

# 柔性物体在卡门涡街中的运动和受力分析

王思莹, 贾来兵, 尹协振\*

中国科学技术大学近代力学系, 合肥 230027

\* 联系人, E-mail: [xzyin@ustc.edu.cn](mailto:xzyin@ustc.edu.cn)

2008-07-29 收稿, 2008-10-23 接受

国家自然科学基金(编号: 10832010)和中国科学院创新工程(编号: KJ CX2-YW-L05)资助项目

**摘要** 在肥皂膜水洞中完成了柔性丝线在自由来流和卡门涡街中的实验, 观测了丝线在两种情况下的运动, 并基于实验所得的运动信息, 利用二维面元法计算了丝线在两种情况下的受力情况. 实验和数值模拟结果显示, 丝线在卡门涡街中的运动和受力情况都与自由来流中不同. 在卡门涡街中, 丝线的摆动频率等于卡门涡街脱泻的频率, 振幅变小, 身体曲率变大. 数值计算定量地证明了丝线在自由来流中受阻力作用, 在卡门涡街中受推力作用. 同时, 还研究了卡门涡街中丝线受到的平均阻力随丝线和涡街的相对相位的变化关系.

**关键词**  
卡门涡街  
柔性丝线  
肥皂膜  
面元法

人类文明发展历史进程中, 鱼类的运动在船舶工业等方面给了人们很多启示. 为了研究鱼类游动的基本原理, 科学界对均匀来流中鱼的运动形态做了广泛深入的研究. 但是, 自然界中鱼的生存条件变化多样, 在不同的环境中, 鱼类采用的游动模式也各不相同. 研究者观测发现, 鱼类具有调整自身体态, 利用周围环境中的湍流减少自身能耗的能力. 对于鱼类与周围湍流流场耦合机制的研究, 在工程学和生物力学上都有重要意义.

为了研究鱼体和周边涡结构的耦合机制, 哈佛大学的Liao等人<sup>[1]</sup>在水洞中研究了活鱼在D形圆柱后面卡门涡街中的运动, 并将实验结果与自由来流中活鱼的游动进行比较. 他们分析得出, 卡门涡街中鱼体采用一种独特的运动模式—卡门步态运动. 以卡门步态行进时, 鱼的摆尾频率与卡门涡街的频率相同, 并且鱼体摆动振幅和身体曲率都比自由来流中大. 2003年, Liao等人<sup>[2]</sup>对鱼体的卡门步态进行了更深入的研究. 他首先用DPIV (digit particle image velocimetry)测量了进行卡门步态运动的鱼体周边的流场, 结果显示鱼在卡门涡街之间穿行. 然后他们利用EMG (Electromyography)测量了鱼体的肌电信号, 测量结果显示, 卡门步态行进的鱼体只有靠近头部的测试点有肌电信号, 而自由来流中游动的鱼全身的测试点都有信号. 这些结果直接证明了在卡门涡

测试点都有信号. 这些结果直接证明了在卡门涡街中运动的活鱼的肌肉收缩明显减少, 说明采用卡门步态行进的鱼类确实减少了自身的运动耗能. 后来, MIT大学的Beal等人<sup>[3]</sup>与Liao等合作, 进行了死鱼在卡门涡街中的实验研究. 实验结果显示, 一条麻醉的鱼也能与卡门涡街同步摆动, 并最终获得推力, 逆流前行. 死鱼的卡门步态运动说明一个完全被动变形的鱼体也可以从卡门涡街中汲取能量, 获得推力.

这些有趣的活鱼和死鱼实验证明: 具有主动控制和被动变形的柔性物体都能够从卡门涡街中汲取能量, 获得推力. Muller<sup>[4]</sup>教授通过分析鱼体周围的涡结构, 指出“卡门涡街中的活鱼变形更像一个被动的翼型或者摆动的旗帜”. 因此, 研究被动变形的物体在卡门涡街中的运动, 对于鱼体和卡门涡街的耦合机制的研究具有重大意义. 但是, 由于鱼体复杂的三维体型、质量分布以及活体实验测力技术等限制, 这些实验很难给出定量的分析结果.

为了定量地研究柔性物体在卡门涡街中的运动和受力情况, 分析涡街和柔性体的耦合机制, 我们设计了简单的二维模型实验. 该实验在垂直肥皂膜水洞中进行, 采用一根质量均布的柔性丝线为研究对象, 考察了丝线在卡门涡街中的运动情况, 并且基于实验所得运动信息, 利用经典的二维面元法, 计算了

丝线的受力情况。同样，为了进行对比分析，我们也进行了丝线在自由来流中的实验研究和受力计算。另外，由于卡门涡街中丝线受力随着丝线运动与卡门涡街相位差的变化有很大不同，我们利用数值模拟计算了不同相位差情况下丝线受到的阻力系数，分析了丝线受力和相位差的关系。

## 1 研究方法

### 1.1 实验装置

整个实验在实验室研制的垂直肥皂膜水洞中进行，该肥皂膜水洞的运行机制和结构设计都与Zhang等人<sup>[5]</sup>中所用的水洞基本相同。前人研究<sup>[6-8]</sup>已经证明，当肥皂膜运行速度远远低于它的Marangoni弹性波速，同时肥皂膜的初始不均匀厚度很小时，整个肥皂膜流场遵循二维不可压缩N-S方程。因此，肥皂膜水洞作为一个二维实验平台，可以用来进行很多二维水动力学实验。

如图1所示，本文所用的实验装置和布局与Jia等人<sup>[9]</sup>所用的大致相同：

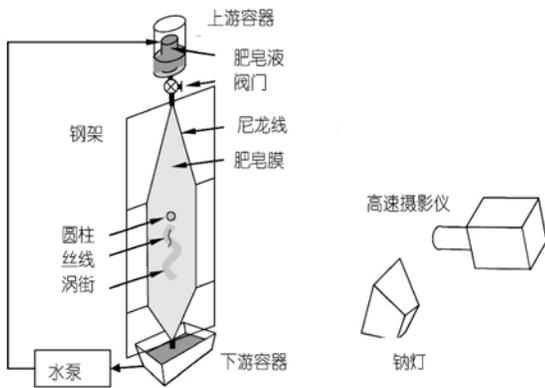


图1 实验装置<sup>[9]</sup>

肥皂膜水洞的运行原理是：肥皂液被水泵输送到上游容器中，通过容器中的溢流装置，保持固定的动压头。在重力作用下，肥皂液通过上游容器的阀门，沿着连接上下游容器的两根尼龙丝，往下流动，最终回到下游容器，形成循环。直径1.5 mm的尼龙丝由刚性框架支撑张开，在尼龙丝之间形成由扩张段、实验段和收缩段组成的肥皂膜。由于重力的原因，刚注入肥皂膜的溶液会加速运动，但很快在空气阻力的作用下，在实验段达到稳定速度。该肥皂膜的运行速度范围是1.5~2.5 m/s，由上游容器出口处的阀门通过控制溶液流量可以连续调节。本文所有实验过程

中，肥皂膜流速保持在2.0 m/s，远远低于肥皂膜的Marangoni弹性波速。

实验过程中，我们在肥皂膜实验段上游摆置一个直径为4 mm的圆柱，则在圆柱的尾迹中有卡门涡街形成。然后将一根长度为10 mm，直径为150 μm的丝线放在圆柱后距圆心约60 mm处，观察其变形运动。丝线的密度和抗弯刚度分别是 $1.3 \times 10^{-5}$  kg/m和 $6.2 \times 10^{-10}$  Pa·m<sup>4</sup>。本实验的难点在于丝线头部的固定。由于重力的存在，我们必须固定丝线不让它往下游移动，但是同时又必须保证整个丝线从头到尾都可以在横向自由运动。因此，我们采用文献Jia等人<sup>[10]</sup>中涡街中丝线的固定方法：将丝线绑在肥皂膜外一根极细的蚕丝上，再将蚕丝的另一端固定在平台上。在蚕丝的牵引作用下，可以保持丝线的垂直位置，同时也保证了整个丝线可以自由地在横向被动摆动。

实验流场的照明由钠灯来完成。由于肥皂膜的厚度为几倍的钠灯光波长，由肥皂膜前后两个与空气接触的界面反射的光线会形成干涉条纹，这些干涉条纹直接反映了肥皂膜厚度的变化，而肥皂膜的厚度由其速度决定，因此这些干涉条纹也就直观地表现了流场的速度信息。我们利用数字高速摄影机(Mikrotron, MC1310)记录丝线的运动图像和周边流场信息，拍摄频率为2004 帧/秒。同样，为了对比分析，我们也用相同的实验手段进行了单根丝线在没有圆柱的肥皂膜中的实验，记录自由来流下丝线的运动形态和流场信息。

### 1.2 面元法

根据实验图像得到的丝线运动信息，我们用拟合方程描述丝线的运动规律，并且采用面元法利用丝线的运动作为运动边界条件，计算了丝线的受力情况。面元法是一种比较成熟的数值模拟方法，它的思想是在物体表面和尾迹中布置点涡、源汇等基本解，利用这些基本解诱导的速度场来模拟整个流场。本文选用点涡作为基本解，每个面元布置一个点涡，每个时间步产生一个尾涡，这些点涡和尾涡的强度通过满足每个面元的边界条件和Kelvin定律求得。与传统的面元法不同的是，本文假设整个流场由已知的卡门涡街和那些配置的点涡共同诱导而成。因此，求解点涡强度所用的边界条件要减去卡门涡街诱导的部分速度。求解出各点涡强度以后，利用不可压缩伯努利方程求解丝线上的压力分布，并通过积分求解整个丝线的升力和阻力系数。升力和阻力系数的

计算公式为

$$C_L = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta p_j \cdot \Delta x \cdot n_{xj}}{\frac{1}{2} \rho U^2 c}, \quad C_D = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta p_j \cdot \Delta x \cdot n_{yj}}{\frac{1}{2} \rho U^2 c}, \quad (1)$$

其中 $\Delta p_j$ 是丝线上第 $j$ 个面元上下表面所受到的压力差,  $\Delta x$ 是面元的长度,  $n$ 为面元的单位法向向量,  $\rho$ 是流体密度,  $U$ 是肥皂膜的流速,  $c$ 是丝线的总长度.

## 2 研究结果

### 2.1 实验

图 2 展示了高速摄影拍摄的丝线分别在自由来流和卡门涡街中的运动图像. 实验结果显示, 在来流速度为 2.0 m/s 时, 一根单独的 10 mm 的丝线以 69 Hz 的频率摆动. 同样的来流速度下, 直径为 4 mm 的圆柱的脱涡频率是 80 Hz, 涡间距约为 20 mm. 将丝线置于卡门涡街中, 丝线在卡门涡街之间穿行, 并且摆动频率与圆柱脱涡频率一致.

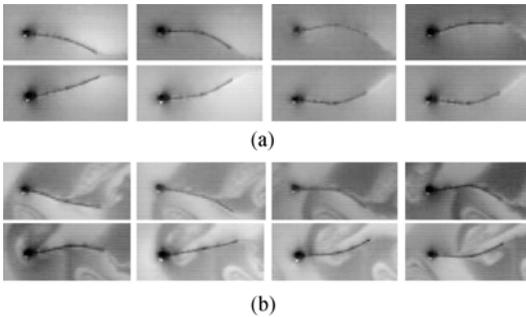


图 2 不同时刻的运动图像  
(a) 自由来流中; (b) 卡门涡街中

为了测量丝线摆动振幅和波数, 我们从每一张图片中提取丝线的轮廓以及涡街的位置, 并将它们合成在一起, 结果如图 3 和 4 所示. 图 3 表现了一个周期中丝线的身体轮廓曲线, 测量发现, 在自由来流中, 丝线前缘的摆动振幅是 0.7 mm, 后缘的振幅是 2.8 mm. 而卡门涡街中, 丝线前后缘的摆动振幅分别是 0.6 和 2.1 mm, 小于自由来流中的数值. 另外, 在卡门涡街的影响作用下, 丝线的体干曲率变大了, 也就是丝线变形运动的波速变大了. 图 4 反映了丝线与涡街的耦合作用, 从图中我们可以看到丝线在卡门涡街之间穿行, 丝线前缘运动与卡门涡街之间的相位差约为 $\pi/4$ . 本文所用相位差的定义与

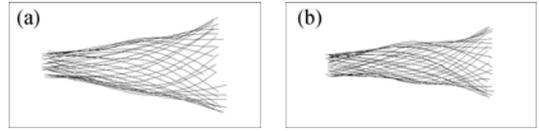


图 3 丝线一个周期的躯干曲线图  
(a) 自由来流中; (b) 卡门涡街中

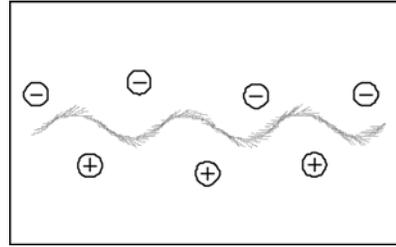


图 4 丝线与涡街的耦合  
⊖ 顺时针涡, ⊕ 逆时针涡, 丝线从右向左运动

Liao 等人<sup>[2]</sup>活鱼实验中的定义相同.

### 2.2 丝线运动方程

利用实验数据, 我们采用下列表达式来描述丝线的运动规律:

$$y(x,t) = c \cdot A\left(\frac{x}{c}\right) \sin[2\pi(ft - kx) + \theta_0], \quad (2)$$

其中  $y$  是丝线的横向位移,  $x$  是沿流向的坐标,  $t$  表示时间.  $A$  是丝线摆动振幅与无量纲体长的相关函数.  $c$ ,  $f$  和  $k$  分别是丝线体长, 波动频率和波数.  $\theta_0$  是丝线前缘运动与卡门涡街的初始相位差.

拟合所得的丝线在自由来流和卡门涡街中运动的各参数值列举如下, 方程(3)为自由来流中丝线运动的参数, 方程(4)为卡门涡街中丝线运动参数.

$$A(x) = 0.07283 - 0.11416x + 1.68858x^2 - 3.66085x^3 + 3.26049x^4 - 0.96599x^5, \quad (3)$$

$$c = 10 \text{ mm}, f = 69 \text{ Hz}, k = 35, \theta_0 = 0,$$

$$A(x) = 0.0708 - 0.12874x + 1.32048x^2 - 2.69158x^3 + 2.07738x^4 - 0.43687x^5,$$

$$c = 10 \text{ mm}, f = 80 \text{ Hz}, k = 45, \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad (4)$$

拟合方程描述的丝线运动规律的体干曲线如图 5 所示.

### 2.3 卡门涡街强度

圆柱后面卡门涡街的强度很难从实验中直接测量. 因此我们将卡门涡街看成两排匀速向下游飘移的交错排列的无限长涡列. 根据流体力学基本理论, 涡列的强度 $\Gamma$ 可以通过其自诱导速度 $V$ 求得. 涡列强度和其自诱导速度之间的关系表达为<sup>[12]</sup>:

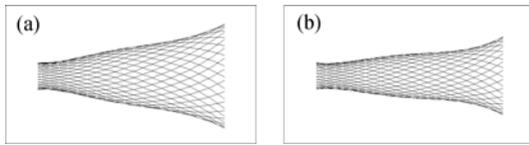


图5 拟合的丝线一个周期的躯干曲线  
(a) 自由来流中; (b) 卡门涡街中

$$\Gamma = -\frac{Vl}{\pi} \tanh^{-1} \frac{\pi d}{l} = \frac{Vl}{\pi} \frac{e^{\frac{\pi d}{l}} + e^{-\frac{\pi d}{l}}}{e^{\frac{\pi d}{l}} - e^{-\frac{\pi d}{l}}}, \quad (5)$$

其中  $l$  是涡列的涡间距, 可以直接从实验图像中测得;  $d$  是两个涡列的垂直间距, 根据涡街的稳定性条件, 其数值应该等于  $0.281l$ . 而卡门涡街的自诱导速度等于卡门涡街实际漂流的速度减去来流的速度. 实验中用 PTV (particle tracking velocimetry) 方法测得, 涡街漂流速度  $U' = 1.6 \text{ m/s}$ , 来流速度  $U = 2.0 \text{ m/s}$ . 因此, 卡门涡街自诱导速度  $V = U' - U = -0.4 \text{ m/s}$ .

### 2.4 数值结果

面元法中, 利用丝线后缘脱出的尾涡运动可以展示丝线尾迹的涡结构. 面元法数值模拟过程中, 我们假设每一个时间步在丝线后缘都拖出一个点涡, 点涡脱出后, 在以后的时间中都以当地的流场速度随流体一起运动. 如前面所说, 流场速度由两部分组成, 一部分由卡门涡街诱导的, 另一部分是由所有分布在丝线上和尾迹中的点涡诱导的. 图 6(b) 显示的是数值模拟的丝线在自由来流中运动时的尾涡结构, 6(a) 是相同时刻的实验图像. 我们可以看到, 数值结果很好地再现了流动图像. 从这两个图片中, 我们可以观察到涡从丝线后缘脱落后, 在往后飘移的过程中卷曲成交替的顺时针和逆时针涡.

本文用数值模拟方法计算了丝线的受力情况. 图 7 展示了两种流场情况下丝线受到的升阻力曲线. 从图中可以看出, 在两种流场情况下, 阻力变化的频率都是升力变化频率的两倍, 并且平均升力都是零. 但是, 在卡门涡街中, 丝线受到的升阻力的幅值比自

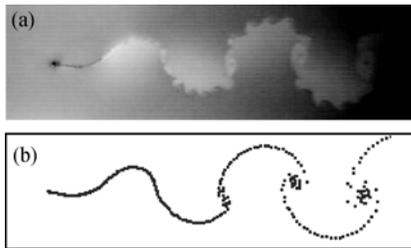


图6 尾涡结构

(a) 实验图像; (b) 数值模拟结果

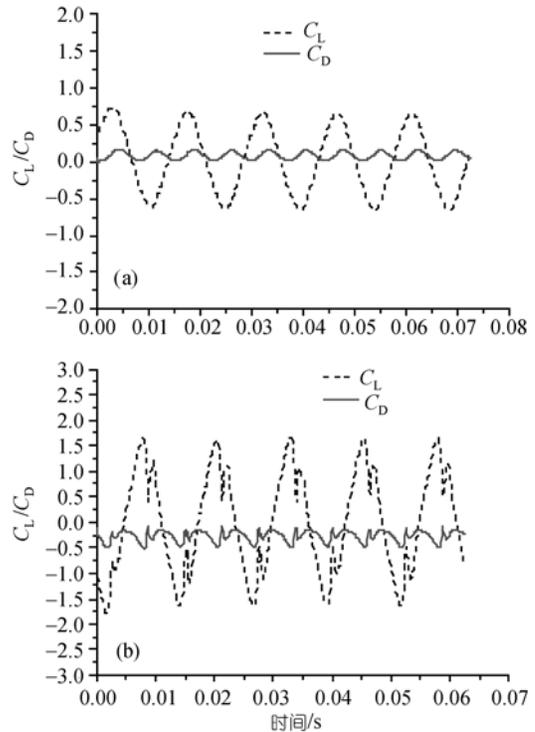


图7 升阻力系数曲线

(a) 自由来流中; (b) 卡门涡街中

由来流中的数值要大, 而且平均阻力系数有本质的不同. 在自由来流中, 平均阻力系数是一个正值 ( $C_D = 0.083$ ); 在卡门涡街中, 平均阻力系数是一个明显的负数 ( $C_D = -0.273$ ). 也就是说, 丝线在卡门涡街中受到推力作用. 我们的计算结果在某种程度上证明, 卡门涡街对其中被动变形的物体产生推力作用.

在前面的计算中, 我们依照实验结果, 设定丝线运动与卡门涡街的相位差是  $\pi/4$  (图 4). 从图 7(b) 的力和时间的关系曲线可以看出, 在每个周期的固定时刻力的大小会发生突变, 这种突变很大程度影响着丝线所受的平均升阻力. 而观察发现, 这些力的突变与丝线运动的相位差有很大的关系. 卡门涡街中柔性物体被动运动的相位差选择由其躯干形状, 质量分布等诸多因素决定. 对于具有主动变形能力的鱼, 肌电信号显示的其头部肌肉的主动控制更是调整相位差的决定因素. 为了分析物体受力与相位差的关系, 我们计算了不同相位差情况下丝线受到的平均阻力系数. 图 8 是平均阻力系数与相位差的关系曲线.

从图中可以看出, 丝线受力随其运动与卡门涡街的相位差的变化而有显著变化. 当相位差很小, 即丝线向着涡心游动时, 柔性体受推力作用. 当相位差

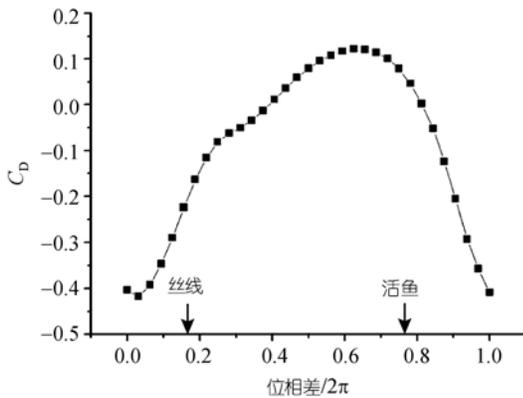


图8 平均阻力与相位差的关系

在 $\pi$ 附近,也就是丝线绕开涡心游动时,丝线和自由来流中一样受到阻力作用.这与卡门涡街中翼型的俯仰沉浮实验<sup>[13]</sup>所得的结果是一致的:“翼型在涡心之中穿行比在涡心之间绕行会获得更大的推力”.<sup>[2]</sup>图中标志出了本文实验中丝线的相位差以及Liao等人<sup>[2]</sup>做的活鱼卡门步态行进时的相位差.我们可以看到,丝线在卡门涡街中运动的相位差约为 $\pi/4$ ,对应一个较大的平均推力.但是在Liao等人<sup>[2]</sup>的活鱼实验中,鱼的头部运动与卡门涡街的相位差约为 $13\pi/9$ ,对应一个正的平均阻力.

### 3 讨论和结论

本文的肥皂膜水洞实验结果显示,一根完全被动的柔性丝线在圆柱尾迹卡门涡街中的行进模式与活鱼和死鱼的卡门步态相同.丝线摆动频率与

圆柱的脱涡频率同步;摆动振幅小于相同的丝线在同样大小的自由来流中的摆动振幅;丝线躯干曲率在卡门涡街的影响下变大.根据实验的运动信息进行的数值模拟计算丝线的受力定量地证明了,在卡门涡街中柔性体受推力作用.而自由来流中,丝线受到平均阻力作用.丝线运动与卡门涡街的相位差对丝线的受力情况有很大的影响.当相位差很小时,丝线受到推力作用;反之,当相位差接近 $\pi$ ,即丝线避开涡心运动时,物体和在自由来流中一样,受阻力作用.卡门步态的鱼选择的相位差对应一个平均阻力,而本文实验中的丝线采用的相位差对应一个较大的平均推力.

产生这种差别的原因有很多,其中,最直接的原因应该是活鱼头部的主动控制能力造成的.EMG结果<sup>[2]</sup>显示虽然卡门步态中的鱼体肌肉活动明显减弱,但是鱼体靠近头部的测试点还是有明显的肌电信号.也就是说,虽然鱼体大部分身体是被动变形,但是它通过控制自身头部的运动,避开迎面的涡核,选择了一个较大的相位差.而我们的实验中,丝线从头到尾都是完全被动变形的,两者必然有所不同.另外可能造成差别的原因还有:(1)物体形状、密度和抗弯刚度等材料参数分布的不同;(2)鱼体的运动有明显的三维效应,而本文实验是一个二维实验;(3)真实流体是粘性的,而本文用的是无黏模型进行计算,黏性的影响没有考虑.流体黏性,材料分布特性以及三维效应都是将来进一步工作中需要考虑的因素.

### 参考文献

- 1 Liao J C, Beal D N, Lauder G V, et al. The Karman gait: Novel body kinematics of rainbow trout swimming in a vortex street. *J Exp Biol*, 2003, 206: 1059—1073[doi]
- 2 Liao J C, Beal D N, Lauder G V, et al. Fish exploiting vortices decrease muscle activity. *Science*, 2003, 302: 1566[doi]
- 3 Beal D N, Hover F S, Triantafyllou M S, et al. Passive propulsion in vortex wakes. *J Fluid Mech*, 2006, 549: 385—402[doi]
- 4 Muller U K. Fish'n flag. *Science*, 2003, 302: 1511[doi]
- 5 Zhang J, Stephen C, Albert L, et al. Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind. *Nature*, 2000, 408: 835[doi]
- 6 Trapeznikov A A. Application of the method of two-dimensional viscosity and shear strength to the investigation of the structure and composition of two-sided films and surface layers in solutions of soaps and saponins. In: *Proc 2nd Intl Congress on Surface Activity*, 1957. 242—259
- 7 Chomaz J M, Cathalau B. Soap films as 2-dimensional classical. *Fluids*. *Phys Rev A*, 1990, 41(4): 2243—2245[doi]
- 8 Chomaz J M. The dynamics of a viscous soap film with soluble surfactant. *J Fluid Mech*, 2001, 442: 387—409
- 9 Jia L B, Li F, Yin X Z, et al. Coupling modes between two flapping filaments. *J Fluid Mech*, 2007, 581: 199—220[doi]
- 10 Jia L B, Yin X Z. Passive oscillations of two tandem flexible filaments in a flowing soap film. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 228104[doi]
- 11 Katz J A. *Plotkin. Low-speed Aerodynamics*. UK: Cambridge University Press, 2001
- 12 Thomson L M M, Fifth C B E. *Theoretical Hydrodynamics*. New York: The Macmillan Press, 1975
- 13 Golpalkrishnan R, Triantafyllou M S, Triantafyllou G S, et al, Active vorticity control in a shear flow using a flapping foil. *J Fluid Mech*, 1994, 274: 1—21[doi]