中国科学: 技术科学 2012 年 第 42 卷 第 1 期: 115 ~ 122
www.scichina.com tech.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

用虚拟环约束表示的机构自由度公式

张一同, 李艳文*, 王丽雅

燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004
* E-mail: ywli@ysu.edu.cn

收稿日期: 2010-12-30; 接受日期: 2011-06-12
河北省自然科学基金资助项目(批准号: E2011203193)

摘要 本文介绍了用约束数表示的自由度公式的几个重要的发展阶段, 指出了以往用环路公共约束表示的自由度公式的不足之处是: 在处理含有虚约束机构时, 必需通过计算虚约束数, 才能得出正确的自由度结果. 为克服这一缺点, 本文用虚拟环路、虚拟环约束、广义副约束数等新概念, 分析了构件的自由度数和运动副约束数之间的关系, 给出了用虚拟环路公共约束表示的自由度公式. 得出了机构自由度是机构所有构件自由度之和与所有运动副约束数之差, 再加上各虚拟环公共约束之和的计算公式, 以及机构总的过约束数就是各虚拟环约束数之和的重要的结论. 这种用虚拟环公共约束表示的机构自由度公式, 能避开虚约束的计算. 通过多个计算实例, 证明了虚拟环路法对自由度分析的正确性、有效性和适用性.

关键词
自由度
广义副
虚拟环路
虚拟环公共约束
过约束

自由度计算是机构结构分析的一项重要的研究内容, 在公式的表达形式上, 有用运动副约束数之和表示的, 也有用运动副自由度之和表示的. 用运动副约束数之和表示的自由度公式, 有以下几个重要的发展阶段.

1869 年俄罗斯学者 Chebychev[1, 2], 给出了用约束数表示的平面机构自由度公式 $F=3n-2(P_0+P_n)$. 1887 年 Somov-Malytsheff 给出了没有公共约束的空间机构的自由度公式[3, 4]

$$F=6n-\sum_{i=1}^{5} iC_i, \tag{1}$$

其中 n 是活动构件数, C_i 是 i 级副的数目, $\sum_{i=1}^{5} iC_i$ 是所有运动副的约束数之和, 该式只适用于没有过约束的机构.

由于机构各运动副形式的不同, 相互间的几何关系和尺寸关系的影响, 有时会使运动副中一定数量的约束失去作用, 造成(1)式出现错误的结果. 这种失去约束作用的约束数目, 通常称之为**过约束**. 为了消除过约束对自由度计算的影响, 人们提出了机构公共约束和环路公共约束的概念.

1929 年, 德国学者 Kutzbach 给出了考虑**公共约束**的自由度公式[5]:

$$F=(6-m)(N-1)-\sum_{i=1}^{P}(6-m-f_i), \tag{2}$$

其中 m 是公共约束, P 是全部的运动副数目, N 是机构的所有构件数, f_i 是第 i 个运动副的自由度数. 如果用环路的阶 $d(d=6-m)$代入上式, 通过变换也可以表示成

$$F=d(N-P-1)+\sum_{i=1}^{P} f_i. \tag{3}$$

上式通常也被称作“K-G”公式. 因为独立环路数

英文版发表信息: Zhang Y T, Li Y W, Wang L Y. A new formula of mechanism mobility based on virtual constraint loop. Sci China Tech Sci, 2011, 54: 2768–2775, doi: 10.1007/s11431-011-4499-5

$L=P-N+1$, 也可以写成 $F=\sum_{i=1}^{P} f_i - dL$ 的形式. 这里已经考虑了环路的公共约束, 但是还没有考虑不同环路的公共约束可能不相等的情况, 还没达到完全通用的目的.

1963 年, Manolescu 和 Manafu 给出了, 考虑到各环路公共约束不相等的自由度公式[6]:

$$F = 6n - \sum_{i=1}^{5} C_i + \max \sum_{j=1}^{q} m_j. \tag{4}$$

这是扩展了的(1)式, 其中 m_j 是第 j 个独立环路的公共约束, 虽然通用性更大了, 但还不能用于含虚约束的机构, 仍然有一定的局限性. 它的第一项是除机架以外所有构件没受到约束之前的自由度, 第二项是所有运动副产生的约束数之和, 第三项是各环路公共约束之和的最大值.

1971 年美国学者 Bagci 给出了, 用环路的公共约束数、虚约束数、局部自由度数、消极自由度数计算自由度的公式[7]:

$$F = F_i + F_r = F_0 + M + F_c - F_p, \tag{5}$$

其中 $M=\sum_{j=1}^{L} m_j$, m_j 是第 j 个环路的公共约束数, 与(4)式不同的是, 这里只计算各环路公共约束之和, 并没有强调它的最大值. 分别用独立项 F_C, F_P, F_r 计算虚约束、消极自由度、局部自由度. $F_C=\sum_{j=1}^{N_g}(k_{cj}-1)$, k_{cj} 是第 j 个含虚约束的环路组中的环路数, N_g 是有虚约束的环路组数.

一直到 2005 年, 还是普遍采用计算虚约束数目的方法, 来分析含虚约束机构的自由度[8~11].

用螺旋理论分析机构的运动螺旋系和反螺旋系求出机构的公共约束. 再分析支链的运动螺旋系、反螺旋系和支链约束螺旋的相关性, 求出虚约束 v, 由下面修正的"K-G"公式计算自由度:

$$F = d(N-P-1) + \sum_{i=1}^{P} f_i + v, \tag{6}$$

这也是很有特色的用约束分析自由度的方法[12~14].

在文献[15]中, 法国学者 Gogu 介绍了, 近 150 年来人们使用了 35 种不同的方法, 也使用了各种不同的数学工具, 还有用李群李代数进行研究的[16~18].

2010 年文献[19]提出了一种用虚拟环路计算自由度的新方法, 可以避免计算虚约束数目. 它是用虚拟环路阶表示的通用自由度计算公式, 即

$$F = \sum_{i=1}^{P} f_i - \sum_{j=1}^{L} d_j^X, \tag{7}$$

其中 d_j^X 是第 j 个**虚拟环路的阶**. $\sum_{i=1}^{P} f_i$ 是机构所有运动副的自由度之和, P 是所有运动副的数目.

机构自由度可以用(7)式的虚拟环路阶 d_j^X 表示, 还可以用第 j 个**虚拟环路公共约束** m_j^X (简称**虚拟环约束**)表示, 为此需要分析环路公共约束 m_j、虚拟环约束 m_j^X 与机构自由度的关系, 以及虚拟环约束 m_j^X 在自由度分析中的作用.

为便于阅读和更清楚地说明用**虚拟环约束** m_j^X 表示的自由度公式意义及推导过程, 以及从另一个角度进一步证明用虚拟环路法分析机构自由度的正确性, 需要先介绍一下虚拟环路的相关概念.

1 虚拟环路和它的公共约束

在空间多闭环机构中, 每个独立环路与其相邻环路不重复的独立杆件的组合称之为**杆组**, 杆组的自由度可以小于零、等于零和大于零, 杆组中的构件可以是从动件, 也可以是原动件. 这里定义的杆组是**广义的杆组**, 不是自由度为零的阿苏尔杆组. 例如, 图 1 有四个独立环路, 它含有图 2 的 *ABCD*, *EFG*, *HK*, *PRM* 四个杆组.

为了把相邻两个环路不同的运动传递方式用统一的术语描述, 引入**虚拟运动副**的概念. 设相邻两个环路传递运动的构件为 *M*, *J*, 无论它们是否相邻, 都假想地看成是由一个运动副联接的, 这个假想的运动副称之为**虚拟运动副**, 简称为**虚拟副**, 并用 $G_{j-1}^{M,J}$ 表示. 组成虚拟副的两个构件 *M*, *J* 相邻时, 它是一个真实的运动副; 组成虚拟副的两个构件 *M* 和 *J* 不相邻

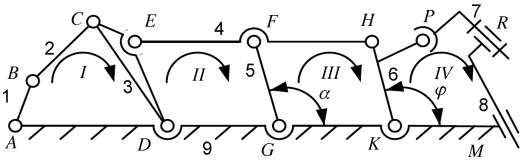

图 1 *ED*=*FG*=*HK*, *ED*//*FG*//*HK*

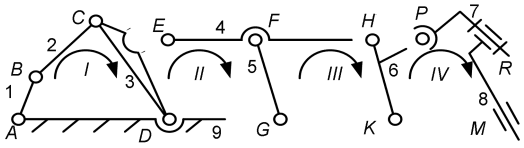

图 2 各环路杆件不重复的独立部分

时, 它是一个广义运动副[19~21], 简称为广义副. 虚拟副代表的可能是真实的运动副, 也可能是广义副. 任意两个相邻的独立环路之间的运动传递, 都是通过虚拟副完成的. 第 j 个杆组与其联接的前一个环路的虚拟副组成的环路, 称之为**虚拟环路**.

利用虚拟副的概念, 可以这样来描述**多环路机构的组成:** 具有 L 个独立环路的机构, 是用 L–1 个杆组, 依次添加到前一环路组成虚拟副的两个构件 M, J 上形成的.

这样就可以把具有 L 个独立环路的机构, 看成是由 L 个独立的虚拟环路组成的. 前一虚拟环路的运动输出构件 M, J, 也是后一虚拟环路的运动输入构件. 依此类推, 直到把运动传递到最后一个环路.

在多环路中, 第 j 个环路的公共约束用 m_j 表示, 该环路中不相邻的两个构件 M, J 组成的广义副的约束数用 $m_j^{M,J}$ 表示, 杆组自身的公共约束数, 用 m_j^{gz} 表示. 自由度为 F_j, 杆组的构件数为 n_j、运动副数目为 P_j, 第 i 个运动副的约束数目为 p_i, 按在文献[10]给出的推导方法, 可以得出第 j 个虚拟环路, 杆组的自由度计算公式, 即

$$F_j = 6n_j - \sum_{i=1}^{P_j} p_i + m_j^X, \tag{8}$$

其中 $\sum_{i=1}^{P_j} p_i$ 是第 j 个环路杆组所有运动副 P_j 的约束数之和, m_j^X 是**虚拟环约束,** F_j 是添加第 j 个杆组时, 机构自由度的变化, 可以小于零、等于零和大于零.

多闭环机构的自由度计算, 就是根据机构组成的先后联接顺序, 依次求出第 j 个环路杆组的自由度 F_j, L 个独立环路的杆组自由度之和就是机构总的自由度 F, 即

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_L = \sum_{j=1}^{L} F_j. \tag{9}$$

把(8)式代入(9)式,经推导就得到了用**虚拟环约束表示的自由度公式**, 即

$$F = 6n - \sum_{i=1}^{P_Z} P_i + \sum_{j=1}^{L} m_j^X, \tag{10}$$

其中 n 为机构总的活动构件数目, P_Z 为机构运动副的总数. 需要强调的是, F 是包括局部自由度 F_r 在内的自由度, F-F_r 是机构从动件具有确定运动所需的原动件数目.

用**虚拟环约束** m_j^X **表示的**自由度公式, 除了(10)式的形式, 还可以写成下面的形式:

$$F = \sum_{i=1}^{P_Z} f_i + \sum_{j=1}^{L} m_j^X - 6L. \tag{11}$$

设机构各虚拟环约束之和为 m^X, 则

$$m^X = \sum_{j=1}^{L} m_j^X. \tag{12}$$

对于一个确定的机构, 在非奇异位形的位置, m^X 是一个确定的值, 它就是机构总的过约束数.

2　虚拟环约束表示方法和实环约束的关系

2.1　虚拟环约束的表示方法和运算规则

第 j 个环路**虚拟环约束**参数的多少和类型, 用 m_j^X ($\alpha\,\beta\,\gamma$, $x\,y\,z$)表示, 括弧中的 $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ 是形式参数, 分别代表对 x,y,z 轴转动和移动的约束. 为了讨论方便, 也可以把 α, β, γ 所代表的实际符号写入对应的位置, 例如 $\alpha=\varphi$, $\beta=\theta$, $\gamma=\psi$, 则写成 m_j^X ($\varphi\,\theta\,\psi$, $x\,y\,z$). 形式参数的值只有 0, 1 两种. 0 表示没有参数对应的约束, 直接写入 0; 1 表示有对应参数的约束, 写入符号. m_j^X 的值为各参数值之和, $m_j^X = \alpha+\beta+\gamma+x+y+z$. 例如 m_j^X ($\alpha\,\beta\,0, 0\,0\,z$)是第 j 个环路的虚拟环约束, 代表环路对 α, β 轴转动有约束, 并且 z 轴移动有约束, 对 z 的转动和 x, y 轴的移动没有约束, 其值为 m_j^X =3.

m_j^X 的计算方法为: m_j^X 等于广义副的约束 $m_{j-1}^{M,J}$ 与杆组自身的公共约束 m_j^{gz} 之和, 即

$$m_j^X = m_{j-1}^{M,J} + m_j^{gz}, \tag{13}$$

这是第 j 个环路的虚拟环约束方程.

在 $m_{j-1}^{M,J} + m_j^{gz}$ 相加的运算中, 代表对应参数的因子相加, 运算法则为

$$x_i + x_i = x_i,\ x_i+0=0,\ 0+0=0,\ x_i=0,\ 1. \tag{14}$$

值得强调的是, 对于任意选定的独立环路 I, 因为它没有前一环路, 所以环路 I 的虚拟环约束 m_I^X 总是等于实际环路的公共约束 m_I, 或者说环路 I 仅仅是一个名义上的虚拟环路, 即 $m_I^X = m_I$.

2.2　虚拟环约束与实环约束的关系

虚拟环约束 m_j^X 与**实环约束** m_j 的关系为

$$m_j^X \geqslant m_j,\quad j=1,\cdots,L. \tag{15}$$

m_j 值可以直接用观察法或螺旋理论求得. 使用公式

(10)时, 首先要根据组成虚拟副的 M, J 是否邻接, 判定那些环路的 m_j^X 与 m_j 相等, 这个判断称之为虚拟环约束定理: 1. 任选的第 I 环路 $m_I^X=m_I$; 2. 虚拟副的 M, J 相邻 $m_j^X=m_j$; 3. 虚拟副的 M, J 不相邻, 由(13)式确定 m_j^X 值, 可能 $m_j^X=m_j$, 也可能 $m_j^X\neq m_j$(如果前一环路虚拟副的 M, J 构件不相邻, 添加后得到的虚拟环路与真实环路不同, 虚拟环路的构件数目和运动副数目都少于实际环路的, 虚拟环约束 m_j^X 与实环约束 m_j 可能相等, 也可能不相等). 设实际环约束之和为 m^L, 则 $m^L=\sum_{j=1}^{L} m_j$, 机构的虚约束数 v 为

$$v=m^X-m^L. \tag{16}$$

由以上的分析可以得出一个重要的结论: 虚约束也是一种过约束, 它是由于在 m_j^X 和 m_j 不相等的环路中, 用 m_j 代替 m_j^X 造成的. 因此, 只要正确的使用 m_j^X 就能避免虚约束数 v 的计算.

3 虚拟环公共约束的应用

例 1. 图 3 是含虚约束的平行四边形 6R, 其中 $AB=CD=EF$, $AB//CD//EF$. 环路 I 中, $m_I^X=m_I^X(0\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ z)=3$, 由(8)式得 $F_I=6n_I-\sum_{i=1}^{P_I} p_i+m_I^X=6\times3-5\times4+3=1$. 环路 I 是个平行四边形, 件 2 只能作平动, 广义副 $G_I^{2,5}$ 的约束 $m_I^{2,5}=m_I^{2,5}(\alpha\ \beta\ \gamma, 0\ 0\ z)=4$.

从表面上看, EF 杆组能绕 F 点回转, E 点有转动引起的沿 x, y 轴的移动. 它自身的约束应该为 $m_{II}^{gz}(0\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ z)=3$. 但是, 在每个瞬时 φ 必须等于 α, 机构才能运动, 所以 φ 不是独立运动参数, 它是有约束的, 值应为 1, 而不是 0. 因此, 杆组 EF 相当于只有转动引起的沿 x, y 轴的移动, 它自身的实际约束应该为 $m_{II}^{gz}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ z)=4$. $m_{II}^X=m_{I}^{2,5}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ z)+m_{II}^{gz}(\alpha\beta\gamma, 0\ 0\ z)=m_{II}^X(\alpha\beta\gamma,\ 0\ 0\ z)=4$, $F_{II}=6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}} p_i+m_{II}^X=6\times1-5\times2+4=0$. 杆组 EF 是一个 $m_{II}^X=4$, $F=0$ 的阿苏尔杆组. $F=F_I+F_{II}=1+0=1$. 或者直接由(10)式得到 $F=6\times4-5\times6+(3+4)=1$.

例 2. 图 4 是文献[15]给出的 11 杆的 3-RRRP 机构. 环路 I 由 $ABCDEFGH$ 组成, 所有运动副的轴线都平行于 O-xy 平面, 有一个不能绕 z 轴回转的公共约束, 所以 $m_I^X=m_I^X(0\ 0\ \gamma, 0\ 0\ 0)=1$, $F_I=6n_I-\sum_{i=1}^{P_I} p_i+m_I^X=6\times7-5\times8+1=3$. 件 4 的两个回转副 D, E 总是平行于 O-xy 平面的, 所以件 4 只能作平动, 它与机架 11 组成广义副 $G_I^{4,11}$, 它的约束 $m_I^{4,11}(\alpha\beta\gamma, 0\ 0\ 0)=3$. 环路 II 中, 有一个 $JKML$ 杆组, 所有的运动副轴线平行于 z 轴, 都没有绕 x 和 y 轴的转动, 杆组自身的公共约束 $m_{II}^{gz}(\alpha\ \beta\ 0,\ 0\ 0\ 0)=2$, $m_{II}^X=m_I^{4,11}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ 0)+m_{II}^{gz}(\alpha\beta 0,\ 0\ 0\ 0)=m_{II}^X(\alpha\ \beta\ 0,\ 0\ 0\ 0)=2$, $F_{II}=6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}} p_i+m_{II}^X=6\times3-5\times4+2=0$, $F=F_I+F_{II}=3+0=3$. 也可以由(10)式得 $F=6\times10-5\times12+(1+2)=3$. 机构总的过约束数 $\sum_{j=1}^{L} m_j^X=m_I^X+m_{II}^X=1+2=3$, 两环路公共约束之和为 $\sum_{j=1}^{L} m_j=m_I+m_{II}=1+1=2$, $v=\sum_{j=1}^{L} m_j^X-\sum_{j=1}^{L} m_j=1$, 机构有一个虚约束.

例 3. 3-PUU 机构[22]如图 5 所示, 它有 2 个独立环路. 设固定坐标系 O-xyz 与机架 J 固结, B_1, C_1, B_2, C_2, A_3, D_3 轴线都平行于 O-xy 平面, 并且 B_1 轴平行于 x 轴. $B_1\perp A_1$, $B_2\perp A_2$, $B_3\perp A_3$; $D_1\perp C_1$, $D_2\perp C_2$, $D_3\perp C_3$,

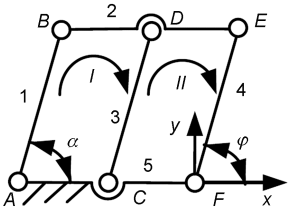

图 3 平行四边形 6R

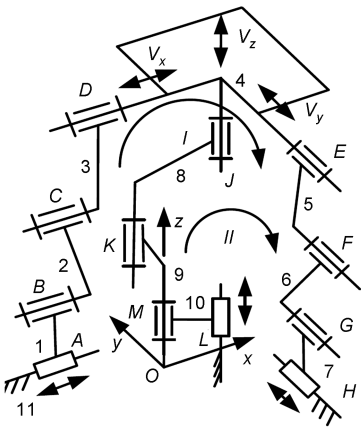

图 4 3-RRRP 机构

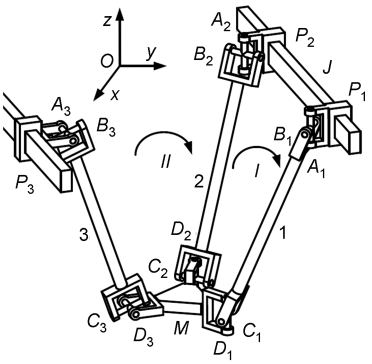

图 5　3-PUU 机构

它们分别组成 U 副. 杆组 1 和 2 组成第 *I* 环路, 有 3 个转动和 3 个移动(一个移动副和两个转动引起的移动). 虚拟环约束为 m_I^X =0. F_I=$6n_I-\sum_{i=1}^{P_I}p_i+m_I^X$ =6×9−5×10+0=4. 因为 C_1 和 C_2 的轴线, 在运动过程中总是和 *O*-*xy* 平面平行, 两个轴线的交角为 120°, 所以动平台不能绕 *x* 和 *y* 轴转动, 它只有 3 个移动和绕 *z* 轴的转动. 因此, *M* 与 *J* 组成广义副 $G_I^{M,J}$ 的约束为 $m_I^{M,J}$ ($\alpha\,\beta$ 0, 0 0 0)=2.

杆组 2 和 3 组成第 *II* 环路, 由于 D_3 点的水平轴线是固结在动平台上的, 该轴线的转动在 *x*, *y* 轴都有份量. C_3 点的回转轴与动平台有一个夹角, 所以它在 *y*, *z* 轴也都有回转分量. 因此, 杆组 3 自身有 3 个转动和 3 个移动, 即 m_{II}^{gz} (0 0 0, 0 0 0)=0. $m_{II}^X=m_I^{M,J}$ ($\alpha\,\beta$ 0, 0 0 0)+ m_{II}^{gz} (0 0 0, 0 0 0)= m_{II}^X (0 0 0, 0 0 0)=0, F_{II} =$6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}}p_i+m_{II}^X$ =6×4−5×5+0=−1. F=F_I+F_{II}=4+(−1)=3. 由(10)式得 F=6×13−5×15+(0+0)=3.

例 4.　把文献[21]3-RPC 机构的一个 RPC 改成 RRC, 就得到图 6 的 2-RPC/RRC 机构, 它有两个独立环路. 环路 *I* 由 *ABCGHM* 组成, 所有构件都不能绕 *z* 轴转动, m_I^X =1, 由(8)式得 F_I= $6n_I-\sum_{i=1}^{P_I}p_i+m_I^X$ = 6×5−(5×4+4×2)+1=3. 在件 3 上, 两个回转副轴线都与 *O*-*xy* 平面平行, 件 3 只能作平动, $m_I^{3,6}=m_I^{3,6}$ ($\alpha\,\beta\,\gamma$, 0 0 0). 环路 *II* 由 RPC 杆组和 RRC 杆组组成的, RRC 杆组自身的公共约束为 m_{II}^{gz} (0 $\beta\,\gamma$, 0 0 0), $m_{II}^X=m_I^{3,6}$ ($\alpha\,\beta\,\gamma$, 0 0 0)+ m_{II}^{gz} (0 $\beta\,\gamma$, 0 0 0)= m_{II}^X (0 $\beta\,\gamma$, 0 0 0)=2.

F_{II}=$6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}}p_i+m_{II}^X$ =6×2−(5×2+4×1)+2=0, F=F_I +F_{II}=3+0=3. 杆组 RRC 是一个 m_{II}^X =2, F_{II} =0 的阿苏尔杆组. 由(10)式得 F=6×7−(5×6+4×3)+(1+2)=3.

例 5.　图 7 的 2-PRU/PR(Pa)R 机构[23]中, 有 3 个独立环路. 在 *O*-*yz* 平面内, 2-PRU(*C*, *D* 为 *U* 副)杆组串联成环路 *I*(*ABCDEF*), 所有构件都不能沿 *x* 轴移动, 也不能绕 *z* 轴转动, 虚拟环约束 m_I^X (0 0 γ, *x* 0 0)=2, $F_I=6n_I-\sum_{i=1}^{P_I}p_i+m_I^X$ =6×7−5×8+2=4. 由于件 4 不能沿 *x* 轴移动, 也不能绕 *z* 轴转动, 广义副 $G_I^{4,13}$ 的约束 $m_I^{4,13}$ (0 0 γ, *x* 0 0)=2.

环路 *II* 为 *GMJHKDEF*, 它含有一个 PR⊥R‖R⊥R 的杆组, *K* 和 *M* 点的回转轴线都平行于 *y* 轴, *H* 和 *J* 的回转运动在 *x*, *z* 轴都有回转分量, 所以杆组自身的公共约束为 m_{II}^{gz} (0 0 0, 0 0 0)=0, $m_{II}^X=m_I^{4,13}$ (0 0 γ, *x* 0 0)+ m_{II}^{gz} (0 0 0, 0 0 0)= m_{II}^X (0 0 0, 0 0 0)=0, F_{II} = $-\sum_{i=1}^{P_{II}}p_i+m_{II}^X$ =6×4−5×5+0=−1. 由于件 8 相对于件 12 只能平动, 广义副 $G_{II}^{8,12}$ 的约束为 $m_{II}^{8,12}$ ($\alpha\,\beta\,\gamma$, *x* 0 0)=4. 环路 *III* 为 *HJPT*, 它含一个 2R 杆组(*PT*), 由于 *JH* 和 *PT* 平行且相等, 所以环路 *III* 是平行双曲柄机构, 如图 8 所示.

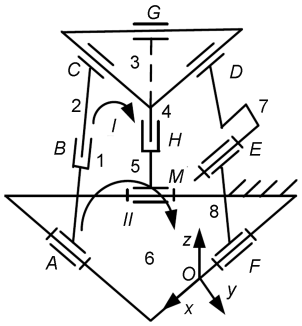

图 6　2-RPC/RRC 机构

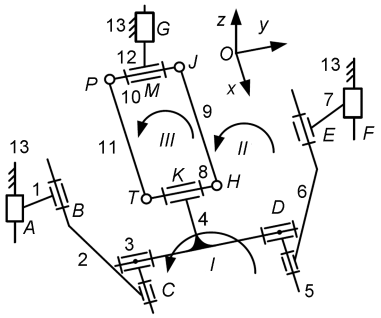

图 7　2-PRU/PR(Pa)R 机构

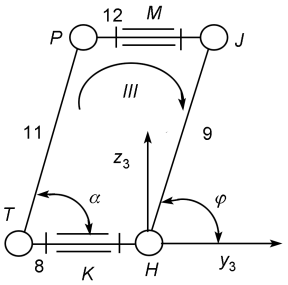

图 8　*JH//PT*, *JH=PT*

可以在第 *III* 环路单独建立一个坐标系，即 O-$x_3y_3z_3$. 为了书写方便, 在确定约束数目时, 不同坐标下的形式参数可以添加对应坐标系的下角标, 也可以省略它的下脚标. 例如, 可以把 $m_{III}^{gz}(0\ \beta_3\ \gamma_3,\ x_3\ 0\ 0)$写成 $m_{III}^{gz}(0\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)$. 表面上看, 杆组 *TP* 自身的公共约束为 $m_{III}^{gz}(0\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)$.

在运动过程中, 两个回转轴 *K* 和 *M* 总是平行的, 且 *JP=TH*, 所以 *PT* 总是平行 *JH*, α总是等于φ, 也就是说α不是一个真正的独立参数. 因此, m_{III}^{gz} 的实际值应该为 $m_{III}^{gz}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=4$. $m_{III}^{X}=m_{II}^{8,12}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)+m_{III}^{gz}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=m_{III}^{X}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=4$. $F_{III}=6n_{III}-\sum_{i=1}^{P_{III}}p_i+m_{III}^{X}=6\times1-5\times2+4=0$, $F=F_I+F_{II}+F_{III}=4+(-1)+0=3$. 从这里可以看到, 通常被称之为串并联混合的PR(Pa)R支链, 实际上是含一个独立环路的组合体, 并非是不可拆分. 也可以直接由(10)式得 $F=6n-\sum_{i=1}^{P_Z}P_i+\sum_{j=1}^{L}m_j^{X}=6\times12-5\times15+(2+0+4)=3$.

例 6.　图 9 是文献[7]中 Bagci 分析的七杆机构. 环路 *I* 中, 杆组 RCCR 的四个轴线平行. 所有的构件都不能绕 *z* 和 *y* 轴转动, 虚拟环约束 $m_I^{X}=m_I(0\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ 0)=2$, $F_I=6n_I-\sum_{i=1}^{P_I}p_i+m_I^{X}=6\times3-(5\times2+4\times2)+2=2$, $m_I^{2,7}(0\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ 0)=2$. 环路 *II* 是把 *E*, *F*, *G* 点的杆组 SRP 添加到件 2 和件 7 上组成的. 杆组 *EFG* 的公共约束 $m_{II}^{gz}(0\ 0\ 0,\ 0\ y\ 0)=1$. $m_{II}^{X}=m_I^{2,7}(0\ \beta\ \gamma,\ 0\ 0\ 0)+m_{II}^{gz}(0\ 0\ 0,\ 0\ y\ 0)=m_{II}^{X}(0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0)=0$, $F_{II}=6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}}p_i+m_{II}^{X}=6\times2-(5\times2+3\times1)+0=-1$. 环路 *III* 是 2P 杆组添加到件 5 和件 7 上组成的. 杆组 *KH* 的公共约束 $m_{III}^{gz}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=4$, $m_{II}^{5,7}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ z)=5$. $m_{III}^{X}=m_{II}^{5,7}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ z)+m_{III}^{gz}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=m_{III}^{X}(\alpha\ \beta\ \gamma,\ x\ 0\ 0)=4$, $F_{III}=6n_{III}-\sum_{i=1}^{P_{III}}p_i+m_{III}^{X}=6\times1-5\times2+4=0$, $F=F_I+F_{II}+F_{III}=2-1+0=1$, 由 (10) 式得 $F=6\times6-(5\times6+4\times2+3\times1)+(2+0+4)=1$.

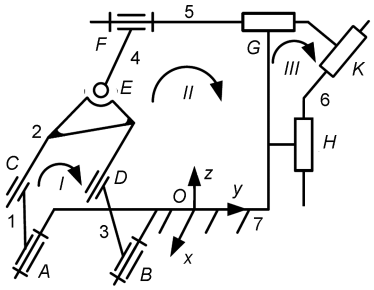

图 9　七杆机构

例 7.　图 10 是 3-RPS 机构, 每个杆组的 R 轴线都与移动副 P 垂直, 3 个杆组均布. 环路 *I* 没有公共约束, $m_I^{X}=0$, $F_I=6n_I-\sum_{i=1}^{P_I}p_i+m_I^{X}=6\times5-(5\times4+3\times2)-0=4$. 动平台有 3 个移动和 3 个转动, 以及一个沿 *CD* 轴回转的局部自由度, 所以 $m_I^{3,6}(0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0)=0$. 环路 *II* 的 *GHK* 杆组没有 *x* 方向位移, 自身的公共约束 $m_{II}^{gz}(0\ 0\ 0,\ x\ 0\ 0)=1$, 所以 $m_{II}^{X}=m_I^{3,6}(0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0)+m_{II}^{gz}(0\ 0\ 0,\ x\ 0\ 0)=m_{II}^{X}(0\ 0\ 0,\ 0\ 0\ 0)=0$, $F_{II}=6n_{II}-\sum_{i=1}^{P_{II}}p_i+m_{II}^{X}=6\times2-(5\times2+3\times1)+0=-1$, $F=F_I+F_{II}=4+(-1)=3$, 由(10)式得 $F=6n-\sum_{i=1}^{P_Z}P_i+\sum_{j=1}^{L}m_j^{X}=6\times7-(5\times6+3\times3)+(0+0)=3$.

以上例子的计算列于表 1, 可以清楚的看到机构各种参数和机构自由度的关系.

4　讨论

文献[19]给出的本文的(6)式和本文给出的(10)式

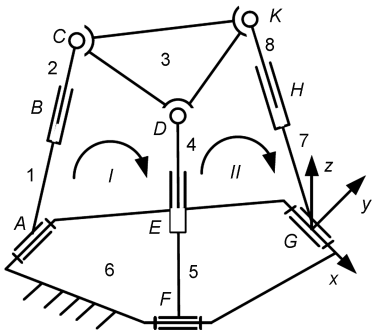

图 10　3-RPS 机构

表 1　m^L, m^X 与虚约束的关系

Name of the mechanisms	The mobility of all links $6n$	The sum of all kinematic pair constraints $\sum_{i=1}^{p_Z} P_i$	The sum of constraints of actual loops m^L	The sum of constraints of virtual loops m^X	The number of virtual constraints m^X-m^L	Mobility $F=6n-\sum_{i=1}^{p_z} p_i+\sum_{j=1}^{L} m_j^X$
The 6R parallelogram mechanism	6×4=24	6×5=30	3+3=6	3+4=7	1	F=6×4−5×6+(3+4)=1
The 3-RRRP mechanism	6×10=60	12×5=60	1+1=2	1+2=3	1	F=6×10−5×12+(1+2)=3
The 3-PUU mechanism	6×13=78	15×5=75	0+0=0	0+0=0	0	F=6×13−5×15+(0+0)=3
The 3-RPS mechanism	6×7=42	3×(3+5+5)=39	0+0=0	0+0=0	0	F=6×7−3×13+(0+0)=3
The 2-RPC/RRC mechanism	6×7=42	3×(4+5+5)=42	1+1=2	1+2=3	1	F=6×7−3×14+(1+2)=3

是等价的. 两者的区别仅在于: (6)式是用虚拟环路阶之和与运动副自由度之和表示的; 而(10)式是用活动构件的自由度之和、运动副的约束数目之和与虚拟环路的公共约束数之和表示的. 两个公式可以通过 $d_j^X=6-m_j^X$ 互相转换.

本文是从虚拟环路公约束的角度, 分析论证了公式(10)的正确性,也就等于是从另一个角度进一步充分地证明(6)式和虚拟环路法的正确性和有效性.

本文一个最重要的结论是: 虚拟环路的公共约束之和 m^X 就是机构的全部的过约束. 因此, 不必再像以往那样, 把过约束分别定义为环路公共约束形成的一般过约束和虚约束形成的特殊过约束(冗余约束)[9, 11]. 这就更加清楚地认识到, 特殊过约束实际上就是利用环路公共约束没能正确计算出来的一种过约束, 而虚拟环路法(或者说虚拟环路的公共约束)弥补这种不足. 这也说明用虚拟环路法对机械结构的分析, 比用环路阶(或者环路的公共约束) 的分析更具有有效性, 能更深入地揭示机械结构性能的本质属性.

5　结论

本文通过虚拟环路、虚拟环约束和虚拟环约束方程等新概念, 建立了用构件数、运动副约束数和虚拟环约束表示的多闭环自由度公式. 公式本身说明虚拟环约束之和就是机构的过约束总数.

通过以上的理论分析和计算实例, 可以得出以下几个重要的结论.

1) (10)式是一个用虚拟环约束表示的多环路自由度公式, 可以用于含虚约束、局部自由度和消极自由度的任意机构, 它具有广泛的适用性.

2) 虚拟环约束 m_j^X, 等于该环杆组自身的公共约束和前一环广义副的约束之和.

3) 机构各虚拟环约束之和 $\sum_{j=1}^{L} m_j^X$ 是一个定值, 它是该机构过约束的总数.

4) 虚拟环约束性质的判定定理: 1. 任选的第 I 环路 $m_I^X=m_I$; 2. 虚拟副的 M, J 相邻 $m_j^X=m_j$; 3. 虚拟副的 M, J 不相邻, 由(13)式确定 m_j^X 值, 可 $m_j^X=m_j$, 也可能 $m_j^X\neq m_j$.

5) (10)和(6)式是等效的, 单纯从计算机构自由度的角度来说, 多数情况下用(6)式计算, 比用(10)式简单, 但是从分析和解释过约束的性质来说, 无疑(10)式是最说明问题的表达式. 另外, (6)和(10)式是从虚拟环路阶和虚拟环公共约束两个不同的角度, 分别论证了用虚拟环路法计算自由度, 比其他方法具有更大的优点: 简单、有效.

参考文献

1　Chebychev P A. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. 1ére partie, Mémoires présentés ál'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg par divers savants, 1854

2　Chebychev P A. Théorie des mecanismes connus sous le nom de parallélogrammes. 2ére partie, Mémoires présentés ál Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg par divers savants, 1869

3　Somov P I. On the degree of freedom of motion of kinematic chains. J Phys Chem Soc Russ, 1887, 19(9): 443–477

4　Malytsheff A P. Analysis and synthesis of mechanisms with a viewpoint of their structure (in Russia). Izvestiya Tomskogo of Technological

Institute, 1923
5 Kutzbach K. Mechanische Leitungsverzweigung, ihre Gesetze und Anwendungen. Maschinenbau Betrieb, 1929, 8: 710–716
6 Manolescu N, Manafu V. Sur la détermination du degré de mobilité des mécanismes. Bull Inst Politechnic Bucuresti, 1963, 25: 45–66
7 Bagci C. Degrees of freedom of motion in mechanisms. Trans ASME Ser B, 1971, 93(1): 140–148
8 白师贤. 高等机构学. 上海: 上海科学技术出版社, 1988. 5–7
9 扬廷力. 机器人机构拓扑结构学. 北京: 机械工业出版社, 2004
10 Zhang Y T, Lu L, Li Y W. Different expressions for the degrees of freedom of spatial mechanisms. Proceedings of the International Conference on Mechanical Transmissions. Chongqing: Chongqing University, 2006. 799–802
11 Shen H P, Yang T L, Ma L Z. Synthesis and Structure Analysis of Kinematic Structures of 6-dof Parallel Robotic Mechanisms. Mech Mach Theory, 2005, 40(10): 1180–1194
12 Hunt K H. Kinematic Geometry of Mechanisms. Oxford: Oxford University Press, 1978. 382
13 Dai J S, Huang Z, Lipkin H. Mobility of overconstrained parallel mechanisms, Special Supplement on Spatial Mechanisms and Robot Manipulators. Trans ASME-J Mech Design, 2006, 128(1): 220–229
14 黄真, 刘婧芳, 曾达幸. 基于螺旋理论的自由度分析方法. 中国科学 E: 技术科学, 2009, 39: 84–93
15 Gogu G. Mobility of mechanisms: A critical review. Mech Mach Theory, 2005, 40(9): 1068–1097
16 Rico J M, Aguilera D, Gallardo J. Computer implementation of an improved Kutzbach-Grübler mobility criterion. ASME Paper No. DETC02/DAC-34093
17 Rico J M, Ravani B. On mobility analysis of linkages using group theory. Trans ASME J Mech Design, 2003, 125(1): 70–80
18 Rico J M, Gallardo J, Ravani B. Lie Algebra and the mobility of kinematic chains. J Rob Syst, 2003, 20(8): 477–49
19 张一同, 牟德君. 空间多闭环机构自由度计算的新概念和新理论. 中国科学 E: 技术科学, 2010, 40(10): 1182–1188
20 Phillips J. Freedom in Machinery. Sydney: Cambridge University Press, 1984
21 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等机构学. 北京: 高等教育出版社, 2006
22 Zhao J S, Zhou K. A theory of degrees of freedom for mechanisms. Mech Mach Theory, 2004, 39: 621–643
23 Liu X J, Wang J S. Some new parallel mechanisms containing the planar four-bar parallelogram. Int J Rob Res, 2003, 22(9): 717–732