Y \langle Y \rangle (s_2 - 1) F + (\mathcal{D}_X + K_X)(1 - s_1) \frac{\partial F}{\partial s_1} \\ & + (\mathcal{D}_Y + K_Y)(1 - s_2) \frac{\partial F}{\partial s_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

引入 $\phi(s_1, s_2, t)$, 它与母函数 $F(s_1, s_2, t)$ 有下列关系:

$$F(s_1, s_2, t) = \exp[N_0 \phi(s_1, s_2, t)]. \quad (9)$$

利用 N_0 将 X, Y 记作

$$X = a_1 N_0, \quad Y = a_2 N_0,$$

并引入

$$\xi = s_1 - 1, \quad \eta = s_2 - 1.$$

将(9)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & -\xi(\mathcal{D}_X + K_X) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \eta(\mathcal{D}_Y + K_Y) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \mathcal{D}_X \xi \frac{\langle X \rangle}{N_0} + \mathcal{D}_Y \eta \frac{\langle Y \rangle}{N_0} \\ & + (\xi - \eta)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

将 $\phi(\xi, \eta, t)$ 按 ξ, η 展开:

$$\phi = a_1 \xi + a_2 \eta + \frac{1}{2} b_{11} \xi^2 + \frac{1}{2} b_{22} \eta^2 + b_{12} \xi \eta, \quad (11)$$

式中 $b_{12} = b_{21}$. 由于母函数的性质, ϕ 展开式中的系数是 X, Y 的各次矩, 具体是

$$\begin{aligned} N_0 a_1 = \langle X \rangle, \quad N_0 a_2 = \langle Y \rangle, \quad N_0 b_{11} = \langle \delta X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \\ N_0 b_{22} = \langle \delta Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2, \quad N_0 b_{12} = \langle \delta X \delta Y \rangle, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

由于 N_0 是一个大数, 二次矩以上的诸项可以忽略, 所以对 ϕ 只取前五项就够了.

我们将 ϕ 的展开式(11)代入到式(10)中, 可以得到一组关于系数 $a_1, a_2, b_{11}, b_{22}, b_{12}$ 的非线性方程, a_1, a_2 如式(12)所示只与平均值 $\langle X \rangle$ 和 $\langle Y \rangle$ 相联系, 我们所感兴趣的涨落与系数 b_{11}, b_{22}, b_{12} 有关, 它们满足下列方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(\mathcal{D}_X + K_X) & 0 & -2\alpha \\ 0 & -2(\mathcal{D}_Y + K_Y) & 0 \\ \beta & -\alpha & \beta - \alpha - \mathcal{D}_X - K_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

式中 $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$.

用线性微分方程组的矩阵解法求方程(13)的解. 其系数矩阵的本征值 ω 为

$$\begin{aligned} \omega_1 = & -2(\mathcal{D}_Y + K_Y), \\ \omega_{2,3} = & \frac{\beta - \alpha - 3(\mathcal{D}_X + K_X) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$\Delta = (\beta - \alpha + \mathcal{D}_X + K_X)^2 - 8\alpha\beta.$$

三、结果和讨论

式(13)有稳定解对应着 ω 取负值, 或是 ω 为复数时, 实部取负值的情况. 要想得到稳定解, 必有

(1) $\Delta \geq 0$ 时, $\mathcal{D}_Y + K_Y > 0$ 且 $\beta - \alpha + \sqrt{\Delta} - 3(\mathcal{D}_X + K_X) < 0$ 成立.

(2) $\Delta < 0$ 时, ① $\mathcal{D}_Y + K_Y > 0$ 且 $\beta - \alpha < 3(\mathcal{D}_X + K_X)$, 其解对应于粒子数涨落振荡的衰减. 这一结果表现为恒星振荡的衰减. ②当 $\mathcal{D}_Y + K_Y = 0$ 且 $\beta - \alpha = 3(\mathcal{D}_X + K_X)$ 时,

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \pm \sqrt{|\Delta|} i \quad (i = \sqrt{-1}),$$

此时, $\Delta = \frac{10}{9}(\beta - \alpha)^2 - 8\alpha\beta$, 并记 $\nu = \sqrt{|\Delta|}$. 易知粒子数涨落是周期性的且为简谐振荡, 其周期 T 是 $2\pi\nu^{-1}$. 由于 ΔV 内的粒子数涨落是周期性的, 那么就必然引起 ΔV 内的透明度的周期性变化, 从而激发起恒星的稳定振荡.

(3) 如果恒星表面层内不存在 He^+ 、 He^{2+} 的电离复合过程, 从主导方程(6)可知, 粒子数涨落总是趋于零, 恒星表面层就不会振荡. 振荡并不会发生在所有恒星上, 只要满足振荡条件②, 那么恒星表面层就会因存在 He^+ 、 He^{2+} 的电离复合过程而产生自激振荡. 振荡条件②可能与脉动不稳定带相吻合.

参 考 文 献

- [1] Lang, K. R., *Astrophysical Formula*, Springer-Verlag, 1974, 236.
- [2] 黄润乾, 恒星的结构和演化, 科学出版社, 1986, 301.
- [3] 方福康等, 统计物理学进展(郝柏林等编), 科学出版社, 1981, 398—469.
- [4] 彭秋和等, 天文学报, 21(1980), 172.
- [5] 黄克谅等, 天体物理学报, 1(1981), 51.
- [6] 王振一等, 天体物理学报, 4(1984), 191.
- [7] 王建诚, 天体物理学报, 1(1988), 42.