以抛物线为特殊积分的二次系统的极限环

陈 叔 平

(浙江大学数学系，杭州)

平面二次系统 (E_2) 以二次代数曲线(包括退化情形)为一条积分曲线时的极限环问题，已有不少人进行了研究．主要结果为：当二次曲线为椭圆[1-2]、一条直线[3]、二条直线(相交、平行或重合)[3]、双曲线[4]这四种情形之一时，分别证明了极限环的存在性、唯一性和不存在性．本文研究剩下的一种情形，即系统 (E_2) 以抛物线为一条积分曲线时极限环的存在性问题．先给出有环的必要条件，并把可能有环的系统分为 (4) 和 (4′) 表示的两种情形，然后对系统 (4) 给出了有环的充要条件．

§1. 考虑平面二次系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P_2(x, y), \\ \dot{y} = Q_2(x, y). \end{cases} \tag{E_2}$$

设系统 (E_2) 以抛物线为一特殊积分，不失一般性，可设此抛物线为 $y = x^2$．于是沿 $y = x^2$ 应有 $\dot{y} - 2x\dot{x} = 0$，即 $Q_2(x, y) - 2xP_2(x, y) = R(x, y)(y - x^2)$． 由于左端是不超过三次的多项式．故可令 $R(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$，从而得到 $Q_2(x, y) - y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) = x[2P_2(x, y) - x(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)]$．由此看出 $Q_2(x, y) - y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)$ 含有因子 x，且由于它是二次多项式，因此又可记

$$\frac{Q_2(x, y) - y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)}{x} = 2P_2(x, y) - x(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)$$

$$= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2. \tag{1}$$

从 (1) 式可得到 $P_2(x, y)$、$Q_2(x, y)$ 的一般形式，于是有

引理 1 系统 (E_2) 以 $y = x^2$ 为特殊积分的充要条件是它具有以下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2}x(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + \dfrac{1}{2}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2), \\ \dot{y} = y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + x(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2). \end{cases} \tag{2}$$

系统 (2) 的奇点除了由方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

所决定的外，其余的都在 $y = x^2$ 上．若方程 (3) 无解或有无穷多解，那末系统 (2) 显然无环；若方程 (3) 有唯一解，则 α_1 与 β_1 不能同时为零．因此当 $\beta_1 = 0$ 时，$\alpha_1 \neq 0$，这时取 $B(x, y) = (y - x^2)^k \left(k = -\dfrac{\beta_2}{\alpha_1} - 2\right)$ 为 Dulac 函数，就可证明系统 (2) 不存在极限环．据此可以证明：

本文 1983 年 6 月 7 日收到.

引理 2 系统 (2) 存在极限环的必要条件是它可经过仿射变换化为以下两种形式之一

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + \mu, \\ \dot{y} = (xy + \mu)(x + l) + (2y - 1)\left(y - \frac{1}{2}x^2 - lx - m\right), \end{cases} \qquad (\mu > 0) \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + \mu, \\ \dot{y} = (xy + \mu)(x + l) + (2y + 1)\left(y - \frac{1}{2}x^2 - lx - m\right). \end{cases} \qquad (\mu > 0) \tag{4'}$$

而抛物线 $y = x^2$ 相应地化为

$$G(x, y) \equiv y - \frac{1}{2}x^2 - lx - m = 0. \tag{5}$$

证 由前面的讨论可知,当 (1) 式存在极限环时,方程 (3) 有唯一解且 $\beta_1 \neq 0$. 令 $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1\beta_1$, $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1\beta_1$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2\beta_1$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2\beta_1$, $\gamma_2 = \bar{\gamma}_2\beta_1$, 然后作 Черкас 变换[3]

$$\begin{cases} \bar{t} = \beta_1 t, \quad \bar{x} = x + \bar{\beta}_2, \\ \bar{y} = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1 x + y + \bar{\gamma}_1 + \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2), \end{cases} \tag{6}$$

就可将系统 (2) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}\bar{y} + \mu, \\ \dfrac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = (\bar{x}\bar{y} + \mu)(\bar{x} + l) + (2\bar{y} - n)\left(\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{x}^2 - l\bar{x} - m\right), \end{cases} \tag{7}$$

而抛物线 $y = x^2$ 则化为 $\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{x}^2 - l\bar{x} - m = 0$. 其中

$$\mu = \frac{1}{2}[\bar{\beta}_2(\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 - \bar{\gamma}_1 - \bar{\alpha}_2) + \bar{\gamma}_2], \qquad l = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_2,$$

$$m = \frac{1}{2}(\bar{\beta}_2^2 + \bar{\gamma}_1 + \bar{\alpha}_2 - 2\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2), \qquad n = \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}_2.$$

由于 $n = \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}_2 = \frac{1}{\beta_1^2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \neq 0$, 故可用 $t^* = |n|\bar{t}$, $\bar{x} = |n|^{\frac{1}{2}}x^*$, $\bar{y} = |n|y^*$, $\mu = |n|^{\frac{3}{2}}\mu^*$, $l = |n|^{\frac{1}{2}}l^*$, $m = |n|m^*$ 对 (8) 式和 (9) 式进行变换,再将所得结果中的"*"号去掉,就得到系统 (4)、(4′) 和 (5). 此外, $\mu = 0$ 时系统 (4) 和 (4′) 显然都无极限环,而将平面关于 y 轴作反射可改变 μ 的符号,同时保持系统 (4) 和 (4′) 形状不变. 故恒可设 $\mu > 0$.

易见系统 (4) 与 (4′) 均只有一个奇点不在抛物线 (5) 上,因此系统 (4) 与 (4′) 的极限环若存在,必出现在此奇点的外围. 以下总把此奇点记为 M_1. 再约定当点 $M(x, y)$ 满足 $G(x, y) > 0$ (< 0) 时,称 $M(x, y)$ 在 (5) 式的内(外)部. 熟知[5], 平面二次系统的极限环内部的奇点只可能是焦点,因此,只要算出 M_1 为焦点的条件就可建立以下引理.

引理 3 系统 (4) 的极限环只能出现在 $M_1\left(-2\mu, \frac{1}{2}\right)$ 外围; 系统 (4′) 的极限环只能出现在 $M_1\left(2\mu, -\frac{1}{2}\right)$ 外围. 并且系统 (4) 在 $M_1\left(-2\mu, \frac{1}{2}\right)$ 外围有环的必要条件是

$$\text{(i)}\ \mu(l-2\mu)>0,\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{2}-2\mu^2+2l\mu-m>0; \tag{8}$$

系统 (4′) 在 $M_1\left(2\mu, -\frac{1}{2}\right)$ 外围有环的必要条件是

$$\text{(i)}\ \mu(l+2\mu)>0,\quad \text{(ii)}\ \frac{1}{2}+2\mu^2+2l\mu+m>0. \tag{9}$$

此外，条件 (8) 和 (9) 分别意味着 $M_1\left(-2\mu, \frac{1}{2}\right)$ 必在抛物线 (5) 内部，$M_1\left(2\mu, -\frac{1}{2}\right)$ 必在抛物线 (5) 外部.

§ **2.**　现在集中讨论系统 (4). 简单计算表明，系统 (4) 在抛物线 (5) 上的奇点的横坐标应满足方程

$$K(x)=x^3+2lx^2+2mx+2\mu=0, \tag{10}$$

于是可将系统 (4) 划分成以下四种情形.

(A) $K(x)=(x+a)^3$. 这时 $l=\frac{3}{2}a$, $m=\frac{3}{2}a^2$, $\mu=\frac{a^3}{2}$. 系统有两个奇点 $M_1\left(-a^3, \frac{1}{2}\right)$ 和 $M_2\left(-a, \frac{a^2}{2}\right)$.

(B) $K(x)=(x+a)(x^2+px+q)$, $(p^2<4q)$. 这时 $l=\frac{a+p}{2}$, $m=\frac{ap+q}{2}$, $\mu=\frac{aq}{2}$, 系统有两个奇点 $M_1\left(-aq, \frac{1}{2}\right)$ 和 $M_2\left(-a, \frac{q}{2}\right)$.

(C) $K(x)=(x+a)^2(x+b)$, $(a\neq b)$. 这时 $l=a+\frac{b}{2}$, $m=ab+\frac{a^2}{2}$, $\mu=\frac{a^2b}{2}$. 系统有三个奇点 $M_1\left(-a^2b, \frac{1}{2}\right)$、$M_2\left(-a, \frac{ab}{2}\right)$ 和 $M_3\left(-b, \frac{a^2}{2}\right)$.

(D) $K(x)=(x+a)(x+b)(x+c)$, $(c>b>a)$. 这时 $l=\frac{a+b+c}{2}$, $m=\frac{ab+bc+ca}{2}$, $\mu=\frac{abc}{2}$. 系统有四个奇点 $M_1\left(-abc, \frac{1}{2}\right)$、$M_2\left(-a, \frac{bc}{2}\right)$、$M_3\left(-b, \frac{ac}{2}\right)$ 和 $M_4\left(-c, \frac{ab}{2}\right)$.

先给出一个一般性结论.

定理 1　若系统 (4) 有极限环，则此环必包含奇点 $M_1\left(-2\mu, \frac{1}{2}\right)$，且 M_1 必是系统 (4) 在 (5) 内部的稳定焦点. 证：我们只需要证明 M_1 的稳定性，其余结论都包含在引理 3 中. 当系统 (4) 有环时，由 (8) 式知 $l\mu>0$. 反设 M_1 是不稳定焦点，则由计算可知，必定有 $2l\mu-2m+\frac{3}{2}\geqslant 0$. 作 $B(x, y)=x^h\left(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m\right)^k$，其中，$k=4l\mu-2m-1$, $h=-2k-5$. 那末对系统 (4) 可算出：$\frac{\partial(BP_2)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ_2)}{\partial y}=x^{h-1}\left(y-\frac{1}{2}x^2-lx-m\right)^k\cdot\Phi$, $\Phi=-lx^2-4l\mu x-\mu(8l\mu-4m+3)$ 是二次多项式，其判别式为 $\Delta=-8l\mu\left(2l\mu-2m+\frac{3}{2}\right)$

$\leqslant 0$. 故 Φ 保持常号. 由 Dulac 判据知系统 (4) 无极限环. 这是一个矛盾. 此矛盾表明系统 (4) 有环时 M_1 必是它的稳定焦点.

下面分别讨论 (A)、(B)、(C)、(D) 四种情形. 定理的表述中均采用前面给出的记号.

定理 2 对情形 (A), 系统 (4) 不存在极限环.

证 在 $M_1\left(-a^3, \dfrac{1}{2}\right)$ 处, $\dfrac{\partial P_2}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_2}{\partial y}=\dfrac{3}{2}(1-a^2)^2 \geqslant 0$. 故 M_1 不是系统的稳定焦点. 从而由定理 1 知结论成立.

定理 3 对情形 (B), 系统 (4) 存在极限环的充要条件是 $M_1\left(-aq, \dfrac{1}{2}\right)$ 是系统的稳定焦点.

证 必要性已由定理 1 得到. 下证充分性.

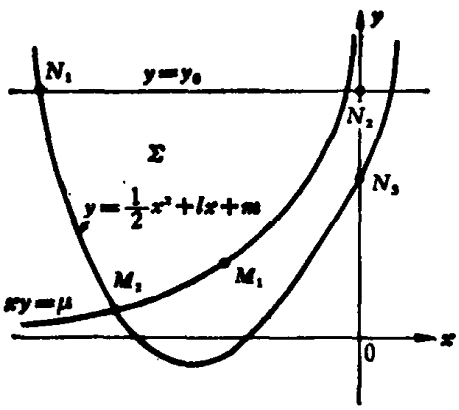

图 1

在图 1 中, 设直线 $y=y_0\left(y_0>\dfrac{1}{2}\right)$ 交抛物线(5) 于 N_1, 交 y 轴于 N_2; 又设 (5) 式交 y 轴于 N_3. 奇点 M_1 落在由直线 $y=y_0$、$x=0$ 以及抛物线 (5) 所围成的区域 Σ 内部, Σ 的边界是 $\partial\Sigma=\overline{N_1N_2}\cup\overline{N_2N_3}\cup\widehat{N_3M_2N_1}$. 易见, 当 M_1 为焦点时 M_2 必为鞍点. 此外, 系统 (4) 沿 $\overline{N_2N_3}$ 有 $\dot{x}=\mu>0$, 当 y_0 充分大时沿 $\overline{N_1N_2}$ 亦有 $\dot{y}>0$, 而 $\widehat{M_3N_2N_1}$ 是系统 (4) 的积分曲线. 因此当 M_1 是稳定焦点时, 由 Bendixon 环域定理可推知系统 (4) 在 Σ 中存在包含 M_1 的不稳定极限环.

定理 4 对情形 (C), 系统 (4) 存在极限环的充要条件是以下三条件同时被满足: (i) M_1 是系统 (4) 在 (5) 式内的稳定焦点; (ii) $a>0$, $ab>1$; (iii) $a^2+ab-2>0$.

定理 4 可独立证明. 但更方便的是由下面的定理 5 推出, 只要在定理 5 中令 $b\to a$ 即可.

定理 5 对情形 (D), 系统 (4) 存在极限环的充要条件是以下三条件同时被满足: (i) M_1 是系统 (4) 在 (5) 式内的稳定焦点, (ii) $c>abc>b>a>0$; (iii) $\dfrac{1}{2}b^2+b\left(\dfrac{ac}{2}-1\right)\cdot\dfrac{a+b+c}{2}+\left(\dfrac{ac}{2}-1\right)^2>0$.

证 作平移 $x'=x+b$, $y'=y-\dfrac{ac}{2}$, 并仍用 (x, y) 记 (x', y'), 将系统 (4) 和抛物线(5)化为下面的系统 (11) 和 (12) 式:

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{ac}{2}x-by+xy,\\ \dot{y}=\dfrac{b-a-c}{2}\left(\dfrac{ac}{2}-1\right)x+\left[\dfrac{b}{2}(b-a-c)+(ac-1)\right]y+\dfrac{1}{2}x^2\\ \qquad -\dfrac{a+b+c}{2}xy+2y^2,\end{cases}\tag{11}$$

$$y-\frac{1}{2}x^2-\frac{a+c-b}{2}x=0.\tag{12}$$

系统 (4) 的奇点相应地移到 $M_1\left(b(1-ac),\frac{1}{2}(1-ac)\right)$、$M_2\left(b-a,\frac{c}{2}(b-a)\right)$、$M_3(0,0)$、$M_4\left(b-c,\frac{a}{2}(b-c)\right)$. 我们对等价系统 (11) 作出证明.

条件 (i) 的必要性由定理 1 得到,再由 (i) 以及 $\mu=\frac{abc}{2}>0$ 可推出 (ii) 的必要性. 为证 (iii) 的必要性,作 $B(x,y)=\left[\left(1-\frac{ac}{2}\right)x-by\right]^{-1}\left[y-\frac{1}{2}x^2-\frac{a+c-b}{2}x\right]^{-1}$, 则对系统 (11) 有 $\frac{\partial(BP_2)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ_2)}{\partial y}=\left[\left(1-\frac{ac}{2}\right)x-by\right]^{-2}\left[y-\frac{1}{2}x^2-\frac{a+c-b}{2}x\right]^{-1}\Phi$. 其中, $\Phi=\left[\frac{abc}{4}-\frac{1}{2}(a+c)\left(1-\frac{ac}{2}\right)\right]x^2+2\left(1-\frac{ac}{2}\right)xy-by^2$ 是 x、y 的二次型,其判别式 $\Delta=4\left[\frac{1}{2}b^2+b\left(\frac{ac}{2}-1\right)\cdot\frac{a+b+c}{2}+\left(\frac{ac}{2}-1\right)^2\right]$. 若 (iii) 不满足,则 $\Delta\leqslant 0$, 从而 Φ 常号. 由 Dulac 判据知系统 (11) 无环. 故条件 (iii) 也是必要的.

下证充分性. 如图 2 所示,奇点 M_3 是直线 $F(x,y)\equiv\left(\frac{ac}{2}-1\right)x+by=0$ 与抛物线 (12) 的交点,设 N 是它们的另一个交点. 直线段 $\overline{M_3N}$ 与抛物线上的弧段 $\widehat{NM_4M_3}$ 围成区域 Σ. 当定理条件都满足时, M_1 是 Σ 内部的稳定焦点,而 M_3、M_4 都是鞍点. 对系统 (11), $\frac{dF}{dt}=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{2}b^2+b\left(\frac{ac}{2}-1\right)\cdot\frac{a+b+c}{2}+\left(\frac{ac}{2}-1\right)^2\right]x^2$. 因此沿 $\overline{M_3N}$ (M_3 除外), 系统 (11) 的方向场指向 Σ 外部,而 $\widehat{NM_4M_3}$ 落在系统 (11) 的轨线上. 应用 Bendixon 环域定理可以推出: 系统 (11) 在 Σ 内存在包含 M_1 的不稳定极限环. 定理获证.

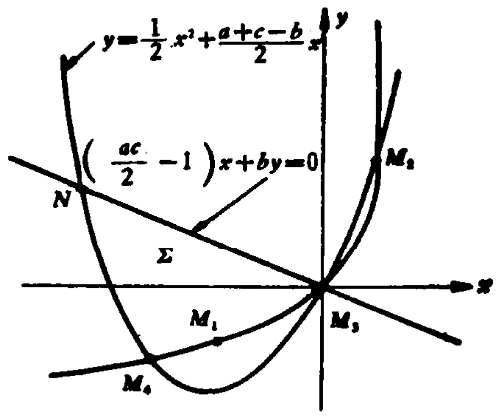

图 2

关于系统 (4′) 的有关结果可参阅文献 [6].

附记. 本文完成后,蔡燧林老师告诉作者,文献 [7] 亦讨论了同一问题. 该文断言"具抛物线解的二次系统必无极限环". 由本文看出,这个结果是错误的. 其原因在于文献 [7] 给出的并非具抛物线解的二次系统的一般形式,而只是本文的 (2) 式中 $\beta_1=0$ 的特殊情形. 这个错误最先产生于文献 [7] 所引的文献 [8]. 顺便指出,我们可举例说明定理 2—5 所给的条件均非空集.

致谢: 作者对蔡燧林老师的热忱指导表示衷心感谢.

参　考　文　献

[1] 秦元勋,数学学报, **8**(1958), 1: 23—25.
[2] 董金柱,数学学报, **12**(1963), 3: 251—257.
[3] 叶彦谦,新疆大学学报, 1980, 1: 1—32.
[4] Черкас Л. А., *Ду*, **13** (1977), 5: 779—802.
[5] 叶彦谦,极限环论,上海科学技术出版社, 1965.
[6] 陈叔平,以抛物线为特殊积分的二次系统的极限环 (II), 已投《数学研究与评论》.
[7] 王东达,科学通报, **27**(1983), 9: 521—522.
[8] Черкас Л. А., *БССР ДАН*, **7** (1963), 11: 732—735.