中国科学 (A 辑)
第 33 卷 第 3 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2003 年 5 月

加权指数多项式逼近 *

邓冠铁

(北京师范大学数学系, 北京 100875)

摘要 对权在 L^p 的指数函数系的完备性给出了充分必要条件, 通过推广 Malliavin 关于 Watson 问题的惟一性定理, 得到了 L^p 中权和指数函数系量的关系.

关键词 完备性 逼近 指数多项式

设 $\alpha(t)$ 是 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的非负函数, $p\in[1,+\infty]$ 且 L^p_α 是满足 $\|f\|_{p,\alpha}<+\infty$ 的 $\mathbb{R}$ 上可测函数 $f(t)$ 全体, 其中

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^pe^{-\alpha(t)}dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f\|_{\infty,\alpha}=\sup\{x\in\mathbb{R}:m(\{t\in\mathbb{R}:|f(t)e^{-\alpha(t)}|>x\})>0\},$$

m 是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度, 因此 L^p_α 是一个带权 $e^{-\alpha}$ 的 Banach 空间. 设 C_α 是 $\mathbb{R}$ 上满足 $f(t)e^{-\alpha(t)}\to 0$ $(|t|\to\infty)$ 的连续函数 $f(t)$ 全体构成的 Banach 空间, 其范数为 $\|f\|_\alpha=\sup\{|f(t)e^{-\alpha(t)}|:t\in\mathbb{R}\}$. 设 $\Lambda=\{\lambda_n:n=1,2,\cdots\}$ 是一个递增正实数列, 且令 $M(\Lambda)$ 是由指数函数系 $\{e^{\lambda_nt}:n=1,2,\cdots\}$ 有限线性组合组成的线性空间. 设

$$\lambda(r)=2\sum_{\lambda\leqslant r,\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda}\ \text{如果}\ r\geqslant\lambda_1,\ \text{和}\ \lambda(r)=0,\ \text{如果}\ r<\lambda_1, \tag{1}$$

且设

$$\delta(\Lambda)=\inf\{\lambda_{n+1}-\lambda_n:n=1,2,\cdots,\}. \tag{2}$$

本文中, 对权 $e^{-\alpha}$ 假设

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=\infty, \tag{3}$$

因而对每个 $\lambda\geqslant 0$, 有 $e^{\lambda x}\in L^p_\alpha$. 经典的 Bernstein 逼近问题 (即加权逼近问题) 是: 对权 $e^{-\alpha(t)}$ 加上何种条件使得 $M(\mathbb{N})=\{e^{nt}:n=1,2,\cdots\}$ 在 Banach 空间 C_α 中稠密. 对于 $\mathbb{R}$ 上满足 (3) 式的、非负的、偶的凸函数 $\alpha(x)$, $M(\mathbb{N})$ 在 C_α 中稠密的充分必要条件是 [1]

$$\int_1^{+\infty}\frac{\alpha(2\log t)}{1+t^2}dt=\infty, \tag{4}$$

2002-11-29 收稿

* 国家自然科学基金 (批准号: 10071005) 和教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

因此，对 L_α^p 可提出如下问题：

问题 1 $M(\Lambda)$ 在 L_α^p 中稠密的充分必要条件是什么？

问题 2 假设 $M(\Lambda)$ 不在 L_α^p 中稠密，$M(\Lambda)$ 在 L_α^p 中的闭包 $\mathrm{cl}(M(\Lambda))$ 是什么？

对空间 C_α 也可以提类似的问题. 对于 C_α, 问题 1 已由 Malliavin[1](用变量变换 $x=e^t$) 解决，对于 L_α^p 且 $\alpha(t)=e^t, p=2$ 已由 Fuchs[2] 解决. 然而，在文献 [1, 2] 中，都没有考虑问题 2, 但他们的结果对问题 2 的研究是很重要的和令人感兴趣的. 对有限区间， Borwein 和 Erdélyi [3] 已对问题 1 和 2 给出了部分解答.

本文的目的是给出问题 1 和 2 的解答，我们给出了序列 Λ 和 α 之间的关系，使得子空间 $M(\Lambda)$ 在 L_α^p 中稠密，且使得序列 Λ 的分布基本上决定了权 e^α 的增长，反之也是如此. 我们的主要结论如下：

定理 1 设 $\alpha(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (3) 式的非负凸函数. 假设 $\Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$ 是满足 $\delta(\Lambda)>0$ 的正实数递增序列，则 $M(\Lambda)$ 在 L_α^p 中稠密的充分必要条件为：对于每一实数 a,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\alpha(\lambda(t)-a)}{1+t^2} dt=\infty. \tag{5}$$

定理 2 设 $\alpha(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (3) 式的非负凸函数. 假设 $\Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$ 是满足 $\delta(\Lambda)>0$ 的正实数递增序列. 如果 $M(\Lambda)$ 不在 L_α^p 中稠密，则对每个 $f \in \mathrm{cl}(M(\Lambda))$, 存在一个具有 Dirichet 级数展式

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z=x+\mathrm{i} y \tag{6}$$

的整函数 $g(z)$, 使得对几乎处处所有的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x)=g(x)$ 成立.

注 1 定理 1 和 2 对于空间 C_α 也成立. Borwein 和 Erdélyi[3] 已经在 $\lambda(r)$ 于 $(0,\infty)$ 上有界的条件下证明了定理 2, 因此定理 2 是 Borwein 和 Erdélyi[3] 定理的推广.

1 定理的证明

为了证明定理 1 和 2, 需要下面的

命题 1 设 $p \in[1,+\infty)$, q 是 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 设 $\alpha(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (3) 式的非负凸函数. 假设 $\Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$ 是满足 $\delta(\Lambda)>0$ 的正实数递增序列，如果 (5) 式对于每一实数 a 成立，函数 $g(t)$ 是实轴上的可测函数，且存在一个正常数 N , 使得 $g(t) e^{-N|t|} \in L_\alpha^q$ 和

$$\rho=\limsup_{n \rightarrow+\infty} \lambda_n^{-1} \log \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_n t-\alpha(t)} g(t) d t\right|<\infty, \tag{7}$$

则对几乎所有的 $t \in(\rho, \infty)$, 有 $g(t)=0$.

令 $(L_\alpha^p)^*$ 是 L_α^p 的对偶空间. 作为命题 1 的结果有

命题 2 设 $p \in[1,+\infty)$, q 是 p 的共轭指数, $\alpha(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上满足 (3) 式的非负凸函数. 假设 $\Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$ 是满足 $\delta(\Lambda)>0$ 的正实数递增序列, (5) 式对于每一实数 a 成立. 如果 $T \in(L_\alpha^p)^*$ 且

$$\rho=\limsup_{n \rightarrow+\infty} \lambda_n^{-1} \log |T(e^{\lambda_n t})|<\infty, \tag{8}$$

则 T 的支集包含于 $(-\infty, \rho]$, 即：如果 $h \in L_\alpha^p$ 且对几乎所有的 $t \in(\rho, \infty)$, 有 $h(t)=0$, 则 $T(h)=0$.

为了证明命题 1 和 2, 需要 Malliavin 关于 Watson 问题的一个惟一性定理 [1,2,4] 的推广.

定理 A[3]　假设 $\Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$ 是满足 $\delta(\Lambda)>0$ 的正实数递增序列, 令 $\beta(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 使得对于每一 $a>0$,

$$\int_1^{\infty}\frac{\beta^*(\lambda(r)-a)}{1+r^2}dr=\infty, \tag{9}$$

其中函数

$$\beta^*(t)=\sup\{xt-\beta(x): x>0\} \tag{10}$$

是定义在 $(0,\infty)$ 上的 Young 变换 [5]. 假设函数 $f(z)$ 在半平面 $\mathbb{C}_+=\{z=x+\mathrm{i}y: x>0\}$ 上解析, 且满足条件

$$|f(z)|\leqslant A\exp\{Ax+\beta(x)\},\quad z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}_+. \tag{11}$$

如果

$$\rho=\limsup_{n\to+\infty}\lambda_n^{-1}\log|f(\lambda_n)|<\infty, \tag{12}$$

则 f 是指数型 ρ 且

$$|f(z)|\leq A\exp(\rho x),\quad z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}_+. \tag{13}$$

注 2　如果 $\rho=-\infty$, 则 $f\equiv 0$, 因此定理 A 是 Malliavin[1] 惟一性定理的推广 (记号 A 是一个足够大的正常数, 不必在所有的情形下相同).

命题 1 的证　不失一般性, 可以假设 $\alpha(0)=0$, 因此函数 $t^{-1}\alpha(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上非降. 令

$$\alpha^*(x)=\sup\{xt-\alpha(t): t\in\mathbb{R}\} \tag{14}$$

是凸函数 $\alpha(x)$ 的 Young 变换. 在文献 [6] 中已知, $\alpha^*(x)$ 是 $[0,\infty)$ 中的一个非降的凸函数, 并且满足 (3) 式, $\alpha^*(0)=0$ 和 $(\alpha^*)^*=\alpha$. 对于 $x\geqslant 0$, 有

$$\alpha(t)=\sup\{xt-\alpha^*(x): x\in[0,\infty)\}. \tag{15}$$

如果函数 $g(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可测且存在正常数 N, 使得 $g(t)e^{-N|t|}\in L_q(\alpha)$, 则函数

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tz-\alpha(t)}g(t)dt$$

在半平面 $\mathbb{C}_+$ 解析, 在闭半平面 $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)=\{z=x+\mathrm{i}y: x\geqslant 0\}$ 上连续, 由 Hölder 不等式,

$$|f(z)|\leqslant 2\|ge^{-N|t|}\|_{q,\alpha}\exp\{\alpha^*(x+N+1)\}.$$

由 $\delta(\Lambda)>0$ 知, 当 $r>1$ 时, $\lambda(r)\leqslant A(1+\log r)$, 由 (15) 式知,

$$\sup\{xt-\alpha^*(x+N+1): x\geqslant 0\}\geqslant -Nt-A+\alpha(t),\quad t\geqslant 0,$$

由 (5) 式和定理 A, f 是指数型 ρ 且 (13) 式成立.

定义函数 $F(z)=\frac{f(z)}{1+z}e^{-\rho z}$. 显然, F 在 $\mathbb{C}_+$ 上解析, 在闭半平面 $\mathrm{cl}(\mathbb{C}_+)$ 上连续, 在虚轴上是平方可积的. 由 Paley-Wiener 定理 (参见文献 [7]p.8 , 定理 V 和文献 [8]), 存在 $\psi\in L^2((-\infty,0))$, 使得 $F(z)=\int_{-\infty}^0\psi(t)e^{tz}dt$, 假定 ψ 对所有实数有定义 (对 $t>0$, 令 $\psi(t)=0$). 在虚轴上有两个 F 的表达式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{\mathrm{i}yt}dt=F(\mathrm{i}y)=\frac{e^{-\rho\mathrm{i}y}}{1+\mathrm{i}y}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}ty-\alpha(t)}g(t)dt.$$

令 $\widetilde{f}$ 是 f 的 Fourier 逆变换，即 $\widetilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{\mathrm{i}yx}dy$. 令 $\psi_\rho(t)=\psi(t-\rho)$, 有 $\widetilde{\psi_\rho}(y)=\widetilde{\gamma}(y)\widetilde{ge^{-\alpha}}(y)$, 这里 γ 是函数,

$$\gamma(t)=\begin{cases} e^t, & 若\ t\leqslant 0,\\ 0, & 若\ t>0.\end{cases}$$

从而

$$\psi_\rho(y)=(\gamma*(ge^{-\alpha}))(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(y-x)g(x)e^{-\alpha(x)}dx=\int_y^{\infty}e^{y-x}g(x)e^{-\alpha(x)}dx,$$

所以对 $t>\rho$, 有 $\int_t^{\infty}g(x)e^{-x-\alpha(x)}dx=0$, 这表明对于几乎所有的 $x\in(\rho,\infty)$, 有 $g(x)=0$. 证毕.

命题 2 的证 设 $T\in(L^p_\alpha)^*$. 由 Riesz 表现定理，存在 $g(t)\in L^q_\alpha$, $||g||_{q,\alpha}=||T||$，使得

$$T(h)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)g(t)e^{-\alpha(t)}dt,\quad h\in L^p_\alpha$$

和 (7) 式成立. 由命题 1, 函数 g 的支集包含于 $(-\infty,\rho]$. 证毕.

定理 1 的证 充分性. 如果空间 $M(\Lambda)$ 在 L^p_α, 中不稠密，则存在一个有界线性泛函 T, 使得 $||T||=1$ 且当 $\lambda\in\Lambda$ 时，$T(e^{\lambda t})=0$. 所以由 Riesz 表现定理，存在 $g(t)\in L^q_\alpha, ||g||_{q,\alpha}=1$, 使得 (7) 式对于任意 $h\in L^p_\alpha$ 成立. 由命题 1, 对于几乎所有的 $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=0$, 这与 $||g||_{q,\alpha}=1$ 矛盾. 证毕.

必要性. 如果存在一个实数 b, 使得积分

$$A_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(\lambda(t)-b)}{1+t^2}dt<\infty. \tag{16}$$

设 $\varphi(t)$ 是满足 $\varphi(t)=\alpha(\lambda(t)-b)(t\geqslant 0)$ 的偶函数，则

$$u(x+\mathrm{i}y)=\frac{4x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{x^2+(y-t)^2}dt$$

在 $\mathbb{C}_+$ 中调和，且在半平面 $\mathbb{C}_+$ 中存在一个解析函数 $g_1(z)$，满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}g_1(z)&=u(z)\geqslant\frac{4x}{\pi}\int_r^{+\infty}\frac{\alpha(\lambda(t)-b)}{x^2+(y-t)^2}dt\\ &\geqslant\alpha(\lambda(r)-b)\geqslant(x-1)(\lambda(r)-b)-\alpha^*(x-1)\\ &\quad(x>1,\ z=x+\mathrm{i}y,\ r=|z|)\end{aligned}$$

和 $u(x+\mathrm{i}y)\leqslant A_1x\ (x\geqslant 1)$, 令

$$g_0(z)=\frac{G(z)}{(1+z)^N}\exp\{-g_1(z)-Nz-N\},$$

其中 N 是充分大的正整数,

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-\lambda_n}{z+\lambda_n}\right)\exp\left(\frac{2z}{\lambda_n}\right)$$

是 Fuch 函数 [6]. Fuchs[2] 已经证明了函数 $G(z)$ 在半平面 $\{z=x+\mathrm{i}y:x>-\lambda_1\}$ 中解析，且满足

$$|G(z)|\leqslant\exp\{x\lambda(r)+Ax\},\quad z\in\mathbb{C}_+,\quad r=|z|; \tag{17}$$

$$|G(z)|\geqslant\exp\{x\lambda(r)-Ax\},\quad z\in C(\Lambda,\delta); \tag{18}$$

$$|G'(\lambda_n)| \geqslant \exp\{\lambda_n\lambda(\lambda_n) - A\lambda_n\},\quad n=1,2,\cdots, \tag{19}$$

这里 $\delta=\delta(\Lambda)$ 和 $C(\Lambda,\delta)=\mathbb{C}_+ - \cup_{n=1}^{+\infty}D(\lambda_n,\delta), D(\lambda_n,\delta)=\{z,|z-\lambda_n|\le\frac{\delta}{4}\}$. 所以由 (17) 式，有

$$|g_0(z)| \leqslant \frac{1}{1+|z|^2}\exp\{\alpha^*(x-1)-x\},\ z\in\mathbb{C}_+. \tag{20}$$

令

$$h_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(1+\mathrm{i}y)e^{-(1+\mathrm{i}y)t}dy, \tag{21}$$

则 $h_0(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的，由 Cauchy 公式,

$$h_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x+\mathrm{i}y)e^{-(x+\mathrm{i}y)t}dy,\ x>0. \tag{22}$$

(20) 和 (22) 式及 Young 变换公式 $(\alpha^*)^*=\alpha$ 说明

$$|h_0(t)|\leqslant \exp(-\alpha(t)-|t|) \tag{23}$$

和

$$g_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t)e^{tz}dt,\quad x>0, \tag{24}$$

这表明有界线性泛函

$$T(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t)h(t)dt,\quad h\in L^p_\alpha \tag{25}$$

满足 $T(e^{\lambda t})=0,\ \lambda\in\Lambda$, 且 $||T||=||h_0e^{\alpha}||_{q,\alpha}>0$. 由 Riesz 表现定理，空间 $M(\Lambda)$ 在 L^p_α 中不稠密. 证毕.

定理 2 的证　Borwein 和 Erdélyi[2] 已经在 $\lambda(r)$ 在 $(0,\infty)$ 中有界的条件下证明了定理 2, 所以不失一般性，可以假设

$$\lim_{x\to\infty}\lambda(r)=\infty. \tag{26}$$

如果 $M(\Lambda)$ 在 L^p_α 中不稠密，定理 1 表明存在实数 b, 使得 (16) 式成立. 定理 1 必要性的证明表明存在函数 $g_0(z)$, 在半平面 $\mathbb{C}_+$ 中解析，并且存在函数 $h_0(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，函数 g_0 和 h_0 满足 (20) $\sim$ (24) 式.

令 $\varphi_n(z)=(z-\lambda_n)^{-1}g_0(z), \varphi_n(\lambda_n)=g_0'(\lambda_n)(n=1,2,\cdots)$, 且

$$h_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(1+\mathrm{i}y)e^{-(1+\mathrm{i}y)t}dy. \tag{27}$$

类似于定理 1 必要性的证明， $h_n(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是连续的,

$$h_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x+\mathrm{i}y)e^{-(x+\mathrm{i}y)t}dy\ ,\ x>0,$$
$$|h_n(t)|\leqslant \exp(-\alpha(t)-|t|) \tag{28}$$

且

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)e^{tz}dt\ ,\ x>0.$$

注意到 $u(x)\leqslant A_1x, x\geqslant 1$, 由 (19) 式

$$|\varphi_n(\lambda_n)|=|g_0'(\lambda_n)|\geqslant \exp\{\lambda_n\lambda(\lambda_n)-A\lambda_n-A\},\quad n=1,2,\cdots.$$

由 (28) 式，存在与 Λ 无关的常数 A_2, 使得函数

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h_n(t)}{\varphi_n(\lambda_n)} \tag{29}$$

满足

$$|\psi_n(t)e^{\alpha(t)}| \leqslant \exp\{A_2\lambda_n - \lambda_n\lambda(\lambda_n) - |t|\} \tag{30}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t)e^{\lambda_k t}dt = \begin{cases} 1, & \text{如果 } k = n, \\ 0, & \text{如果 } k \neq n. \end{cases} \tag{31}$$

令 T_n 是 $M(\Lambda)$ 上的线性泛函，对于每个指数多项式，$P(t) = \sum a_k e^{\lambda_k t} \in M(\Lambda)$ 定义为

$$T_n(P) = a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum a_k \psi_n(t) e^{\lambda_k t} dt,$$

T_n 把每一个指数多项式 P 映为它的第 n 个系数，由 (30) 式，存在一个与 Λ 无关的常数 A_3，使得 $|T_n(P)| \leqslant ||P||_{p,\alpha} \exp\{A_3\lambda_n - \lambda_n\lambda(\lambda_n)\}$，所以 T_n 是 $M(\Lambda)$ 上的有界线性泛函，并且由 Hahn-Banach 定理，T_n 可以延拓到 L^p_α 上的一个有界线性泛函 (记作 $\overline{T}_n$)，使得 $||\overline{T}_n|| = ||T_n|| \leqslant C_n = \exp\{A_3\lambda_n - \lambda_n\lambda(\lambda_n)\}$. 如果 $f \in \mathrm{cl}(M(\Lambda))$, 则存在一个指数多项式序列 $P_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} \exp(\lambda_m t) \in M(\Lambda)$, 使得 $||f - P_k||_{p,\alpha} \to 0 \quad (k \to \infty)$. 因为 $|\overline{T}_n(f)| \leqslant C_n ||f||_{p,\alpha}$, 由 (26) 式，函数 $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{T}_n(f) \exp(\lambda_n z)$ 是一个整函数. 对于任何实数 a 和 $b(b > a)$，有

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p e^{-\alpha(t)} dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant ||f - P_k||_{p,\alpha} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} ||\overline{T}_n|| \left(\int_a^b e^{\lambda_n pt - \alpha(t)} dt\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\leqslant ||f - P_k||_{p,\alpha} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\lambda_n b} \left(\int_a^b e^{-\alpha(t)} dt\right)^{\frac{1}{p}}\right], \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 则对几乎所有的 $t \in \mathbb{R}$, 有 $f(t) = g(t)$. 证毕.

参 考 文 献

1 Malliavin P. Sur quelques procédés d'extrapolation. Acta Math, 1955, 83: 179 ~ 255

2 Fuchs W H J. On the closure of $\{e^{-t}t^{a_v}\}$. Proc Cambridge Philos Soc, 1946, 42: 91 ~ 105

3 Borwein P B, Erdélyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995

4 Deng G T. A generalization of Malliavin's uniqueness theorem. Kodai Math J, 2000, 23: 320 ~ 325

5 Rockafellar R. Convex Analysis. Princeton: Princeton Univ Press, 1970

6 Boas R P Jr. Entire Functions. New York: Academic Press, 1954

7 Paley R, Wiener N. Fourier Transforms in the Complex Damain, vol XIX. Providence American Mathematical Society Colloquium Publications, 1934

8 Levin B Ya. Lectures on Entire Functions, V150. Translations of Math Monographs: Am Math Soc, 1996