关于代数体函数反函数的直接超越奇点

吕 以 辇

(中国科学院数学研究所)

摘　　要

本文证明了代数体函数的反函数只有超越奇点，毕卡例外值必是直接超越奇点，讨论直接超越奇点的个数和代数函数体的级的关系. 对下级 $\lambda < \frac{1}{2\nu}$ 的代数体函数类，文中建立并证明了 Wiman 型定理.

关于代数体函数的反函数的超越奇点，与亚纯函数比较[1,XI]，一般性的研究还比较少. Valiron[2] 只研究过零级的一类代数体函数的反函数的超越奇点的个数估计. 赵进义[3] 研究过二次方程定义的代数体函数的反函数的奇点分类问题. 本文研究一般代数体函数的反函数超越奇点的一些问题.

一、关于奇点的类型和性质

设 $w = w(z)$ 为不可约方程

$$\psi(z, w) \equiv A_\nu(z)w^\nu + A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \tag{1.1}$$

所定义的 ν 值代数体函数，其中 $A_\nu(z), \cdots, A_0(z)$ 是 z-平面的整函数，没有公共零点者.

$w = w(z)$ 是 ν 值函数，它的单值定义域是一黎曼曲面，记为 $\tilde{R}_z$，$\tilde{R}_z$ 是 z-平面的 ν 叶覆盖，它由 (1.1) 式所确定的代数函数元素的全体构成者[1)]. $\tilde{R}_z$ 上的点，可以看作代数函数元素，用 $\tilde{z}$ 表示，它在 z-平面上的投影（迹点）是 z.

每一代数函数元素存在唯一的反函数元素. (1.1) 式所确定的代数函数元素的反函数元素的全体作成的集合，称为代数体函数的反函数，记为 $z = z(w)$，它的单值定义域是覆盖 w-平面(球面)的黎曼曲面 $\tilde{R}_w$. 通过每一代数函数元素与其反函数元素的一一对应，$\tilde{R}_w$ 解析同胚于 $\tilde{R}_z$，可以看作是同一黎曼曲面.

设 w_0 为 w-平面上一点，L_w 为终端在 w_0 的连续曲线（路径），在 L_w 上取一点 $w_1 \neq w_0$，而在 w_1 上取定 $z(w)$ 的反函数元素 $\tilde{w}_1$，若 $\tilde{w}_1$ 沿 L_w 可解析开拓（这里及以后都指一般的代数函数元素都参与开拓者)，但不能解析开拓到端点 w_0，则 w_0 称为代数体函数的反函数所取定的分支的超越奇点. 同一 w_0 可以是反函数若干分支的超越奇点.

按此定义，超越奇点 w_0，对应黎曼曲面 $\tilde{R}_w$ 的一个可达边界点，它在 w-平面上的投影可以看作是 w_0. 因此，在 w_0 上对应有 $\tilde{R}_w$ 的若干个可达边界点.

在 $\tilde{R}_z$ 上，设 $L_{\tilde{z}}$ 为始点在 $\tilde{z}_1$ 的路径，我们称 $L_{\tilde{z}}$ 趋于 $\tilde{R}_z$ 的边界，假如对于 $\tilde{R}_z$ 上的任一圆

本文 1978 年 10 月 11 日收到.

1) 代数体函数的黎曼曲面类似于代数函数的黎曼曲面的构造，参考文献[4].

域 $|\tilde{z}| < r$ (指 $\tilde{R}_z$ 上 ν 叶覆盖圆 $|z| < r$ 的域), $L_{\tilde{z}}$ 从某一点之后整个位于 $|\tilde{z}| < r$ 外.

引理 1. 若 w_0 是一超越奇点,则反函数元素沿路径 L_w 进行解析开拓时, 在 $\tilde{R}_z$ 上对应的代数函数元素画出一路径 $L_{\tilde{z}}$, $L_{\tilde{z}}$ 的始点 $\tilde{z}_1$ 是与 w_1 上取定的反函数元素 $\tilde{w}_1$ 相对应的, $L_{\tilde{z}}$ 的终端则趋于 $\tilde{R}_z$ 的边界.

由引理 1 便可推出,超越奇点 w_0 是代数体函数 $w(z)$ 的以 $L_{\tilde{z}}$ 为渐近路径的渐近值,且反之亦然. 因而超越奇点与渐近值相互对应.

现设 w_0 为超越奇点, L_w 为终端在 w_0 的相应路径, $L_{\tilde{z}}$ 为 $\tilde{R}_z$ 上对应的渐近路径. 给定 $\rho > 0$, 在 w-平面上作圆 $|w - w_0| < \rho$ $\left(当 w_0=\infty 时,应代以 |w|>\frac{1}{\rho}, 下同\right)$. 在 L_w 上取一点 w_1, 使 w_1 在圆 $|w - w_0| = \rho$ 上,而 L_w 在 w_1 后整个位于圆 $|w - w_0| < \rho$ 内. 在 $\tilde{R}_z$ 上圆 $|w - w_0| < \rho$ 对于 $w = w(z)$ 的原像集是一开集, 取其中包含 $L_{\tilde{z}}$ 的连通分支, 它确定一个域记为 $\tilde{G}(w_0, \rho)$. $L_{\tilde{z}}$ 自对应于 w_1 的 $\tilde{z}_1$ 之后整个位于域 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内.

对于两个超越奇点 w_0 和 w_0', 假若 $w_0 \neq w_0'$, 或当 $w_0 = w_0'$ 时存在充分小的数 $\rho > 0$, 其对应的域 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 与 $\tilde{G}(w_0', \rho)$ 不重合,则称 w_0 与 w_0' 为不同分支的超越奇点,简称为不同的超越奇点.

对于超越奇点 w_0, 若存在充分小的 $\rho > 0$, 在对应的域 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内, 函数 $w = w(z)$ 不取值 w_0, 则称 w_0 为直接超越奇点,与此相反者则称为非直接超越奇点.

显然,若一超越奇点是毕卡 (Picard) 例外值,则一定是直接超越奇点.

现建立 Iversen 型定理,它说明代数体函数反函数只有超越奇点.

定理 1. 设 $w = w(z)$ 为 (1.1) 式定义的代数体函数, w_0 为 w-平面上任一点. $\rho_1 > 0$ 为任意给定的数, 在圆 $|w - w_0| = \rho_1$ 上任取一点 w_1, 在 w_1 上取一反函数元素 $\tilde{w}_1$, 则在圆 $|w - w_0| < \rho_1$ 内必存在连接 w_1 与 w_0 的路径 L_w, 反函数从 $\tilde{w}_1$ 出发沿 L_w 可解析开拓,最多端点 w_0 不能开拓到.

定理的证明主要在于建立下列引理.

引理 2. 任给 $\rho > 0$, 设域 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 为圆 $|w - w_0| < \rho$ 对于 $w = w(z)$ 在 $\tilde{R}_z$ 上的原像集的一连通分支,则 $w = w(z)$ 在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内的下确界

$$d = \inf_{\tilde{G}(w_0,\rho)} |w(z) - w_0| = 0.$$

证. 可以假定,在域 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内 $w(z) - w_0 \neq 0$, 否则引理显然成立. 现反证之, 假定 $d > 0$. 按假设,在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内 $d \leqslant |w(z) - w_0| < \rho$, 而在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 的边界 $\tilde{\Gamma}(w_0, \rho)$ 上

$$|w(z) - w_0| = \rho.$$

考虑函数

$$w^*(z) = \frac{1}{w(z) - w_0},$$

它在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内没有极点,满足 $\frac{1}{\rho} < |w^*(z)| \leqslant \frac{1}{d}$, 且以 $\frac{1}{d}$ 为上确界. 此外在 $\tilde{\Gamma}(w_0, \rho)$ 上 $|w^*(z)| = \frac{1}{\rho}$. 我们可在域 $\tilde{G}(w_0, \rho_n)$ 内取一点列 $\{\tilde{z}_m\}$, 使得当 $m \to +\infty$ 时, $|w^*(z)|$

在 $\tilde{z}_m$ 之值 $|w^*(z_m)| \to \frac{1}{d}$. 以下分两种情况讨论之.

当 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 包含于某一 $|\tilde{z}| < r$ 内，或 $\{\tilde{z}_m\}$ 在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内有一极限点时，则经选取子序列后，可以假定 $\tilde{z}_n \to \tilde{z}_0$. 而在 $\tilde{z}_0$ 有 $|w^*(z_0)| = \frac{1}{d}$. 按极大模原理，$\tilde{z}_0$ 必在边界 $\tilde{\Gamma}(w_0, \rho)$ 上，因此 $|w^*(z_0)| = \frac{1}{\rho}$. 从而得到 $\frac{1}{d} = \frac{1}{\rho}$，而与 $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{d}$ 矛盾，引理 2 得证.

在其它情况下，对任何充分大的数 $r > 0$，$\tilde{G}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| = r) \neq \phi$，且 $\{\tilde{z}_n\}$ 在 $\tilde{G}(w_0, \rho)$ 内没有极限点. 取定 $r_0 > 1$. 令

$$\tilde{G}_{r_0} = \tilde{G}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| > r_0),$$

再令

$$\tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| \geqslant r_0), \quad \tilde{\Gamma}'' = (|\tilde{z}| = r_0) \cap \tilde{G}(w_0, \rho),$$

则 $\tilde{G}_{r_0}$ 的边界 $\tilde{\Gamma}_{r_0} = \tilde{\Gamma}' \cup \tilde{\Gamma}''$. 令

$$M = \sup_{\tilde{\Gamma}''} |w^*(z)|,$$

则

$$\frac{1}{\rho} \leqslant M < \frac{1}{d}.$$

在 $\tilde{\Gamma}_{r_0}$ 上

$$|w^*(z)| \leqslant \mathrm{Max}\left(\frac{1}{\rho}, M\right) \leqslant M.$$

设 μ 为任意取定的正整数，在 $\tilde{G}_{r_0}$ 内作函数 $|w^*(z)/z^{1/\mu}|$. 在 $\tilde{\Gamma}_{r_0}$ 上我们也有 $|w^*(z)/z^{1/\mu}| \leqslant M$. 对于充分大的 $r > r_0$，在 $\tilde{G}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| > r)$ 内，

$$\left|\frac{w^*(z)}{z^{1/\mu}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{dr^{1/\mu}}\right|,$$

它可以任意小. 按极大模原理，$|w^*(z)/z^{1/\mu}|$ 只能在 $\tilde{G}_{r_0}$ 的边界 $\tilde{\Gamma}_{r_0}$ 达到最大值. 因而在 $\tilde{G}_{r_0}$ 内，有 $|w(z)/z^{1/\mu}| \leqslant M$. μ 可以任意大，从而有 $|w^*(z)| \leqslant M$. 代入点列 $\{\tilde{z}_m\}$，取极限后便得

$$|w^*/z_m| \to \frac{1}{d} \leqslant M,$$

而与 $M < \frac{1}{d}$ 矛盾. 引理 2 证完.

定理 1 的证明. 设 $\tilde{w}_1$ 在 $\tilde{R}_z$ 的对应点为 $\tilde{z}_1$，域 $\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 为圆 $|w - w_0| < \rho_1$ 对于 $w = w(z)$ 在 $\tilde{R}_z$ 上的原像集的一连通分支，其边界包含点 $\tilde{z}_1$.

假若在域 $\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 内存在一点 $\tilde{z}_0$，函数 $w(z)$ 取值 $w(z_0) = w_0$. 这时在 $\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 内用连续曲线 $L_{\tilde{z}}$ 连接 $\tilde{z}_1$ 与 $\tilde{z}_0$，则 $L_{\tilde{z}}$ 对于 $w = w(z)$ 的像 L_w 便是所要求的路径，并且反函数沿 L_w 可以开拓到 w_0.

在其它情况下，在域 $\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 内，$w(z) - w_0 \neq 0$. 取正数序列 $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n \cdots$，使当 $n \to \infty$ 时 $\rho_n \to 0$. 设 $\tilde{G}_n (n \geqslant 2)$ 为圆 $|w - w_0| < \rho_n$ 对于 $w = w(z)$ 在 $\tilde{R}_z$ 上的原像集，它为开集由最多可数多个连通分支组成者. 根据引理 2、$|w(z) - w_0|$ 在 $\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 不能有大于 0 的下界，$\tilde{G}(w_0, \rho_1)$ 内必包含 $\tilde{G}_2$ 的一连通分支记之为 $\tilde{G}(w_0, \rho_2)$.

$$\widetilde{G}(w_0, \rho_1) \supset \widetilde{G}(w_0, \rho_2).$$

同理 $\widetilde{G}(w_0, \rho_2)$ 内必包含 $\widetilde{G}_3$ 的连通分支记之为 $\widetilde{G}(w_0, \rho_3)$，$\widetilde{G}(w_0, \rho_2) \supset \widetilde{G}(w_0, \rho_3)$. 如此继续，可得连通分支序列

$$\widetilde{G}(w_0, \rho_1) \supset \widetilde{G}(w_0, \rho_2) \supset \cdots\cdots \supset \widetilde{G}(w_0, \rho_n) \supset \cdots\cdots.$$

显然，对任何 $r > 0$，存在正整数 n_0，使得当 $n > n_0$ 时，$\widetilde{G}(w_0, \rho_n)$ 在 $|\tilde{z}| < r$ 之外部. 事实上，令 $|w(z) - w_0|$ 在 $\widetilde{G}(w_0, \rho_1) \cap (|\tilde{z}| < r)$ 的下界为 d_r. 显然 $d_r > 0$. 只要取 n_0 使 $\rho_{n_0} < d_r$ 便合要求. 当 $n \geqslant 2$ 时，在 $\widetilde{G}(w_0, \rho_n)$ 内取一点 $\tilde{z}_n$. $\tilde{z}_1$ 上已取定. 在 $\widetilde{G}(w_0, \rho_n)(n \geqslant 1)$ 用连续曲线连接 $\tilde{z}_n$ 和 $\tilde{z}_{n+1}$，且记之为 $L_{\tilde{z}_n\tilde{z}_{n+1}}$. 作 $L_{\tilde{z}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_{\tilde{z}_n\tilde{z}_{n+1}}$，则 $L_{\tilde{z}}$ 趋于 $\widetilde{R}_z$ 的边界，沿 $L_{\tilde{z}}$ 函数 $w = w(z)$ 趋于 w_0. $L_{\tilde{z}}$ 对于 $w = w(z)$ 在 w-平面上的像 L_w 即定理所求路径. 这时反函数沿 L_w 可以解析开拓，而不能开拓到端点 w_0.

由定理 1 可直接得到下列系理.

系理. 代数体函数的毕卡（Picard）例外值一定是反函数的直接超越奇点.

二、直接超越奇点个数的估计

设 $w = w(z)$ 为 (1.1) 式所定义的 ν 值代数体函数. w_0 为其反函数的一个直接超越奇点. 根据定义，设 L_w 为终端在 w_0 的路径、$L_{\tilde{z}}$ 为 $\widetilde{R}_z$ 上的对应路径. 取定充分小的数 $\rho > 0$，设 $\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 为圆 $|w - w_0| < \rho$ 对于 $w = w(z)$ 在 $\widetilde{R}_z$ 上的原像集的一连通分支，包含 $L_{\tilde{z}}$ 在其内且 $w(z) - w_0 \neq 0$. 在 $\widetilde{R}_z$ 上，$\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 的边界由与圆周 $|w - w_0| = \rho$ 对应的原像组成，记之为 $\tilde{\Gamma}(w_0, \rho)$. 由于 $\widetilde{R}_z$ 曲面的分支点和 $\widetilde{R}_z$ 上具有 $w'(z) = 0$ 的点最多是可数的，可以假定在 $\tilde{\Gamma}(w_0,\rho)$ 上没有 $\widetilde{R}_z$ 的分支点和 $w'(z) \neq 0$. 因此 $\tilde{\Gamma}(w_0,\rho)$ 由最多可数多条解析曲线组成. 此外还可假定 $\rho > 0$ 充分小，使 $\widetilde{R}_z$ 上的点其迹点 $z = 0$ 者在 $\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 之外.

由于 $\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 包含趋于 $\widetilde{R}_z$ 边界的路径 $L_{\tilde{z}}$，$\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 必延伸到 $\widetilde{R}_z$ 的边界. 因此存在一 $r_0 > 0$，使得对于任何 $r \geqslant r_0$，$\widetilde{G}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| = r) \neq \phi$.

令 $\widetilde{G}_r(w_0, \rho) = \widetilde{G}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| < r)$，$\tilde{\Gamma}_r(w_0, \rho) = \tilde{\Gamma}(w_0, \rho) \cap (|\tilde{z}| < r)$，$\tilde{\theta}_r = (|\tilde{z}| = r) \cap \widetilde{G}(w_0, \rho)$. $\widetilde{G}_r(w_0, \rho)$ 的边界为 $\tilde{\Gamma}_r(w_0, \rho) \cup \tilde{\theta}_r$.

$\tilde{\theta}_r$ 最多 ν 叶覆盖圆 $|z| = r$，它在 $|z| = r$ 上的像曲线 θ_r 由有限多个圆弧组成. 设 θ_r 的总长度为 $r\theta(r)$，并以此定义为 $\tilde{\theta}_r$ 的弧长. 显然我们有 $0 < \theta(r) \leqslant 2\nu\pi$.

我们有下列基本引理.

基本引理. 若 ν 值代数体函数 $w = w(z)$ 具有直接超越奇点 w_0，且相应的域 $\widetilde{G}(w_0, \rho)$ 当 $r > r_0 > 0$ 时，不整个包含 $|\tilde{z}| = r$，则

$$\log T(r, w) \geqslant \pi \int_{r_0}^{\kappa r} \frac{dr}{r\theta(r)} - C \quad (0 < \kappa < 1), \tag{2.1}$$

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} \geqslant \frac{1}{2\nu}, \tag{2.2}$$

其中 C 为与 r 无关的常数，$T(r, w)$ 为 $w(z)$ 的特征函数[1].

1) 关于代数体函数值分布论的一些记号本文参照文献[5].

这一基本引理的证明，是采用 Carleman 微分不等式的方法，及根据下面的引理。

引理 3. 设 $y=y(z)$ 为 ν 值代数体函数，由方程

$$B_\nu(z)y^\nu+B_{\nu-1}(z)y^{\nu-1}+\cdots+B_0(z)=0 \tag{2.3}$$

定义，其中 $B_\nu(z),\cdots,B_0(z)$ 为 z-平面的整函数，没有公共零点者．则对于任何 $r>0$，必存在一 r'，满足 $r<r'<3r/2$，$y(z)$ 在 $|z|=r'$ 上没有极点，并且

$$\log^+M(r',y)\leqslant 8\nu^2T(192r,y)+C_0, \tag{2.4}$$

其中 C_0 为仅与 ν 有关的常数． $M(r',y)=\max\limits_{|z|=r'}|y(z)|$，$T(r,y)$ 为特征函数．

现在证明基本引理．

在 $\tilde{R}_z$ 曲面的域 $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 作函数

$$\frac{\rho}{w(z)-w_0}\quad(\text{当 } w_0=\infty \text{ 时，应类似地考虑函数 } \rho w(z)),$$

它在 $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 内没有极点，且有 $\dfrac{\rho}{|w(z)-w_0|}>1$，而在边界 $\tilde{\Gamma}(w_0,\rho)$ 上 $\dfrac{\rho}{|w(z)-w_0|}=1$．

作函数

$$u(z)=\log\frac{\rho}{|w(z)-w_0|}.$$

$u(z)$ 是域 $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 内调和函数，且 $u(z)>0$，而在边界 $\tilde{\Gamma}(w_0,\rho)$ 上 $u(z)=0$．

由于 $\tilde{R}_z$ 的点 $\tilde{z}$ 取投影 z 作为参数，对于域 $\tilde{G}_r(w_0,\rho)$ 应用 Green 公式，我们有

$$\int_{\tilde{\theta}_r}u\frac{du}{dn}ds=\int_{\tilde{\Gamma}_r\cap\tilde{\theta}_r}u\frac{du}{dn}ds=\iint_{\tilde{G}_r(w_0,\rho)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{2.5}$$

其中 $\dfrac{d}{dn}$ 为外法向导数，ds 为弧长微分，$z=x+iy$ 为局部坐标参数．

令

$$D(r)=\iint_{\tilde{G}_r}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{2.6}$$

显然，$D(r)>0$，且是 r 的增函数．

设 $\tilde{R}_z$ 的分支点，即代数体函数 $w(z)$ 的分支点在 z-平面上的投影为 $\{z_{\mathscr{X}_i}\}$，$i=1,2,\cdots$，它已按模增的次序排列者．令 $r_{\mathscr{X}_i}=|z_{\mathscr{X}_i}|$，则在圆环 $r_{\mathscr{X}_i}<|z|<r_{\mathscr{X}_{i+1}}$ 上 $w(z)$ 没有分支点．域 $\tilde{G}_r(w_0,\rho)$ 当 $r_{\mathscr{X}_i}<r<r_{\mathscr{X}_{i+1}}$ 时，$z=re^{i\theta}$，我们有

$$\int_{\tilde{\theta}_r}u\frac{du}{dn}ds=\int_{\theta_r}u\frac{du}{dr}r\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_r}\frac{du^2}{d\log r}d\theta=\frac{1}{2}\frac{d}{d\log r}\int_{\theta_r}u^2d\theta. \tag{2.7}$$

再令

$$m(r)=\frac{1}{2\nu\pi}\int_{\theta_r}u^2d\theta.$$

不难看出，$m(r)$ 当 $r>r_0$ 时是 r 的连续函数，若把 $u(z)$ 连续开拓到 $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 之外，令其为零，这时

$$m(r)=\frac{1}{2\nu\pi}\int_{|\tilde{z}|=r}u^2d\theta,$$

显然是 r 的连续函数.

由 (2.7) 式,当 $r > r_0$ 且 $r_{\alpha_i} < r < r_{\alpha_{i+1}}$ 时,有

$$\frac{dm(r)}{d\log r} = \frac{1}{\nu\pi}\int_{\theta_r} u\frac{du}{dr}rd\theta = \frac{1}{\nu\pi}D(r). \tag{2.8}$$

由此推出 $\frac{dm(r)}{d\log r}$ 是 r 的增函数. 对 (2.8) 式取微分,便有

$$\frac{d^2m(r)}{d\log^2 r} = \frac{1}{\nu\pi}\int_{\theta_r}\left[\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 + u\frac{d^2u}{d\log^2 r}\right]d\theta. \tag{2.9}$$

由于在组成 θ_r 的每个圆弧的两端上, $u(z) = 0$, 且 $u(z)$ 是调和函数,我们有

$$\frac{d^2u}{d\log^2 r} + \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0.$$

因此由 (2.9) 式经分部积分后,便得

$$\frac{d^2m(r)}{d\log^2 r} = \frac{1}{\nu\pi}\int_{\theta_r}\left[\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 - u\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]d\theta = \frac{1}{\nu\pi}\int_{\theta_r}\left[\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]d\theta > 0. \tag{2.10}$$

此式当 $r > r_0$ 且 $r_{\alpha_i} < r < \alpha_{i+1}$ 时成立.

θ_r 由 $\tilde{\theta}_r$ 覆盖 $|z| = r$ 的有限条圆弧组成, 设这些圆弧为 $\widehat{\theta_r^j\theta_r^{j+1}}$, $j = 1, 2, \cdots s_r$, 在每弧的端点上 $u(z) = 0$. 根据 Wirtinger 不等式[7],有

$$\int_{\widehat{\theta_r^j\theta_r^{j+1}}}\left[\frac{du(re^{i\theta})}{d\theta}\right]^2 d\theta \geqslant \frac{\pi^2}{(\theta_r^{j+1} - \theta_r^j)^2}\int_{\widehat{\theta_r^j\theta_r^{j+1}}} u^2(re^{i\theta})d\theta \geqslant \frac{\pi^2}{\theta^2(r)}\int_{\widehat{\theta_r^j\theta_r^{j+1}}} u^2(re^{i\theta})d\theta.$$

对 j 从 1 到 s_r 求和,得

$$\int_{\theta_r}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 d\theta \geqslant \frac{\pi^2}{\theta^2(r)}\int_{\theta_r} u^2(re^{i\theta})d\theta \geqslant 2\nu\pi\frac{\pi^2}{\theta^2(r)}m(r). \tag{2.11}$$

对

$$\frac{dm(r)}{d\log r} = \frac{1}{\nu\pi}\int_{\theta_r} u\frac{du}{d\log r}d\theta$$

应用 Cauchy 不等式,可得

$$\left[\frac{dm(r)}{d\log r}\right]^2 \leqslant \frac{1}{(\nu\pi)^2}\int_{\theta_r} u^2(re^{i\theta})d\theta\int_{\theta_r}\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 d\theta = \frac{2}{\nu\pi}m(r)\int_{\theta_r}\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 d\theta.$$

由此

$$\int_{\theta_r}\left(\frac{du}{d\log r}\right)^2 d\theta \geqslant \frac{\nu\pi}{2m(r)}\left[\frac{dm(r)}{d\log r}\right]^2. \tag{2.12}$$

将 (2.11) 和 (2.12) 式代入 (2.10) 式后,便得

$$\frac{d^2m(r)}{d\log^2 r} \geqslant \frac{1}{2m(r)}\left[\frac{dm(r)}{d\log r}\right]^2 + \frac{2\pi^2}{\theta^2(r)}m(r).$$

利用不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, 可化为

$$\frac{d^2m(r)}{d\log^2 r} \geqslant \frac{2\pi}{\theta(r)}\frac{dm(r)}{d\log r}, \tag{2.13}$$

此式,对 $r > r_0$, 且 $r_{\alpha_i} < r < r_{\alpha_{i+1}}$ 时成立.

当 $r > r_0$ 时,由于 $\frac{dm(r)}{d\log r} = \frac{1}{\nu\pi}D(r)$ 是 r 的增函数, 因此可推出

$$\log \frac{dm(r)}{d\log r} - \log \frac{dm(r)}{d\log r}\bigg|_{r=r_0} \geqslant \int_{r_0}^{r}\left(\frac{d^2m(r)}{d\log^2 r} \Big/ \frac{dm(r)}{d\log r}\right)\frac{dr}{r} \geqslant 2\pi\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\theta(r)}.$$

设

$$m_0' = \frac{dm(r)}{d\log r}\bigg|_{r=r_0},$$

则上式化为

$$\frac{dm(r)}{d\log r} \geqslant m_0' e^{2\pi\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\theta(r)}}. \tag{2.14}$$

根据 $m(r)$ 当 $r > r_0$ 时连续，而当 $r_{\alpha_i} < r < r_{\alpha_{i+1}}$ 时非减性，可以推出

$$m(r) \geqslant m(r) - m(r_0) \geqslant \int_{r_0}^{r}\frac{dm(\tau)}{d\tau} \geqslant m_0'\int_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau} e^{2\pi\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\theta(t)}}.$$

令 α 任一实数，$0 < \alpha < 1$，则当 $r > r_0/\alpha$ 时由上式便得到，

$$m(r) \geqslant m_0'\int_{\alpha r}^{r}\frac{d\tau}{\tau} e^{2\pi\int_{r_0}^{\alpha r}\frac{dt}{t\theta(t)}} = m_0'\left(\log\frac{1}{\alpha}\right) e^{2\pi\int_{r_0}^{\alpha r}\frac{dt}{t\theta(t)}},$$

$$\log m(r) \geqslant 2\pi\int_{r_0}^{\alpha r}\frac{dt}{t\theta(t)} + \log\left[m_0'\log(1/\alpha)\right]. \tag{2.15}$$

下面我们用特征函数估计 $m(r)$。

对于 $r > r_0$，令

$$M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w(z) - w_0}\right) = \operatorname*{Max}_{\tilde{G}_r}\left|\frac{\rho}{w(z) - w_0}\right| = \operatorname*{Max}_{\tilde{\delta}_r}\left|\frac{\rho}{w(z) - w_0}\right|.$$

根据极大模原理，当 $r' > r$ 时，

$$M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w - w_0}\right) \leqslant M\left(\tilde{G}_{r'}, \frac{\rho}{w - w_0}\right).$$

对代数体函数 $\dfrac{\rho}{w(z) - w_0}$ 应用引理 3，有

$$\log^+ M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w - w_0}\right) \leqslant \log^+ M\left(r', \frac{\rho}{w - w_0}\right) \leqslant 8\nu^2 T\left(192r, \frac{\rho}{w - w_0}\right) + C_0, \tag{2.16}$$

对于 $r > r_0$ 成立，其中 C_0 为仅与 ν 有关的常数。

根据代数体函数的定理[5]，

$$T\left(192r, \frac{\rho}{w - w_0}\right) \leqslant T(192r, w) + C_1, \tag{2.17}$$

其中 C_1 为仅与 $w(z)$ 于 $z = 0$ 之值及 w_0 和 ρ 有关的常数．将 (2.17) 式代入 (2.16) 式，得

$$\log^+ M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w - w_0}\right) \leqslant 8\nu^2 T(192r, w) + C_2. \tag{2.18}$$

其中 $C_2 = C_0 + 8\nu^2 C_1$。

由 $m(r)$ 的定义，有

$$m(r) \leqslant \log^2 M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w - w_0}\right),$$

$$\log m(r) \leqslant 2\log^+\log^+ M\left(\tilde{G}_r, \frac{\rho}{w - w_0}\right).$$

此式与 (2.18) 式比较，便得

$$\log m(r) \leqslant 2\log^+ T(192r, w) + C_3, \tag{2.19}$$

其中

$$C_3 = 2\log 8\nu^2 + 2\log^+ C_2 + 2\log 2.$$

将 (2.19) 式代入 (2.15) 式,因而有

$$\log^+ T(192r, w) \geqslant \pi \int_{r_0}^{\alpha r} \frac{dt}{t\theta(t)} - C,$$

其中

$$C = \frac{1}{2} C_3 - \frac{1}{2}\log\left(m_0' \log\frac{1}{\alpha}\right),$$

C 是与 r 无关的常数.

再令 $\kappa = \frac{\alpha}{192}$, $0 < \kappa < 1$, 便有

$$\log^+ T(r, w) \geqslant \pi \int_{r_0}^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta(t)} - C,$$

即为 (2.1) 式.

此外,由于 $0 < \theta(t) < 2\nu\pi$, 因此

$$\log^+ T(r, w) \geqslant \frac{1}{2\nu}\log\frac{\kappa r}{r_0} - C,$$

即得

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} \geqslant \frac{1}{2\nu},$$

即为 (2.2) 式,基本引理证完.

定理 2. 若 $w(z)$ 为 (1.1) 式定义的 ν 值代数体函数,下级

$$\lambda = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} < \infty,$$

则反函数直接超越奇点的个数 P, 当 $\lambda \geqslant \frac{1}{2\nu}$ 时, $P \leqslant 2\nu\lambda$; 当$\lambda < \frac{1}{2\nu}$ 时, $P \leqslant 1$.

证. 设 $w(z)$的反函数的 P 个不同的直接超越奇点为 w_0^i, $1 \leqslant i \leqslant P$, 其中 w_0^i 可以是∞.

先假定 $P \geqslant 2$. 任取充分小的 $\rho > 0$, 按直接超越奇点的定义, 对每一 w_0^i, 对应于圆

$$|w - w_0^i| < \rho,$$

在 $\tilde{R}_z$ 上有一相应的域 $\tilde{G}(w_0^i, \rho)$, 设 ρ 已取得充分小, 使 $\tilde{G}(w_0^i, \rho)$ 间互不相交. $\tilde{G}(w_0^i, \rho)$ 延伸到 $\tilde{R}_z$ 的边界. 由于 $P \geqslant 2$, 故存在 $r_0 > 0$, 使得 $r > r_0$ 时, 每一 $G(w_0^i, \rho)$ 与$|\tilde{z}| = r$ 相交,但不能整个包含$|\tilde{z}| = r$. 因而对于每一 w_0^i, 基本引理的假设成立,我们有

$$\log T(r, w) \geqslant \pi \int_{r_0}^{\kappa r} \frac{dt}{t\theta^i(t)} - C^i, \tag{2.20}$$

其中 $\theta^i(t)$ 按基本引理中对于 $\tilde{G}(w_0^i, \rho)$ 定义. $\sum_{i=1}^{P} \theta^i(t) \leqslant 2\nu\pi$. (2.20) 式两边对 i 求和,得

$$P\log T(r, w) \geqslant \pi \int_{r_0}^{\kappa r} \frac{dt}{t} \sum_{i=1}^{P} \frac{1}{\theta^i(t)} - \sum_{i=1}^{P} C^i. \tag{2.21}$$

应用 Cauchy 不等式, 我们有

$$P^2 = \left(\sum_{i=1}^{P} \sqrt{\theta^i(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta^i(t)}}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{P} \theta^i(t) \sum_{i=1}^{P} \frac{1}{\theta^i(t)} \leqslant 2\nu\pi \sum_{i=1}^{P} \frac{1}{\theta^i(t)}.$$

代入 (2.21) 式后便得,

$$P\log T(r,w)\geqslant \frac{P^2}{2\nu}\int_{r_0}^{\kappa r}\frac{dt}{t}-\sum_{i=1}^{P}C^i=\frac{P^2}{2\nu}\log\frac{\kappa r}{r_0}-\sum_{i=1}^{P}C^i.$$

由此式直接可推出，

$$\lambda=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,w)}{\log r}\geqslant\frac{P}{2\nu}.$$

此即 $P\leqslant 2\nu\lambda$. 但应注意到，此不等式当 $P\geqslant 2$ 时成立. 当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2\nu}$ 时，若 $P\leqslant 1$，则不等式 $P\leqslant 2\nu\lambda$ 是显然的. 最后当 $\lambda<\frac{1}{2\nu}$ 时，则 $P\leqslant 1$，否则 $\lambda\geqslant\frac{1}{\nu}$ 而与 $\lambda<\frac{1}{2\nu}$ 矛盾. 定理 2 证完.

在本文末尾，我们将作代数体函数具有 $P=2\nu\lambda$ 者，说明定理对 P 估计是精确的.

三、关于代数体函数的 Wiman 型定理

定理 3. 设 $w(z)$ 为 ν 值代数体函数，下级 $\lambda<\frac{1}{2\nu}$，且反函数具有一直接超越奇点 w_0（w_0 可以是∞），则存在一序列 $r_n\to\infty$，使得当 $n\to\infty$ 时，对 θ 一致地有

$$w(r_ne^{i\theta})\to w_0.$$

证. 令 $\mu(r)=\max\limits_{|z|=r}|w(re^{i\theta})-w_0|$（当 $w_0=\infty$ 时，相应地 $\mu(r)=\min\limits_{|z|=r}|w(re^{i\theta})|$. 按定理结论，存在一序列 $r_n\to\infty$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\mu(r_n)\to 0$（当 $w_0=\infty$ 时，$\mu(r_n)\to\infty$).

假若定理不成立，则应有

$$\varliminf_{r\to\infty}\mu(r)>0\quad(\text{或 }\varlimsup_{r\to\infty}\mu(r)<\infty). \tag{3.1}$$

由 w_0 是直接超越奇点. 对于充分小的数 $\rho>0$，对应于圆 $|w-w_0|<\rho$，在 $\tilde{R}_z$ 上有相应的域 $\tilde{G}(w_0,\rho)$，在其内 $w(z)-w_0\neq 0$，且 $|w(z)-w_0|<\rho$. $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 延伸到 $\tilde{R}_z$ 的边界，对于充分大的 r，$|\tilde{z}|=r$ 与 $\tilde{G}(w_0,\rho)$ 有公共交点. 由 (3.1) 式推出，存在一充分小的 $\rho>0$，使得当 r 充分大时，$\tilde{G}(w_0,\rho)$ 不包含整个 $|\tilde{z}|=r$. 否则，存在序列 $\rho_n\to 0$，及相应序列 $r_n\to\infty$，使得 $\mu(r_n)<\rho_n$，$\mu(r_n)\to 0$，而与 (3.1) 式的假设矛盾. 因此，基本引理的条件成立，我们有 $\lambda\geqslant\frac{1}{2\nu}$，这便与定理假设 $\lambda<\frac{1}{2\nu}$ 矛盾. 定理 3 得证.

定理 3 当 $\nu=1$ 时，即在亚纯函数情况下最近已被张广厚获得[8].

定理 4. 设 $w(z)$ 为 ν 值整代数体函数，下级 $\lambda<\frac{1}{2\nu}$，则存在一序列 $r_n\to\infty$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\mu(r_n,w)=\min_{|z|=r_n}|w(z)|\to\infty.$$

因为对于整代数体函数，∞ 是毕卡例外值，按前面系理，它是直接超越奇点. 因此定理 4 由定理 3 直接推出. 我们将于本文末看到，当 $\lambda\geqslant\frac{1}{2\nu}$ 时，定理 4 不成立.

定理 4 当 $\nu=1$ 时，便是关于下级 $\lambda<\frac{1}{2}$ 时整函数的经典 Wiman 定理. Toda[9] 得到另

一种形式的 Wiman 型定理,定理 4 与其比较,似乎形式上更自然.

定理 5. 设 $w(z)$ 为 ν 值代数体函数,下级 $\lambda < \frac{1}{2\nu}$, 且反函数具有直接超越奇点 w_0(可以为 ∞), 则当 $a \neq w_0$ 时, $\delta(a) = 0$.

这里 $\delta(a)$ 为代数体函数的 Nevanlinna 亏量,

$$\delta(a) = \begin{cases} \underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{m\left(r, \dfrac{1}{w-a}\right)}{T(r, w)}, & a \neq \infty, \\ \underline{\lim}_{r\to\infty} \dfrac{m(r, w)}{T(r, w)}, & a = \infty. \end{cases}$$

根据定理 4, 同样可得下列定理.

定理 6. 设 $w(z)$ 为 ν 值整代数体函数, 下级 $\lambda < \frac{1}{2\nu}$, 则当 $a \neq \infty$ 时, $\delta(a) = 0$.

最后举例说明, 定理 2 中的估计 $P \leqslant 2\nu\lambda$ 是精确的, Wiman 型定理 4 当下级 $\lambda \geqslant \frac{1}{2\nu}$ 时不成立.

考虑函数

$$w(z) = e^{z^{\frac{P}{2\nu}}} + e^{-z^{\frac{P}{2\nu}}},$$

其中 $\nu \geqslant 1, P \geqslant 1$, 均为正整数. $w(z)$ 具有展开式

$$w(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (z^{1/\nu})^{Pn},$$

且当 $|z| < \infty$ 时收敛. 因此, $w(z)$ 为 ν 值整代数体函数, 以 $z = 0$ 为唯一的 ν 重分支点, 它的黎曼曲面 $\tilde{R}_z$ 以 $z = 0$ 为 ν 级分支点且 ν 叶覆盖 z-平面.

当取 $t = z^{\frac{1}{\nu}}$ 作参数变换时,则 $w(z)$ 变为 t-平面的整函数

$$f(t) = e^{t^{\frac{P}{2}}} + e^{-t^{\frac{P}{2}}}.$$

令 $t = \rho e^{i\varphi}$ 时,我们有

$$|f(\rho e^{i\varphi})|^2 = e^{2\rho^{\frac{P}{2}}\cos\frac{P\varphi}{2}} + e^{-2\rho^{\frac{P}{2}}\cos\frac{P\varphi}{2}} + 2\cos\left(2\rho^{\frac{P}{2}}\sin\frac{P\varphi}{2}\right).$$

因此,当 $\varphi = \varphi_j' = \frac{\pi}{P} + \frac{2j\pi}{P}$ $(j = 0, 1, \cdots, P-1)$ 时,有

$$|f(\rho e^{i\varphi_j'})|^2 \leqslant 4.$$

当 $\varphi = \varphi_j'' = \frac{2j\pi}{P}$ $(j = 0, 1, \cdots, P-1)$ 时,有

$$|f(\rho e^{i\varphi_j''})|^2 = e^{2\rho^{\frac{P}{2}}}(1 + o(1)),$$

且这时函数 $f(t)$ 达到最大模,从而有

$$\log M(\rho, f) \sim \rho^{\frac{P}{2}}.$$

由熟知不等式

$$T(\rho, f) \leqslant \log^{+} M(\rho, f) \leqslant \frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho} T(\rho', f) \quad (0 \leqslant \rho < \rho'),$$

便得估计式

$$\log T(\rho, f) \sim \log\log^{+} M(\rho, f) \sim \frac{P}{2}\log \rho.$$

在变数变换 $z = re^{i\theta} = t^{\nu}$ 下，我们有

$$T(r, w) = \frac{1}{2\nu\pi}\int_{|z|=r} \log^{+}|w(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r^{\frac{1}{\nu}}} \log^{+}|f(r^{\frac{1}{\nu}}e^{i\varphi})|\,d\varphi = T(r^{\frac{1}{\nu}}, f).$$

由此得

$$\log T(r, w) \sim \frac{P}{2\nu}\log r,$$

$$\lambda = \lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r, w)}{\log r} = \frac{P}{2\nu},$$

即所作代数体函数 $w(z)$ 的下级 $\lambda = \frac{P}{2\nu}$.

在 $z = re^{i\theta} = t^{\nu}$ 时，在半直线 $\theta = \theta_j' = \frac{\nu\pi}{P} + \frac{2j\nu\pi}{P}$ $(j = 0, 1, \cdots, P-1)$ 上，

$$|w(re^{i\theta_j'})| \leqslant 2.$$

在半直线 $\theta = \theta_j'' = \frac{2j\nu\pi}{P}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, P-1)$ 上，

$$\lim_{r\to\infty}|w(re^{i\theta_j''})| = \infty.$$

因此在这 P 条半直线上，$w(z)$ 具有渐近值 ∞，∞ 为 $w(z)$ 的反函数的直接超越奇点，且不同的路径 $\theta = \theta_j''$ 对应不同的 P 个直接超越奇点．这是由于在路径 $\theta = \theta_j''$ 与 $\theta = \theta_{j+1}''$ 之间，存在半直线 $\theta = \theta_j'$，在其上 $|w(re^{i\theta_j'})| \leqslant 2$．且这亦说明，当 $P = 1$ 时，这时 $w(z)$ 下级 $\lambda = \frac{1}{2\nu}$，而在半直线 $\theta = \theta_0'$ 上 $|w(re^{i\theta_0'})| \leqslant 2$．Wiman 型定理 4 显然不成立．所作例子符合要求．

本文承庄圻泰教授仔细审阅，作者谨致深切谢意．

参　考　文　献

[1] Nevanlinna, R., *Eindeutige Analytische Funktionen*, Berlin, 1936.

[2] Valiron, G., Sur le nombre des sigularilés transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes, *C. R. Acad. Sci.*, **200**(1935), 713—715.

[3] 赵进义，复变函数论，高等教育出版社 1963.

[4] Nevanlinna, R., *Uniformisierung, Berlin*, 1953（中译本：单值化，陆启铿译）.

[5] Hiong, K. L., *Sur. les Fonctions Méromorphes les Fonction Algébroïdes*, Paris, 1957.

[6] Valiron, G., *Mém. Sci. Math. Fasc.* **89**(1938), Paris.

[7] Tsuji, M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Tokyo, 1959.

[8] 张广厚，中国科学，增刊 1，1978.

[9] Toda, N. Sur les direction de Julia et de Borel des fonction algébroïdes, *Nagoya Math Journal*, **34** (1969).