

允许修改推理规则的开放逻辑*

应明生

(江西师范大学数学系, 南昌 330027)

关键词 开放逻辑 推理规则 重构

最近, 李未^[1]为了刻画知识的增长、更新以及假说的进化建立了一个开放的逻辑理论, 特别是得到了认知进程的收敛性定理这样一个深刻的结果. 其后, 他在文献[2]中又将其作为逻辑框架应用于知识基的维护. 在知识库中, 除了一些事实(相当于句子)作为知识之外, 还有其特有的一些推理规则, 而且这些推理规则有时也会遇到反驳, 需要加以修改和维护. 本文试图在开放逻辑中引入推理规则的反驳与修改. 值得注意的是, 其它一些关于知识基维护的理论, 如 Alchourrón, Gärdenfors 与 Makinson^[3]都没有触及这个问题.

定义1 设 $\varphi \in Wff$, φ 的自由变元都在 $x_1, \dots, x_n$ 中. 如果对任意 $a_1, \dots, a_n \in |M|$ (M 的论域), 总有 $M \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, 则记 $M \models \varphi$.

(1) 设 r 是 n 元(Hilbert 型)推理规则^[4], 即 r 是映射 $D(r) \subseteq Wff^n \rightarrow Wff$. 称模型 M 满足 r , 记 $M \models r$, 如果对任意 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in D(r)$, 当 $M \models \varphi_i, i = 1, \dots, n$ 时, $M \models r(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. 若 Γ 是一集推理规则, 则 $M \models \Gamma$ 表示对任意 $r \in \Gamma, M \models r$;

(2) 一集推理规则 Γ 称为和谐的当且仅当存在模型 $M \models \Gamma$;

(3) 设 Γ 是一集推理规则, r 是一个推理规则, 称 r 可由 Γ 语义导出, 记 $\Gamma \models r$, 若对任意模型 M , 当 $M \models \Gamma$ 时, 也有 $M \models r$.

命题1 记 $T(r) = \{ \bigwedge_{i=1}^n c(\varphi_i) \rightarrow c(r(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) \mid (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in D(r) \}$, 这里 $c(\varphi)$ 表示 φ 的闭包, 即当 φ 的自由变元都在 $x_1, \dots, x_n$ 中时, $c(\varphi) = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$; 又记 $T(\Gamma) = \bigcup_{r \in \Gamma} T(r)$.

(1) $M \models \Gamma$ 当且仅当 $M \models T(\Gamma)$;

(2) Γ 是和谐的当且仅当 $T(\Gamma)$ 和谐;

(3) $\Gamma \models r$ 当且仅当 $T(\Gamma) \models T(r)$.

系1 (1) 若 Γ 的每个有限子集和谐, 则 Γ 亦和谐;

(2) 设 r 是有限的, 即 $D(r)$ 有限. 若 $\Gamma \models r$, 则存在 Γ 的有限子集 $\Delta \models r$.

定义2 推理规则 r 称为闭的, 若 $D(r), R(r)$ 中都只包含句子, 和谐的非空闭推理规则集称为假说. 闭推理规则 r 称为假说 Γ 的新假设, 若 $\Gamma \cup \{r\}$ 和谐且 $\Gamma \not\models r$.

定义3 设 Γ 是假说, r 是闭规则. 若 r 是可满足的, 即存在模型 $M \models r$, 又 $\Gamma \cup \{r\}$ 不和

谐,则称使 $\Delta \cup \{r\}$ 和谐的 Γ 的极大子集 Δ 为 Γ 关于 r 的可接受子集.

命题 2 每个使 $\Delta \cup \{r\}$ 和谐的 Γ 的子集 Δ 都可以扩充为 Γ 关于 r 的可接受子集.

命题 3 若 Δ 为 Γ 关于 r 的可接受子集,则存在使 Θ 和谐的 $T(\Gamma)$ 的极大子集 Θ 满足 $\Delta = \{s \in \Gamma \mid T(s) \subseteq \Theta\}$.

注 有反例说明命题 3 之逆不成立. 由此可见,推理规则的修改问题并不能完全化归为公式的情形加以处理.

定义 4 设 Γ 是假说, r 是闭规则.

- (1) 若 $\Gamma \vdash r$, 则 $\Gamma \cup \{r\}$ 称为 Γ 的一个正常扩充;
- (2) 若 r 是 Γ 的新假设, 则 $\Gamma \cup \{r\}$ 称为 Γ 的一个 N -重构;
- (3) 若 r 可满足, $\Gamma \cup \{r\}$ 不和谐且 Δ 是 Γ 关于 r 的可接受子集, 则 $\Delta \cup \{r\}$ 称为 Γ 的一个 R -重构.

定义 5 设 $\alpha \in O_n$ (序数). 假说序列 $\{\Gamma_\beta\}_{\beta < \alpha}$ 称为 α 长的认知进程, 如果对任意 $\beta < \alpha$.

- (1) 当 $\beta = \gamma + 1$ 时, Γ_β 为 Γ_γ 的一个正常扩充、 N -重构或 R -重构;
- (2) 当 $\beta \in O_{n_1}$ (极限序数) 时,

$$\lim \{\Gamma_\gamma\}_{\gamma < \beta} \subseteq \Gamma_\beta \subseteq \overline{\lim} \{\Gamma_\gamma\}_{\gamma < \beta},$$

这里

$$\begin{aligned} \lim \{\Gamma_\gamma\}_{\gamma < \beta} &= \{r \mid \text{存在 } \gamma < \beta \text{ 使对任意 } \delta \geq \gamma, r \in \Gamma_\delta\}, \\ \overline{\lim} \{\Gamma_\gamma\}_{\gamma < \beta} &= \{r \mid \text{对任意 } \gamma < \beta, \text{ 存在 } \delta \geq \gamma, \text{ 使 } r \in \Gamma_\delta\}. \end{aligned}$$

注 (1) 当 $\alpha > \omega$ 时, 认知进程本身就包含有极限过程, 这可以看作认知产生了(多次)飞跃.

(2) 将 Γ_γ 作为 $\Gamma_{\gamma+1}$ 的认识基础. 当 $\Gamma_\gamma \vdash r$ 时, 虽然 r 可由 Γ_γ 推出, 但这种推导可能十分困难(比如数学中一些定理的获得); 在认识过程中, 人们往往将 r 加入 Γ_γ 中也作为新的认识基础. 因此, 在定义 5 的情形(1)中, 允许 $\Gamma_{\gamma+1}$ 为 Γ_γ 的正常扩充.

定理 1 给定模型 M 及假说 Γ , 总存在长度 $\leq 2^{\|L\|}$ 的认知进程 $\{\Gamma_\beta\}$ 使 $\Gamma_0 = \Gamma$ 且 $\lim \{\Gamma_\beta\} = \mathcal{R}_M$, 这里 $\mathcal{R}_M$ 是 M 所满足的所有闭推理规则之集.

证 将 $\mathcal{R}_M$ 排为序列 $\{r_\beta\}_{\beta < \alpha}$ ($\alpha \leq 2^{\|L\|}$), 总可设 $\alpha \in O_{n_1}$. 令 $\Gamma_0 = \Gamma$, 并设 Γ_β 已经定义且满足 $\{r_\theta\}_{\theta < \beta} \subseteq \Gamma_\beta$, 则 $\Gamma_{\beta+1}$ 定义如下:

情形 1 $\Gamma_\beta \vdash r_\beta$ 或 $\Gamma_\beta \cup \{r_\beta\}$ 和谐且 $\Gamma_\beta \not\vdash r_\beta$. 令 $\Gamma_{\beta+1} = \Gamma_\beta \cup \{r_\beta\}$.

情形 2 $\Gamma_\beta \cup \{r_\beta\}$ 不和谐. 由于 $M \models r_\beta$, r_β 可满足. 因为 $(r_\theta)_{\theta < \beta} \cup \{r_\beta\}$ 和谐, 由命题 2, 存在 Γ_β 关于 r_β 的可接受子集 $\Delta_\beta \supseteq \{r_\theta\}_{\theta < \beta}$, 令 $\Gamma_{\beta+1} = \Delta_\beta \cup \{r_\beta\}$.

当 $\beta \in O_{n_1}$ 时, 令 $\Gamma_\beta = \lim \{\Gamma_\gamma\}_{\gamma < \beta}$. 显然, $\{\Gamma_\beta\}_{\beta < \alpha}$ 是认知进程且 $\lim \{\Gamma_\beta\} \supseteq \mathcal{R}_M$. 以下往证 $\overline{\lim} \{\Gamma_\beta\} \subseteq \mathcal{R}_M$. 因为 $\overline{\lim} \{\Gamma_\beta\}$ 的元素都是闭推理规则, 只需证若闭推理规则 $r \notin \mathcal{R}_M$, 则 $r \notin \overline{\lim} \{\Gamma_\beta\}$. 这可证明如下: 若闭规则 $r \notin \mathcal{R}_M$, 则 $\mathcal{R}_M \cup \{r\}$ 不和谐. 事实上, 若反设 $\mathcal{R}_M \cup \{r\}$ 和谐, 即存在 $M' \models \mathcal{R}_M \cup \{r\}$, 则 $M' \models \mathcal{R}_M$. 将每个句子看作一个零元的闭推理规则, 则对任意句子 A , 当 $M \models A$ 时, 总有 $M' \models A$. 如此, 当 $M' \models A$ 时, $M' \not\models \neg A$, 从而 $M \not\models \neg A$, 即 $M \models A$. 因此, M 与 M' 初等等价. 再由 $M' \models r$ 得 $M \models r$ (注意 r 是闭推理规则, 并参见命题 1(1)), 即 $r \in \mathcal{R}_M$, 矛盾. 现在, 由 $\mathcal{R}_M \cup \{r\}$ 不和谐及命题 1 的系 1(1) 得知, 存在 $r_{\beta_1}, \dots, r_{\beta_n}$, 使 $\beta_i < \alpha$

$(i = 1, \dots, n)$ 且 $\{r, r_{\beta_1}, \dots, r_{\beta_n}\}$ 不和谐. 令 $\beta_0 = \max\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, 由于 $\alpha \in O_{n_{\parallel}}$, $\beta_0 < \alpha$, 有 $\beta_0 + 2 < \alpha$. 因为 $r_{\beta_1}, \dots, r_{\beta_n} \in \Gamma_{\beta_0+1}$, 则 $r \notin \Delta_{\beta_0+1}$. 由 Γ_{β} 的定义知, 当 $\delta \geq \beta_0 + 2$ 时, $r \notin \Gamma_{\delta}$, 从而 $r \notin \overline{\lim}\{\Gamma_{\beta}\}$.

为了进一步地研究开放逻辑中推理规则的反驳与修改, 需要将模型论中的理论用闭推理规则集代替而获得一些相应的结论, 这实际上给模型论提出了一类新的问题. 另外, 本文只考虑了 Hilbert 型推理规则, 还有必要讨论 Gentzen 型推理规则^[4]的反驳与修改.

参 考 文 献

- 1 李 未. 一个开放的逻辑系统. 中国科学, A 辑, 1992, (10): 1 103~1 114
- 2 Li W. A logical framework for knowledge base maintenance. J of Comput Sci & Technol, 1995, 10(3): 193~205
- 3 Alchourrón C E, Gärdenfors R, Makinson D. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. J Symbolic Logic, 1985, 50(2): 510~530
- 4 Wójcicki R. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988