中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 5 期: 623～638
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

均值回归模型下最优人寿保险的购买和投资消费问题

梁晓青, 郭军义*

南开大学数学科学学院, 天津 300071
E-mail: liangxqnk@mail.nankai.edu.cn, jyguo@nankai.edu.cn

收稿日期: 2015-01-28; 接受日期: 2015-03-14; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171164) 和 RARE-318984 (an FP7 Marie Curie IRSES) 资助项目

摘要 本文考虑在均值回归回报模型下工资收益者的最优保险购买、消费和投资问题. 假设工资收益者的收益是随机的, 并且在退休前和退休后其风险偏好是可以改变的, 则通过使用鞅方法, 本文求得了在 HARA (hyperbolic absolute risk aversion) 效用下, 工资收益者所采取的最优策略和值函数的显式表达式.

关键词 人寿保险 均值回归过程 鞅方法

MSC (2010) 主题分类 93E20, 91B28

1 引言

自 Yaari [1] 以来, 很多学者致力于研究人寿保险的购买及个人的投资消费选择问题. Richard [2] 将 Merton 模型与人寿保险的问题相结合, 极大化遗产和消费效用; 他假设个人会得到连续的工资收益, 并且死亡时间是有界的. Ye [3] 扩展了 Richard 的模型, 其中个人的寿命是随机的、无界的. 通过使用鞅方法和动态规划的方法, Ye 系统地分析和讨论了这个问题. Kwak 等人 [4] 研究了一个家庭的最优人寿保险购买及最优投资和消费决策问题. 文献 [5,6] 讨论了一个最优人寿保险购买及投资组合问题, 并且假设个人会得到随机的工资收益. 文献 [7,8] 利用连续时间有限状态 Markov 链来模拟家庭的最优化问题. Nielsen 和 Steffensen [9] 探索在带有限制条件下的最优投资和人寿保险策略.

在金融市场中, 风险资产的价格通常用几何 Brown 运动来模拟. 与传统假设不同, 为了使风险资产的价格更接近现实, 我们用均值回归过程来模拟风险资产的漂移参数. Kim 和 Omberg [10] 曾经使用这个模型来模拟股票价格过程, 并且得到了最优投资策略的闭型表达式. Watcher [11] 扩展了这个模型, 考虑了消费策略, 并且求得了问题的显式解. 在这个框架下, 通过控制人寿保险的购买及投资消费策略的选择, 我们极大化到随机死亡时刻 τ_d 前, 工资收益者的消费和遗产效用. 更具体地讲, 我们的目标是极大化

$$J(t,X_t;c,\pi,I)=\mathbb{E}_t\left[\int_t^{\tau_d}\mathrm{e}^{-\delta(s-t)}u(c(s))ds+\mathrm{e}^{-\delta(\tau_d-t)}U(M(\tau_d))\right].$$

同时, 我们假设个人在退休时刻 T_r 前会得到随机的工资收益并且消费和遗产的效用函数属于 HARA 效用类, 即消费和遗产高于给定的下边界. 而且我们假设消费效用在退休前和退休后是不同的. 通过

英文引用格式: Liang X Q, Guo J Y. Optimal life insurance purchase and consumption/investment under mean-reverting returns (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 623–638, doi: 10.1360/N012015-00054

使用鞅方法, 我们得到了值函数和相应最优策略的显式表达式. Pirvu 和 Zhang [12] 讨论了类似的问题, 他们考虑了当风险资产的漂移参数是均值回归过程时, 工资收益者的最优资产分配和人寿保险的购买问题. 通过使用动态规划的方法, 他们求得了当消费和遗产效用是 CRRA (constant relative risk aversion) 效用时问题的显式解. 但是, 在我们这个模型下应用动态规划的方法不易求得显式解.

本文扩展了文献 [3], 考虑了服从均值回归过程的风险资产漂移系数对个人投资消费和人寿保险决策的影响. 与通常考虑的 CRRA 模型不同, 我们假设个人偏好属于一般的 HARA 效用类, 即消费率和遗产要大于预先给定的下界, 以保障个人基本的生活需要. 同时, 我们扩展了文献 [12], 考虑了退休前和退休后直到死亡个人的消费投资选择问题. 文献 [12] 仅考虑了退休时刻前个人的消费遗产效用最大化问题.

本文结构如下: 第 2 节引入金融和保险市场, 给出将要讨论的最优问题; 第 3 节基于鞅方法, 推导出值函数和相应最优策略的显式表达式.

2 模型

本文考虑在死亡时刻 τ_d (>0) 前, 工资收益者在金融和保险市场中的最优化问题. 在金融市场中, 我们假设有两种资产, 风险资产和无风险资产, 它们价格的动态可以用下面的随机微分方程表示:

$$dR(t) = rR(t)dt, \quad dS(t) = S(t)[\mu(t)dt + \sigma dW(t)],$$

其中 r 和 σ 是正常数, $W(t)$ 是完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的标准 Brown 运动. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由 $W(t)$ 生成的自然代数流在测度 $\mathbb{P}$ 下的增广代数流. 假设死亡时间 τ_d 是定义在这个概率空间上的非负随机变量, 并且与 Brown 运动 $W(t)$ 独立.

进一步, 我们假设风险市场价格参数 $\theta(t) \triangleq \frac{\mu(t)-r}{\sigma}$ 是均值回归过程, 即

$$d\theta(t) = -k(\theta(t) - \bar{\theta})dt - \sigma_\theta dW(t),$$

其中 σ_θ, k 和 $\bar{\theta}$ 是正常数. 文献 [10–12] 曾经考虑过这种股票价格模型.

另外, 假设个人在退休时刻 T_r (>0) 前会得到随机的工资收益, 工资收益率过程满足如下的几何 Brown 运动:

$$d\varepsilon(t) = \varepsilon(t)(\mu_\varepsilon dt + \sigma_\varepsilon dW(t)),$$

其中 μ_ε 和 σ_ε 是正常数.

在保险市场中, 令 λ_{x+t} 为工资收益者的瞬时死亡率, 其中 x 是指工资收益者的初始年龄, 则从年龄 x 到年龄 $x+t$, 工资收益者的条件生存概率等于

$$ {}_tp_x \triangleq \exp\left\{ -\int_0^t \lambda_{x+s} ds \right\}. \tag{2.1}$$

对所有 $t \geqslant 0$, 令 $c(t): \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是 $\mathcal{F}_t$- 循序可测的消费过程, 满足

$$\int_0^t c(s)ds < \infty, \quad \text{a.s.},$$

$\pi(t): \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{F}_t$- 循序可测的投资过程, 满足

$$\int_0^t \pi^2(s)ds < \infty, \quad \text{a.s.},$$

$I(t): \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{F}_t$- 循序可测的保费过程, 满足

$$\int_0^t I(s)ds < \infty, \quad \text{a.s.},$$

则工资收益者的财富过程满足如下的随机微分方程: 当 $0 \leqslant t < \min[T_r, \tau_d]$,

$$dX_t = [rX_t + \pi(t)(\mu(t) - r) + \varepsilon(t) - I(t) - c(t)]dt + \pi(t)\sigma dW(t); \tag{2.2}$$

当 $T_r \leqslant t < \tau_d$,

$$dX_t = [rX_t + \pi(t)(\mu(t) - r) - I(t) - c(t)]dt + \pi(t)\sigma dW(t). \tag{2.3}$$

通常在死亡时刻 τ_d, 保险公司会给工资收益者的家人一笔钱作为遗产. 因此, 当工资收益者在时刻 t 死亡时, 遗产可以表示为

$$M(t) \triangleq X_t + \frac{I(t)}{\eta(t)},$$

其中 $\eta: [0,T] \to \mathbb{R}^+$ 是连续的、确定的函数, 称为保费保险比率. 通常为了获得利润, 保险公司需假设 $\eta(t) \geqslant \lambda_{x+t}$. 为了数学上计算简便, 我们假设 $\eta(t) = \lambda_{x+t}$.

定义折现过程、指数鞅过程和状态价格密度过程分别如下:

$$\zeta_t \triangleq \mathrm{e}^{-\int_0^t (\lambda_{x+s}+r)ds}, \quad Z_t \triangleq \exp\left\{ -\int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du \right\}, \quad H_t \triangleq \zeta_t Z_t.$$

本文假设 Novikov 条件成立, 即

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(u)du}) < \infty,$$

则定义如下等价鞅测度:

$$\widetilde{\mathbb{P}}^T(A) \triangleq \mathbb{E}[Z_T \mathbf{1}_A],$$

对任意固定的 $T \in [0,\infty)$ 和任意 $A \in \mathcal{F}_T$. 由 Girsanov 定理我们得到, 在新的测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^T$ 下,

$$\widetilde{W}^T(t) \triangleq W(t) + \int_0^t \theta(u)du, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

是一个标准 Brown 运动. 根据文献 [13] 第 1.7 节的命题 7.4, 对任意 $T \in [0,\infty)$, 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上存在唯一的概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 与 $\mathcal{F}_T$ 上的概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}^T$ 是一致的, 并且 $\widetilde{W}(t)$, $0 \leqslant t < \infty$ 是测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的 Brown 运动.

根据以上定义的记号, 工资收益者的财富过程可以表示为当 $0 \leqslant t < T_r$,

$$dX_t = [(r + \lambda_{x+t})X_t + \varepsilon(t) - \lambda_{x+t}M(t) - c(t)]dt + \pi(t)\sigma d\widetilde{W}(t); \tag{2.4}$$

当 $T_r \leqslant t < \infty$,

$$dX_t = [(r + \lambda_{x+t})X_t - \lambda_{x+t}M(t) - c(t)]dt + \pi(t)\sigma d\widetilde{W}(t). \tag{2.5}$$

消费 - 投资 - 保险保费策略 (c, π, I) 称为是可允许的, 如果满足对所有 $t \in [0, T_r)$, $X_t + b_t \geqslant 0$; 对所有 $t \geqslant T_r$, $X_t \geqslant 0$; $M(t) \geqslant 0$. 这里

$$b_t \triangleq \int_t^{T_r} \frac{\zeta_s}{\zeta_t} \widetilde{\mathbb{E}}_t[\varepsilon(s)]ds,$$

是指在鞅测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下工资收益者未来收益的公平折现值, 其中 $\widetilde{\mathbb{E}}_t[\cdot] = \widetilde{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$.

当 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T_r$, 对 $\zeta_t X_t$ 应用 Itô 公式, 我们得到

$$\zeta_u X_u = \zeta_t X_t + \int_t^u \zeta_s[\varepsilon(s) - \lambda_{x+s}M(s) - c(s)]ds + \int_t^u \zeta_s \sigma\pi(s)d\widetilde{W}(s). \tag{2.6}$$

将等式 (2.6) 两边加上 $\zeta_u b_u$, 我们得到

$$\zeta_u(X_u + b_u) + \int_t^u \zeta_s[\lambda_{x+s}M(s) + c(s)]ds = \zeta_t X_t + \int_t^u \zeta_s\sigma\pi(s)d\widetilde{W}(s) + \widetilde{\mathbb{E}}_u\bigg[\int_t^{T_r} \zeta_s\varepsilon(s)ds\bigg]. \tag{2.7}$$

对于可允许策略 (c, π, I), 根据 Fatou 引理, 我们得到等式 (2.7) 的右边是上鞅. 因此, 对上式两边关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件期望, 我们得到如下的预算限制: 当 $0 \leqslant t < T_r$,

$$\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^{T_r}(H_s c(s) + \lambda_{x+s}H_s M(s))ds + H_{T_r}X_{T_r}\bigg] \leqslant H_t(X_t + b_t); \tag{2.8}$$

类似地, 当 $T_r \leqslant t < \infty$, 根据 Fatou 引理, 我们得到

$$\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^{\infty}(H_s c(s) + \lambda_{x+s}H_s M(s))ds\bigg] \leqslant H_t X_t. \tag{2.9}$$

接下来将阐述本文要解决的问题. 在时刻 t $(t < \tau_d)$, 假设工资收益者的初始财富为 X_t, 则工资收益者的期望效用函数 $J(t, X_t; c, \pi, I)$ 定义为

$$J(t, X_t; c, \pi, I) = \mathbb{E}_t\bigg[\int_t^{\tau_d} \mathrm{e}^{-\delta(s-t)}u(c(s))ds + \mathrm{e}^{-\delta(\tau_d - t)}U(M(\tau_d))\bigg], \tag{2.10}$$

其中 $\delta > 0$ 表示常数主观折现率, $u(c)$ 和 $U(M)$ 分别表示工资收益者的消费和遗产效用. 在本文中, 我们假设工资收益者有 HARA 形式的偏好.

假设 2.1

$$u(c) \triangleq \begin{cases} u_l(c) \triangleq \begin{cases} \dfrac{(c-c_l)^{1-\beta_1}}{1-\beta_1}, & c > c_l, \\ \lim\limits_{c\downarrow c_l}\dfrac{(c-c_l)^{1-\beta_1}}{1-\beta_1}, & c = c_l, \\ -\infty, & c < c_l, \end{cases} & \text{当 } t \leqslant T_r, \\ u_d(c) \triangleq \begin{cases} \dfrac{(c-c_d)^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}, & c > c_d, \\ \lim\limits_{c\downarrow c_d}\dfrac{(c-c_d)^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}, & c = c_d, \\ -\infty, & c < c_d, \end{cases} & \text{当 } t > T_r, \end{cases}$$

$$U(M) \triangleq \begin{cases} \dfrac{(M-m)^{1-\beta_3}}{1-\beta_3}, & M > m, \\ \lim\limits_{M\downarrow m}\dfrac{(M-m)^{1-\beta_3}}{1-\beta_3}, & M = m, \\ -\infty, & M < m, \end{cases}$$

其中 $u_l(c)$ 和 $u_d(c)$ 分别表示工资收益者退休前和退休后的消费效用, $c_l \geqslant 0$, $c_d \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 0$ 分别表示相应消费和遗产的常数门槛, $\beta_i > 0$, $\beta_i \neq 1$, $i = 1, 2, 3$ 表示相对风险厌恶系数.

我们用 $\mathcal{A}(t,X_t)$ 表示所有可允许策略 (c,π,I) 组成的集合, 满足

$$\mathbb{E}_t\left[\int_t^{\tau_d} \mathrm{e}^{-\delta(s-t)}u^-(c(s))ds+\mathrm{e}^{-\delta(\tau_d-t)}U^-(M(\tau_d))\right]<\infty,$$

其中 $u^- \triangleq \max(-u,0)$.

值函数定义为

$$V(t,X_t)=\sup_{\{c,\pi,I\}\in\mathcal{A}(t,X_t)} J(t,X_t;c,\pi,I). \tag{2.11}$$

当 $T_r\leqslant t<\tau_d$, 从 ${}_tp_x$ 在 (2.1) 中的定义, 我们得到, 当 $s\geqslant t$,

$$\mathbb{P}_t(\tau_d>s)=\mathrm{e}^{-\int_t^s \lambda_{x+u}du}.$$

因此, 值函数可以简化为如下形式:

$$V(t,X_t)=\sup_{\{c,\pi,I\}\in\mathcal{A}(t,X_t)}\mathbb{E}_t\left[\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p_{x+t}\{u_d(c(s))+\lambda_{x+s}U(M(s))\}ds\right]\triangleq\Phi(t,X_t).$$

类似地, 当 $0\leqslant t<\min[T_r,\tau_d]$, 我们考虑 $T_r<\tau_d$ 和 $T_r>\tau_d$ 两种情形, 得到

$$\begin{aligned}V(t,X_t)=&\sup_{\{c,\pi,I\}\in\mathcal{A}(t,X_t)}\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^{T_r\wedge\tau_d}\mathrm{e}^{-\delta(s-t)}u_l(c(s))ds+\mathrm{e}^{-\delta(\tau_d-t)}U(M(\tau_d))1_{\{\tau_d<T_r\}}\\&+\Phi(T_r,X_{T_r})\mathrm{e}^{-\delta(T_r-t)}{}_{T_r-t}p_{x+t}\bigg]\\=&\sup_{\{c,\pi,I\}\in\mathcal{A}(t,X_t)}\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\delta(s-t)}{}_{s-t}p_{x+t}\{u_l(c(s))+\lambda_{x+s}U(M(s))\}ds\\&+\Phi(T_r,X_{T_r})\mathrm{e}^{-\delta(T_r-t)}{}_{T_r-t}p_{x+t}\bigg].\end{aligned}$$

3 主要结果

本节基于鞅方法, 推导出值函数和相关策略的显式表达式, 具体证明在第 4 节. 首先, 为了后面推导简便, 我们先给出两个引理.

引理 3.1 在概率测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下, 我们推导出工资收益者在 $[t,T_r]$ 期间的期望收益有如下的形式:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}_t[\varepsilon(s)]=\varepsilon(t)\exp\bigg\{&\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\sigma_\theta^2\int_t^s\eta^2(s-u)du+\left(\mu_\varepsilon-\frac{\sigma_\varepsilon\bar{\theta}k}{\rho}+\frac{\sigma_\theta\sigma_\varepsilon^2}{\rho}\right)(s-t)\\&-\left(\theta(t)-\frac{k\bar{\theta}}{\rho}+\frac{\sigma_\theta\sigma_\varepsilon}{\rho}\right)\sigma_\varepsilon\eta(s-t)\bigg\},\end{aligned}$$

其中

$$\rho\triangleq k-\sigma_\theta,\quad \eta(x)\triangleq\frac{1}{\rho}(1-\mathrm{e}^{-\rho x}).$$

引理 3.2 定义

$$G(t,\theta)\triangleq\mathbb{E}_t\left[\exp\left\{a\int_t^T\theta(u)dW(u)+b\int_t^T\theta^2(u)du\right\}\right],$$

则 $G(t,\theta)$ 满足如下的偏微分方程:

$$\frac{\partial G}{\partial t}-[(k+a\sigma_\theta)\theta(t)-k\bar{\theta}]\frac{\partial G}{\partial \theta}+\frac{1}{2}\sigma_\theta^2\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}+\left(b+\frac{a^2}{2}\right)\theta^2(t)G=0, \tag{3.1}$$

及终端条件

$$G(T,\theta)=1. \tag{3.2}$$

而且,

$$G(t,\theta)=\exp\left\{A(T-t)\frac{\theta^2(t)}{2}+B(T-t)\theta(t)+C(T-t)\right\}, \tag{3.3}$$

其中 $A(\tau)$ 是下面方程的解,

$$A'(\tau)-\sigma_\theta^2A^2(\tau)+2(k+a\sigma_\theta)A(\tau)-2\left(b+\frac{a^2}{2}\right)=0, \tag{3.4}$$

满足边界条件

$$A(0)=0; \tag{3.5}$$

$B(\tau)$ 是下面方程的解,

$$B'(\tau)+(k-\sigma_\theta^2A(\tau)+a\sigma_\theta)B(\tau)-k\bar{\theta}A(\tau)=0, \tag{3.6}$$

满足边界条件

$$B(0)=0; \tag{3.7}$$

$C(\tau)$ 是下面方程的解,

$$C'(\tau)-k\bar{\theta}B(\tau)-\frac{\sigma_\theta^2}{2}B^2(\tau)-\frac{\sigma_\theta^2}{2}A(\tau)=0, \tag{3.8}$$

满足边界条件

$$C(0)=0. \tag{3.9}$$

我们记 A',B' 和 C' 分别是 A,B 和 C 的导数.

现在给出本文的主要结果:

定理 3.1 当 $T_r\leqslant t<\tau_d$, 值函数 $\Phi(t,X_t)$ 有如下的表达形式:

$$\begin{aligned}\Phi(t,X_t)=&\frac{1}{1-\beta_2}(Y_t^{v^*})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+\frac{1}{1-\beta_3}(Y_t^{v^*})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds,\end{aligned}$$

其中 $Y_t^{v^*}$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned}X_t=&(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&+\int_t^\infty(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds,\end{aligned}$$

及

$$K_i\triangleq r+\frac{\delta-r}{\beta_i},\quad i=1,2,3$$

和

$$\begin{aligned}H_i(s-t,\theta(t)) &\triangleq \mathbb{E}_t\bigg[\exp\bigg\{\frac{1-\beta_i}{\beta_i}\int_t^s\theta(u)dW(u)+\frac{1-\beta_i}{2\beta_i}\int_t^s\theta^2(u)du\bigg\}\bigg]\\ &=\exp\bigg\{A_i(s-t)\frac{\theta^2(t)}{2}+B_i(s-t)\theta(t)+C_i(s-t)\bigg\},\quad i=1,2,3.\end{aligned}$$

并且, 最优策略有下面的表达形式:

$$\begin{aligned}&c^*(s)=(Y_s^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}+c_d,\\ &\frac{I^*(t)}{\lambda_{x+t}}=M^*(t)-X_t=(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}+m-X_t,\\ &\sigma\pi^*(t)=(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_2}-\sigma_\theta[A_2(s-t)\theta(t)\\ &\qquad+B_2(s-t)]\bigg\}ds+(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))\\ &\qquad\times\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_3}-\sigma_\theta[A_3(s-t)\theta(t)+B_3(s-t)]\bigg\}ds.\end{aligned}$$

定理 3.2　当 $0\leqslant t<\min[T_r,\tau_d]$, 值函数 $V(t,X_t)$ 有下面的表达形式:

$$\begin{aligned}V(t,X_t)=&\frac{1}{1-\beta_1}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))ds\\ &+\frac{1}{1-\beta_2}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_{T_r}^\infty\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\ &+\frac{1}{1-\beta_3}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds,\end{aligned}$$

其中 $Y_t^{\alpha^*}$ 满足下面的方程:

$$\begin{aligned}X_t+b_t=&(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))ds\\ &+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_{T_r}^\infty\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\ &+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^\infty\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\ &+\int_t^{T_r}(c_l+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds+\int_{T_r}^\infty(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds,\end{aligned}$$

相应的最优策略有如下的表达形式:

$$\begin{aligned}&c^*(t)=(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}+c_l,\\ &\frac{I^*(t)}{\lambda_{x+t}}=M^*(t)-X_t=(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}+m-X_t,\\ &\sigma\pi^*(t)=(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_1}-\sigma_\theta[A_1(s-t)\theta(t)+B_1(s-t)]\bigg\}ds\\ &\qquad+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_{T_r}^\infty\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_2}-\sigma_\theta[A_2(s-t)\theta(t)+B_2(s-t)]\bigg\}ds\end{aligned}$$

$$+ (Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-t,\theta(t)) \bigg\{ \frac{\theta(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta [A_3(s-t)\theta(t)$$

$$+ B_3(s-t)] \bigg\} ds - b_t \sigma_\varepsilon - \varepsilon(t)\sigma_\varepsilon\sigma_\theta \int_t^{T_r} \frac{\zeta_s}{\zeta_t} K_{s,t} \eta(s-t) ds, \tag{3.10}$$

这里

$$K_{s,t} \triangleq \exp\bigg\{ \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\sigma_\theta^2 \int_t^s \eta^2(s-u)du + \bigg(\mu_\varepsilon - \frac{\sigma_\varepsilon\bar{\theta}k}{\rho} + \frac{\sigma_\theta\sigma_\varepsilon^2}{\rho}\bigg)(s-t) - \bigg(\theta(t) - \frac{k\bar{\theta}}{\rho} + \frac{\sigma_\theta\sigma_\varepsilon}{\rho}\bigg)\sigma_\varepsilon\eta(s-t) \bigg\}.$$

注 3.1 (1) 从定理 3.1 和 3.2 的结果, 我们看到值函数和财富过程通过随机过程 $Y_t^{v^*}(Y_t^{\alpha^*})$ 相互联系起来. 与文献 [3] 不同, 我们综合考虑了退休前和退休后个人消费投资及人寿保险策略, 因此得到的结果比较复杂. 而文献 [3] 仅考虑了退休前的最优问题, 因此在 CRRA 情形下可以直接得到值函数关于财富过程的解析表达式.

(2) 当取 $k = \sigma_\theta = 0$, 则 $H_i(t,\theta) \equiv 1$. 并且假设 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, 在这种情形下, 定理 3.2 的结果与文献 [4, 定理 2] 相近. 当把文献 [4, (3.10)] 带入其值函数的表达式中, 并且取 $\alpha_1 = 1$, 我们发现文献 [4, 定理 2] 得到的值函数的第一项 (令 $T \to \infty$) 与本文定理 3.2 求得的值函数的前两项和是吻合的. 不同的地方在于, Kwak 等人[4] 没有直接考虑父母的遗产效用, 而是将遗产转移给子女, 考虑了子女的消费效用.

(3) Pirvu 和 Zhang[12] 考虑了 $U_\gamma(s,c) = \mathrm{e}^{-\rho(s-t)}\frac{(cx)^\gamma}{\gamma}$ 形式的消费效用, 并且考虑在退休时刻前个人的消费投资和人寿保险购买问题. 因此, 他们得到的结果与 Ye[3] 很相近, 与本文得到的结果不同.

4 引理和定理的证明

引理 3.1 的证明 在测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下, 随机收益的动态变化满足如下的随机微分方程:

$$d\varepsilon(t) = \varepsilon(t)[(\mu_\varepsilon - \sigma_\varepsilon\theta(t))dt + \sigma_\varepsilon d\widetilde{W}(t)],$$

因此,

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(t)\exp\bigg\{ \mu_\varepsilon(s-t) + \sigma_\varepsilon(\widetilde{W}(s) - \widetilde{W}(t)) - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2(s-t) - \sigma_\varepsilon\int_t^s \theta(u)du \bigg\}.$$

另一方面, 市场价格风险 $\theta(t)$ 的动态变化满足

$$d\theta(t) = -\theta(t)(k-\sigma_\theta)dt + k\bar{\theta}dt - \sigma_\theta d\widetilde{W}(t).$$

由于 $\rho = k - \sigma_\theta$, 所以,

$$d(\mathrm{e}^{\rho t}\theta(t)) = \mathrm{e}^{\rho t}(k\bar{\theta}dt - \sigma_\theta d\widetilde{W}(t)).$$

进而,

$$\theta(u) = \mathrm{e}^{-\rho(u-t)}\theta(t) + \frac{k\bar{\theta}}{\rho}(1 - \mathrm{e}^{-\rho(u-t)}) - \int_t^u \sigma_\theta \mathrm{e}^{-\rho(u-v)} d\widetilde{W}(v).$$

对上面的方程两边积分, 我们得到

$$\int_t^s \theta(u)du = \bigg(\theta(t) - \frac{k\bar{\theta}}{\rho}\bigg)\eta(s-t) + \frac{k\bar{\theta}}{\rho}(s-t) - \int_t^s \sigma_\theta\eta(s-v)d\widetilde{W}(v),$$

其中 $\eta(x) \triangleq \frac{1}{\rho}(1-\mathrm{e}^{-\rho x})$. 因此,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(s) &= \varepsilon(t)\exp\bigg\{\mu_\varepsilon(s-t)+\sigma_\varepsilon(\widetilde{W}_s-\widetilde{W}_t)-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2(s-t)-\sigma_\varepsilon\bigg[\bigg(\theta(t)-\frac{k\bar\theta}{\rho}\bigg)\eta(s-t)+\frac{k\bar\theta}{\rho}(s-t)\\
&\qquad -\int_t^s\sigma_\theta\eta(s-v)d\widetilde{W}(v)\bigg]\bigg\}\\
&= \varepsilon(t)\exp\bigg\{\bigg(\mu_\varepsilon-\frac{\sigma_\varepsilon k\bar\theta}{\rho}+\frac{\sigma_\varepsilon^2\sigma_\theta}{\rho}\bigg)(s-t)+\bigg(\frac{k\bar\theta}{\rho}-\theta(t)-\frac{\sigma_\varepsilon\sigma_\theta}{\rho}\bigg)\sigma_\varepsilon\eta(s-t)+\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\sigma_\theta^2\int_t^s\eta^2(s-v)dv\bigg\}\\
&\qquad \times\exp\bigg\{\sigma_\varepsilon\int_t^s(\sigma_\theta\eta(s-v)+1)d\widetilde{W}(v)-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\int_t^s(\sigma_\theta\eta(s-v)+1)^2dv\bigg\}.
\end{aligned}$$

所以, 对上述等式两边关于 $\mathcal{F}_t$ 取条件期望, 我们得到引理 3.1 的结果. □

引理 3.2 的证明 首先, 利用类似 Feynman-Kac 公式的推导方法 (参见文献 [14]), 我们很容易得到 $G(t,\theta)$ 满足偏微分方程 (3.1). 将 (3.3) 代入偏微分方程 (3.1), 我们得到

$$\begin{aligned}
&-\bigg[A'(T-t)\frac{\theta^2(t)}{2}+B'(T-t)\theta(t)+C'(T-t)\bigg]-k(\theta(t)-\bar\theta)[A(T-t)\theta(t)+B(T-t)]+\frac{\sigma_\theta^2}{2}A(T-t)\\
&+\frac{\sigma_\theta^2}{2}[A(T-t)\theta(t)+B(T-t)]^2+\bigg(b+\frac{a^2}{2}\bigg)\theta^2(t)-a\theta(t)\sigma_\theta[A(T-t)\theta(t)+B(T-t)]=0. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

记 $\tau\triangleq T-t$, 依据 $\theta(t)$ 的阶数把所有项进行归类, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\bigg[A'(\tau)-\sigma_\theta^2A^2(\tau)+2(k+a\sigma_\theta)A(\tau)-2\bigg(b+\frac{a^2}{2}\bigg)\bigg]\theta^2(t)+2[B'(\tau)+(k-\sigma_\theta^2A(\tau)+a\sigma_\theta)B(\tau)\\
&-k\bar\theta A(\tau)]\theta(t)+2\bigg[C'(\tau)-k\bar\theta B(\tau)-\frac{\sigma_\theta^2}{2}B^2(\tau)-\frac{\sigma_\theta^2}{2}A(\tau)\bigg]=0.
\end{aligned}$$

因此, (3.3) 是偏微分方程 (3.1) 的解当且仅当 $A(\tau)$、$B(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 分别是微分方程 (3.4)、(3.6) 和 (3.8) 的解. 由边界条件 (3.2) 我们得到 (3.5)、(3.7) 和 (3.9). □

注 4.1 注意到 (3.4) 是一个标准的常系数 Riccati 方程, 因此, 我们可以得到如下方程的解, 若 $k^2+2ak\sigma_\theta-2b\sigma_\theta^2>0$, 记 $\eta\triangleq2\sqrt{(k+a\sigma_\theta)^2-(2b+a^2)\sigma_\theta^2}$, 则

$$A(\tau)=\frac{4(b+\frac{a^2}{2})(1-\mathrm{e}^{-\eta\tau})}{2\eta+(2k+2a\sigma_\theta-\eta)(1-\mathrm{e}^{-\eta\tau})};$$

若 $k^2+2ak\sigma_\theta-2b\sigma_\theta^2=0$, 则

$$A(\tau)=\frac{\tau(k+a\sigma_\theta)^2}{\sigma_\theta^2[1+(k+a\sigma_\theta)\tau]};$$

若 $k^2+2ak\sigma_\theta-2b\sigma_\theta^2<0$, 记 $\eta\triangleq2\sqrt{(2b+a^2)\sigma_\theta^2-(k+a\sigma_\theta)^2}$, 则

$$A(\tau)=\frac{\eta}{2\sigma_\theta^2}\tan\bigg(\frac{\eta\tau}{2}-\arctan\frac{2(k+a\sigma_\theta)}{\eta}\bigg)+\frac{(k+a\sigma_\theta)}{\sigma_\theta^2}.$$

进一步地, 若 $A(\tau)$ 已知, 则根据 (3.6) 和 (3.8), 我们可以得到

$$\begin{aligned}
B(\tau)&=\int_0^\tau k\bar\theta A(t)\exp\bigg\{-\int_t^\tau(k-\sigma_\theta^2A(u)+a\sigma_\theta)du\bigg\}dt,\\
C(\tau)&=\int_0^\tau\bigg(k\bar\theta B(t)+\frac{\sigma_\theta^2}{2}B^2(t)+\frac{\sigma_\theta^2}{2}A(t)\bigg)dt.
\end{aligned}$$

定理 3.1 的证明 当 $T_r \leqslant t < \tau_d$, 取 $v\ (>0)$ 作为 Lagrange 乘子, 定义对偶值函数

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(v,t) &\triangleq \sup_{\{c,\pi,I\}\in\mathcal{A}(t,X_t)} \bigg\{\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\delta s}{}_{s-t}p_{x+t}\{u_d(c(s))+\lambda_{x+s}U(M(s))\}ds\bigg] \\ &\quad - v\mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u}du}\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^\infty (H_s c(s)+\lambda_{x+s}H_s M(s))ds\bigg]\bigg\} \\ &= \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u}du}\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^\infty D_s\tilde{u}_d(Y_s^v)ds + \int_t^\infty \lambda_{x+s}D_s\tilde{U}(Y_s^v)ds\bigg], \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$D_s \triangleq \exp\bigg\{-\int_0^s (\lambda_{x+u}+\delta)du\bigg\}, \tag{4.3}$$

$$Y_s^v \triangleq vH_s/D_s = v\exp\bigg\{(\delta-r)s - \int_0^s \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^s \theta^2(u)du\bigg\}, \tag{4.4}$$

$$\tilde{u}_d(y) \triangleq \sup_{c\geqslant 0}\{u_d(c)-yc\} = \frac{\beta_2}{1-\beta_2}y^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} - yc_d, \tag{4.5}$$

$$\tilde{U}(y) \triangleq \sup_{M\geqslant 0}\{U(M)-yM\} = \frac{\beta_3}{1-\beta_3}y^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} - ym. \tag{4.6}$$

另外, 相对应的最优策略有下面的表达式:

$$c^*(s) = (Y_s^v)^{-\frac{1}{\beta_2}} + c_d,$$
$$M^*(s) = (Y_s^v)^{-\frac{1}{\beta_3}} + m.$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(v,t) &= \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u}du}\mathbb{E}_t\bigg[\int_t^\infty D_s\bigg(\frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_s^v)^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} - Y_s^v c_d\bigg)ds \\ &\quad + \int_t^\infty \lambda_{x+s}D_s\bigg(\frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_s^v)^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} - Y_s^v m\bigg)ds\bigg] \\ &= \mathrm{e}^{-\delta t}\bigg\{\frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du} \\ &\quad \times \mathbb{E}_t\bigg[\exp\bigg\{\frac{1-\beta_2}{\beta_2}\int_t^s \theta(u)dW(u) + \frac{1-\beta_2}{2\beta_2}\int_t^s \theta^2(u)du\bigg\}\bigg]ds \\ &\quad + \frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s} \\ &\quad \times \mathbb{E}_t\bigg[\exp\bigg\{\frac{1-\beta_3}{\beta_3}\int_t^s \theta(u)dW(u) + \frac{1-\beta_3}{2\beta_3}\int_t^s \theta^2(u)du\bigg\}\bigg]ds \\ &\quad - Y_t^v\bigg[\int_t^\infty (c_d + m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds\bigg]\bigg\}. \end{aligned}$$

根据引理 3.2, 记

$$a = \frac{1-\beta_i}{\beta_i}, \quad b = \frac{1-\beta_i}{2\beta_i},$$

我们得到

$$H_i(s-t,\theta(t)) \triangleq \mathbb{E}_t\bigg[\exp\bigg\{\frac{1-\beta_i}{\beta_i}\int_t^s \theta(u)dW(u) + \frac{1-\beta_i}{2\beta_i}\int_t^s \theta^2(u)du\bigg\}\bigg]$$

$$= \exp\left\{A_i(s-t)\frac{\theta^2(t)}{2} + B_i(s-t)\theta(t) + C_i(s-t)\right\}, \quad i=1,2,3,$$

其中 A_i, B_i, 和 C_i 分别满足引理 3.2 中的微分方程和边界条件. 因此,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(v,t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\bigg\{&\frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+\frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&-Y_t^v\bigg[\int_t^\infty(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds\bigg]\bigg\}.\end{aligned}$$

接下来, 我们通过利用 Legendre 逆变换公式 (参见文献 [13]), 通过对偶函数 $\widetilde{\Phi}(v,t)$ 的值来推导出值函数 $\Phi(t,X_t)$ 的值,

$$\begin{aligned}\Phi(t,X_t) &= \mathrm{e}^{\delta t}\inf_{Y_t^v>0}\bigg[\widetilde{\Phi}(v,t)+v\mathrm{e}^{\int_0^t\lambda_{x+u}du}H_tX_t\bigg]\\&=\inf_{Y_t^v>0}\bigg\{\frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&\quad+\frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_t^v)^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&\quad-Y_t^v\bigg[\int_t^\infty(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds\bigg]+Y_t^vX_t\bigg\}\\&=\frac{1}{1-\beta_2}(Y_t^{v^*})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&\quad+\frac{1}{1-\beta_3}(Y_t^{v^*})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}X_t = (Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}&\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&+\int_t^\infty(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds.\end{aligned}\tag{4.7}$$

相应的最优策略有如下表达:

$$\begin{aligned}c^*(s) &= (Y_s^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}+c_d,\\M^*(s) &= (Y_s^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}+m.\end{aligned}$$

对 (4.7) 中的财富过程 X_t 进行 Itô 展开并结合方程 (4.1), 我们得到

$$\begin{aligned}dX_t = (r+\lambda_{x+t})X_tdt&-((Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}+c_d)dt-\lambda_{x+t}((Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}+m)dt\\&+(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_2}-\sigma_\theta[A_2(s-t)\theta(t)\\&+B_2(s-t)]\bigg\}dsdW(t)+(Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left\{\frac{\theta(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta[A_3(s-t)\theta(t) + B_3(s-t)]\right\} ds dW(t) + (Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_2)du} \\
&\times H_2(s-t,\theta(t)) \left\{\frac{\theta^2(t)}{\beta_2} - \sigma_\theta \theta(t)[A_2(s-t)\theta(t) + B_2(s-t)]\right\} ds dt + (Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \\
&\times \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-t,\theta(t)) \left\{\frac{\theta^2(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta \theta(t)[A_3(s-t)\theta(t) + B_3(s-t)]\right\} ds dt.
\end{aligned}
$$

将上式与方程 (2.5) 中的漂移项与波动项进行比较, 我们得到最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的表达式

$$
\begin{aligned}
\sigma\pi^*(t) = {} & (Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-t,\theta(t)) \left\{\frac{\theta(t)}{\beta_2} - \sigma_\theta[A_2(s-t)\theta(t) + B_2(s-t)]\right\} ds \\
& + (Y_t^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-t,\theta(t)) \left\{\frac{\theta(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta[A_3(s-t)\theta(t) + B_3(s-t)]\right\} ds.
\end{aligned}
$$

证毕. □

定理 3.2 的证明 这个定理的证明与定理 3.1 是类似的, 我们知道

$$
\begin{aligned}
\Phi(T_r, X_{T_r}) = {} & \frac{1}{1-\beta_2} (Y_{T_r}^{v^*})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} \int_{T_r}^\infty \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^s (\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-T_r, \theta(T_r)) ds \\
& + \frac{1}{1-\beta_3} (Y_{T_r}^{v^*})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} \int_{T_r}^\infty \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-T_r, \theta(T_r)) ds,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

且

$$
\begin{aligned}
X_{T_r} = {} & (Y_{T_r}^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_2}} \int_{T_r}^\infty \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^s (\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-T_r, \theta(T_r)) ds \\
& + (Y_{T_r}^{v^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_{T_r}^\infty \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-T_r, \theta(T_r)) ds \\
& + \int_{T_r}^\infty (c_d + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^s (\lambda_{x+u}+r)du} ds.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

取 Lagrange 乘子 α (>0), 定义对偶函数

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}(\alpha, t) \triangleq {} & \sup_{\{c,\pi,I\} \in \mathcal{A}(t,X_t)} \left\{ \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_r} \mathrm{e}^{-\delta s} {}_{s-t}p_{x+t} \{u_l(c(s)) + \lambda_{x+s} U(M(s))\} ds + \Phi(T_r, X_{T_r}) \mathrm{e}^{-\delta T_r} {}_{T_r-t}p_{x+t} \right] \right. \\
& \left. - \alpha \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u} du} \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_r} (H_s c(s) + \lambda_{x+s} H_s M(s)) ds + H_{T_r} X_{T_r} \right] \right\} \\
= {} & \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u} du} \mathbb{E}_t \left[\int_t^{T_r} D_s \tilde{u}_l(Y_s^\alpha) ds + \int_t^{T_r} \lambda_{x+s} D_s \tilde{U}(Y_s^\alpha) ds + D_{T_r} \widetilde{\Phi}(Y_{T_r}^\alpha) \right],
\end{aligned}
$$

其中 D_s 和 $\tilde{U}(y)$ 的值由 (4.3) 和 (4.6) 给出, 且

$$
\begin{aligned}
& \tilde{u}_l(y) \triangleq \sup_{c \geqslant 0} \{u_l(c) - yc\} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1} y^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}} - yc_l, \\
& Y_s^\alpha \triangleq \frac{\alpha H_s}{D_s}, \\
& \widetilde{\Phi}(y) \triangleq \sup_{X_{T_r} \geqslant 0} \{\Phi(T_r, X_{T_r}) - yX_{T_r}\}.
\end{aligned}
$$

由 (4.8) 和 (4.9),

$$
\frac{\partial \Phi(T_r, X_{T_r})}{\partial X_{T_r}} = Y_{T_r}^{v^*}.
$$

所以,

$$Y_{T_r}^{v^*} = Y_{T_r}^{\alpha},$$

且

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(Y_{T_r}^{\alpha}) = {} & \frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& + \frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& - Y_{T_r}^{\alpha} \int_{T_r}^{\infty} (c_d + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+r)du} ds.
\end{aligned}$$

进而, 相应的最优策略有下面的表达式:

$$\begin{aligned}
c^*(s) &= (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1}{\beta_1}} + c_l, \\
M^*(s) &= (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1}{\beta_3}} + m,
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
X_{T_r}^* = {} & (Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1}{\beta_2}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& + (Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& + \int_{T_r}^{\infty} (c_d + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+r)du} ds.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(\alpha,t) = {} & \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u}du} \mathbb{E}_t \bigg[\int_t^{T_r} D_s \bigg(\frac{\beta_1}{1-\beta_1}(Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}} - Y_s^{\alpha} c_l \bigg) ds \\
& + \int_t^{T_r} D_s \lambda_{x+s} \bigg(\frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} - Y_s^{\alpha} m \bigg) ds \\
& + \frac{\beta_2}{1-\beta_2} D_{T_r} (Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& + \frac{\beta_3}{1-\beta_3} D_{T_r} (Y_{T_r}^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-T_r,\theta(T_r))ds \\
& - D_{T_r} Y_{T_r}^{\alpha} \int_{T_r}^{\infty} (c_d + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_{T_r}^{s}(\lambda_{x+u}+r)du} ds \bigg] \\
= {} & \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda_{x+u}du} \mathbb{E}_t \bigg[\int_t^{T_r} \frac{\beta_1}{1-\beta_1} D_s (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}} ds + \int_{T_r}^{\infty} \frac{\beta_2}{1-\beta_2} D_s (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}} ds \\
& + \int_t^{\infty} \frac{\beta_3}{1-\beta_3} \lambda_{x+s} D_s (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}} ds \bigg] - \mathrm{e}^{-\delta t} Y_t^{\alpha} \int_t^{T_r} (c_l + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_t^{s}(\lambda_{x+u}+r)du} ds \\
& - \mathrm{e}^{-\delta t} Y_t^{\alpha} \int_{T_r}^{\infty} (c_d + m\lambda_{x+s}) \mathrm{e}^{-\int_t^{s}(\lambda_{x+u}+r)du} ds.
\end{aligned}$$

根据引理 3.2, 我们得到

$$\mathbb{E}_t (Y_s^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_i}{\beta_i}} = (Y_t^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_i}{\beta_i}} \exp\bigg\{ -\frac{1-\beta_i}{\beta_i}(\delta - r)(s-t) \bigg\} H_i(s-t,\theta(t)), \quad i = 1,2,3.$$

因此,

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(\alpha,t)=\mathrm{e}^{-\delta t}\bigg\{&\frac{\beta_1}{1-\beta_1}(Y_t^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))ds\\&+\frac{\beta_2}{1-\beta_2}(Y_t^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_{T_r}^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+\frac{\beta_3}{1-\beta_3}(Y_t^{\alpha})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&-Y_t^{\alpha}\int_t^{T_r}(c_l+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds-Y_t^{\alpha}\int_{T_r}^{\infty}(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds\bigg\},\end{aligned}$$

其中 $K_i,H_i(s-t,\theta(t))$, $i=1,2,3$ 的值由定理 3.1 给出.

类似地, 我们通过利用 Legendre 逆变换公式, 得到值函数 $V(t,X_t)$ 有下面的表达式:

$$\begin{aligned}V(t,X_t)&=\mathrm{e}^{\delta t}\inf_{Y_t^{\alpha}>0}[\widetilde{V}(\alpha,t)+\alpha\mathrm{e}^{\int_0^t\lambda_{x+u}du}H_t(X_t+b_t)]\\&=\inf_{Y_t^{\alpha}>0}[\mathrm{e}^{\delta t}\widetilde{V}(\alpha,t)+Y_t^{\alpha}(X_t+b_t)]\\&=\frac{1}{1-\beta_1}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))ds\\&\quad+\frac{1}{1-\beta_2}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_2}{\beta_2}}\int_{T_r}^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&\quad+\frac{1}{1-\beta_3}(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1-\beta_3}{\beta_3}}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}X_t+b_t=&(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))ds\\&+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_{T_r}^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))ds\\&+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_3)du}\lambda_{x+s}H_3(s-t,\theta(t))ds\\&+\int_t^{T_r}(c_l+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds+\int_{T_r}^{\infty}(c_d+m\lambda_{x+s})\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+r)du}ds.\end{aligned}$$

由引理 3.1 和 $K_{s,t}$ 的定义, 我们得到

$$b_t=\varepsilon(t)\int_t^{T_r}\frac{\zeta_s}{\zeta_t}K_{s,t}ds.$$

分别对 X_t+b_t 和 b_t 进行 Itô 展开

$$\begin{aligned}dX_t=&(r+\lambda_{x+t})X_tdt-((Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}+c_l)dt-\lambda_{x+t}((Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}}+m)dt+\varepsilon(t)dt\\&+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}}\int_t^{T_r}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_1)du}H_1(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_1}-\sigma_\theta[A_1(s-t)\theta(t)+B_1(s-t)]\bigg\}dsdW(t)\\&+(Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_2}}\int_{T_r}^{\infty}\mathrm{e}^{-\int_t^s(\lambda_{x+u}+K_2)du}H_2(s-t,\theta(t))\bigg\{\frac{\theta(t)}{\beta_2}-\sigma_\theta[A_2(s-t)\theta(t)+B_2(s-t)]\bigg\}dsdW(t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-t,\theta(t)) \bigg\{ \frac{\theta(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta [A_3(s-t)\theta(t) \\
&+ B_3(s-t)] \bigg\} ds dW(t) - b_t \sigma_\varepsilon dW(t) - \varepsilon(t)\sigma_\varepsilon\sigma_\theta \int_t^{T_r} \frac{\zeta_s}{\zeta_t} K_{s,t}\eta(s-t) ds dW(t) \\
&+ (Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_1}} \int_t^{T_r} \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_1)du} H_1(s-t,\theta(t)) \bigg\{ \frac{\theta^2(t)}{\beta_1} - \sigma_\theta\theta(t)[A_1(s-t)\theta(t) + B_1(s-t)] \bigg\} ds dt \\
&+ (Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_2}} \int_{T_r}^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_2)du} H_2(s-t,\theta(t)) \bigg\{ \frac{\theta^2(t)}{\beta_2} - \sigma_\theta\theta(t)[A_2(s-t)\theta(t) + B_2(s-t)] \bigg\} ds dt \\
&+ (Y_t^{\alpha^*})^{-\frac{1}{\beta_3}} \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{-\int_t^s (\lambda_{x+u}+K_3)du} \lambda_{x+s} H_3(s-t,\theta(t)) \bigg\{ \frac{\theta^2(t)}{\beta_3} - \sigma_\theta\theta(t)[A_3(s-t)\theta(t) \\
&+ B_3(s-t)] \bigg\} ds dt - b_t\sigma_\varepsilon\theta(t)dt - \varepsilon(t)\sigma_\varepsilon\sigma_\theta\theta(t) \int_t^{T_r} \frac{\zeta_s}{\zeta_t} K_{s,t}\eta(s-t) ds dt,
\end{aligned}
$$

因此, 将上式 dX_t 的漂移项和波动项与方程 (2.4) 相比较, 我们得到最优投资策略 $\pi^*(t)$. □

参考文献

1 Yaari M E. Uncertain lifetime, life insurance and the theory of the consumer. Rev Econom Stud, 1965, 32: 137–150
2 Richard S. Optimal consumption, portfolio and life insurance rules for an uncertain lived individual in a continuous time model. J Financ Econ, 1975, 2: 187–203
3 Ye J. Optimal life insurance purchase, consumption, and portfolio under an uncertain life. PhD Thesis. Chicago: University of IIIinois at Chicago, 2006
4 Kwak M, Yong H S, Choi U J. Optimal investment and consumption decision of family with life insurance. Insurance Math Econom, 2011, 48: 176–188
5 Huang H, Milevsky M A. Portfolio choice and mortality-contingent claims: The general HARA case. JBF, 2008, 32: 2444–2452
6 Huang H, Milevsky M A, Wang J. Portfolio choice and life insurance: The CRRA case. J Risk Insurance, 2008, 75: 847–872
7 Bruhn K, Steffensen M. Household consumption, investment and life insurance. Insurance Math Econom, 2011, 48: 315–325
8 Kraft H, Steffensen M. Optimal consumption and insurance: A continuous-time Markov chain approach. Astin Bull, 2008, 28: 231–257
9 Nielsen P H, Steffensen M. Optimal investment and life insurance strategies under minimum and maximum constraints. Insurance Math Econom, 2008, 43: 15–28
10 Kim T C, Omberg E. Dynamic nonmyopic portfolio behavior. Rev Financ Stud, 1996, 9: 141–161
11 Watcher J A. Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. J Financ Quant Anal, 2002, 37: 63–91
12 Pirvu T A, Zhang H. Optimal investment, consumption and life insurance under mean-reverting returns: The complete market solution. Insurance Math Econom, 2012, 51: 303–309
13 Karatzas I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance. New York: Springer-Verlag, 1998
14 Karatzas I, Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991

Optimal life insurance purchase and consumption/investment under mean-reverting returns

LIANG XiaoQing & GUO JunYi

Abstract In this paper, we consider optimal insurance and consumption/investment rules for a wage earner until an uncertain lifetime under mean-reverting returns. We assume the wage earner receives a random labor income and can change the preferences before and after retirement. By using the martingale method, we solve this problem and obtain the optimal strategies and value function explicitly for the family of HARA (hyperbolic absolute risk aversion) utilities.

Keywords **life insurance, mean-reverting process, martingale method**

MSC(2010) **93E20, 91B28**

doi: 10.1360/N012015-00054