科学通报
第 40 卷 第 7 期 CHINESE SCIENCE BULLETIN 1995 年 4 月

# 布朗运动的几何叠对数律

高 勇

(西安交通大学 理学院信息与系统科学研究所, 西安 710049)

**关键词** 布朗运动 闭凸包 叠对数律

设$\{\omega(t),t\in[0,1]\}$为 $d$ 维布朗运动, 令 $C_t(\omega)=\overline{\text{co}}\{\omega(s);\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ $(\forall t\in[0,1])$, 称$\{C_t(\omega),t\in[0,1]\}$为布朗凸包. Levy 早在 1956 年就证明了

$$\limsup_{t\to\infty}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}V(C_t)=m_d,$$

其中 $V(\cdot)$ 表示凸集的体积泛函, $m_d$ 为非零常数. 近来, 关于布朗凸包的研究重新引起了人们的极大兴趣[1~3], 因为布朗凸包描述了布朗运动的几何性态. Khoshnevisan 在文献[3]中研究了 $C_t(\omega)$的局部渐近性态, 他在引言中指出, 由于$\{C_t,t\in[0,1]\}$实际上是一个"紧凸集值过程", 因此以前的研究(也包括文献[3])均将问题转化到关于 $C_t(\omega)$ 的某些"单调泛函"的研究上. Khoshnevisan[3] 进一步问到: 能否得出$\{C_t,t\in[0,1]\}$本身的局部渐近性态? 本文的目的就是回答这一问题, 给出$\{C_t,t\in[0,1]\}$本身的叠对数律.

设$(R^d,|\cdot|)$为 $d$ 维欧氏空间, $\{x_n,n\geqslant1\}$为其闭单位球 $U^d$ 中的稠密点列. 用 $P_{k(c)}(R^d)$ 表示 $R^d$ 中非空紧(凸)集全体. 任给 $A\in P_k(R^d)$, 称下面定义的 $U^d$ 上的正齐次、连续凸函数 $\sigma(\cdot,A)$ 为 $A$ 的支撑函数:

$$\sigma(x,A)=\sup\{\langle x,y\rangle;y\in A\},\quad x\in U^d,$$

其中$\langle x,y\rangle$表示内积. 周知支撑函数有下列性质:

$$\sigma(x,A)=\sigma(x,\overline{\text{co}}\,A),\ \ \forall A\in P_k(R^d),\tag{1}$$

$$\sigma(x,\lambda A)=\lambda\sigma(x,A),\ \ \forall A\in P_k(R^d),\ \lambda\geqslant0,\tag{2}$$

$$A=B\Leftrightarrow\forall n\geqslant1,\sigma(x_n,A)=\sigma(x_n,B)\ (\text{其中 } A,B\in P_{kc}(R^d)).\tag{3}$$

紧凸集值映射 $A_t:[0,1]\to P_{kc}(R^d)$ 在 $t=0$ 处的 Kuratowski 上极限定义作 $\limsup\limits_{t\to0}A_t=\bigcap\limits_{s\geqslant0}(\overline{\text{co}}\bigcup\limits_{0\leqslant t\leqslant s}A_t)$, 显然 $\forall x\in U^d$, 有

$$\sigma(x,\limsup_{t\to0}A_t)=\limsup_{t\to0}\sigma(x,A_t).\tag{4}$$

关于集值映射的极限及 $P_k(R^d)$ 上的随机元(随机集)理论, 请见文献[4,5].

用$\mathscr{C}^d$表示满足 $f(0)=0$ 的连续函数 $f:[0,1]\to R^d$ 全体构成的可分 Banach 空间, 范数取作 $\|f-g\|=\sup\{|f(t)-g(t)|;t\in[0,1]\}$. 用 $\|\cdot\|_p$ 表示 Banach 空间 $L^p([0,1];R^d)$ 上的范数. 在$\mathscr{C}^d$上定义如下变换:

1994-01-14 收稿

$$J_x(f)(t)=\sup\{\langle x, f(s)\rangle;\ 0\leqslant s\leqslant t\},\quad x\in U^d,\quad t\in[0,1]$$
$$J(f)(t)=\sup\{|f(s)|;\ 0\leqslant s\leqslant t\},\quad t\in[0,1]$$

则不难证明下述引理:

**引理 1**　$\forall x\in U^d, f, g\in\mathscr{C}^d$, 必有 $J_x(f)\in\mathscr{C}^1, J(f),\in\mathscr{C}^1$, 且

$$\|J_x(f)(\cdot)-J_x(g)(\cdot)\|\leqslant|x|\cdot\|f-g\|,\tag{5}$$
$$\|J(f)(\cdot)-J(g)(\cdot)\|\leqslant\|f-g\|.\tag{6}$$

**定理 1**　设 $(\mathscr{C}^d, \mathscr{B}, \mathscr{W}_d)$ 为标准的 Wiener 测度空间, $\{C_t, t\in[0,1]\}$ 为布朗凸包, 即 $\forall\omega\in\mathscr{C}^d$, $C_t(\omega)=\overline{\mathrm{co}}\{\omega(s);\ 0\leqslant s\leqslant t\}$, 则

$$\limsup_{t\to 0}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega)=U^d\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d).\tag{7}$$

**证**　简单的计算表明 $\forall x\in U^d, \sigma(x, U^d)=|x|$. 因此, 根据 (3), (4) 两式, 为证 (7) 式成立, 仅需证明 $\forall x\in U^d$.

$$\limsup_{t\to 0}\sigma\left(x,\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega)\right)=|x|\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d),\tag{8}$$

但由 (1) 式知

$$\sigma(x, C_t(\omega))=\sigma(x,\{\omega(s);0\leqslant s\leqslant t\})=\sup\{\langle x,\omega(s)\rangle;\ 0\leqslant s\leqslant t\}=J_x(\omega)(t),$$

因此, 参照 (2) 式, 仅需证明

$$\limsup_{t\to\infty}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}J_x(\omega)(t)=|x|\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d).\tag{9}$$

依 Strassen 叠对数律知, 对于 $\mathscr{W}_d$ 几乎所有 $\omega\in\mathscr{C}^d$, 函数族

$$\left\{\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\omega(tT),\ T\in[0,1]\right\}_{0\leqslant t\leqslant e^{-1}}$$

是相对紧的, 且其极限集为 $\{f\in\mathscr{C}^d; \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}$. 因此依引理 1 知 $\forall x\in U^d$, 函数族

$$\left\{\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}J_x(\omega)(tT),\ T\in[0,1]\right\}_{0\leqslant t\leqslant e^{-1}}$$

也是相对紧的, 且其极限集为 $\{J_x(f)(\cdot); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}$, 故易证

$$\limsup_{t\to 0}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}J_x(\omega)(t)=\sup\{J_x(f)(1); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}.\tag{10}$$

下面证明

$$\sup\{J_x(f)(1); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}=|x|.\tag{11}$$

首先, 取 $f(t)=tx$, 则 $f\in\mathscr{C}^d$, 且 $\|\nabla f\|_2\leqslant 1, J_x(f)(1)=|x|$, 故

$$\sup\{J_x(f)(1); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}\geqslant|x|.$$

为证反向不等式, 注意到 $\{f; f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}\subset\{f; f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_1\leqslant 1\}$, 故知 $\sup\{J_x(f)(1); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_2\leqslant 1\}\leqslant\sup\{J_x(f)(1); f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_1\leqslant 1\}$. 任给 $g\in\{f; f\in\mathscr{C}^d, \|\nabla f\|_1\leqslant 1\}$ 及 $t\in[0,1]$, 有

$$\langle x, g(t)\rangle=\left\langle x,\int_0^t\nabla g(s)\,\mathrm{d}s\right\rangle\leqslant|x|\cdot\left|\int_0^t\nabla g(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant|x|\cdot\int_0^1|\nabla g(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant|x|,$$

故 $J_x(g)(1)\leqslant|x|$, 从而 $\sup\{J_x(f)(1);f\in\mathscr{C}^d,\|\nabla f\|_1\leqslant 1\}\leqslant|x|$, 所以

$$\sup\{J_x(f)(1);f\in\mathscr{C}^d,\|\nabla f\|_2\leqslant 1\}\leqslant|x|.$$

反向不等式得证，故知(11)式成立．结合(10)，(11)式即得(9)式，定理得证．

定理1描述了布朗凸包在 $t=0$ 处生成得有"多快"，下面研究 $t=0$ 处布朗凸包生成得有"多慢"． $\forall A\in P_k(R^d)$, 令 $|A|=\sup\{|x|;x\in A\}$, $d(x,A)=\inf\{|x-y|;y\in A\}\ (x\in R^d)$. 紧凸集 $A,B$ 间的下半 Hausdorff 距离与 Hausdorff 距离定义作[4]

$$h^+(A,B)=\sup\{d(x,B);x\in A\},$$
$$h(A,B)=\max(h^+(A,B),h^+(B,A)).$$

**定理2** 设$(\mathscr{C}^d,\mathscr{B},\mathscr{W}_d)$为标准的 Wiener 测度空间，$\{C_t,\ t\in[0,1]\}$为布朗凸包，则

$$\liminf_{t\to 0} h^+\left(\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega),U^{\rm d}\right)=0\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d).$$

**证** 依定义易知 $\forall A\in P_k(R^d)$ 及 $\lambda\geqslant 0$, 必有 $|A|=|\overline{\rm co}\,A|$ 且 $|\lambda A|=\lambda|A|$, 从而知 $\forall t\in[0,\ e^{-1})$, $\omega\in\mathscr{C}^d$,

$$\left|\left(2t\log\ \log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega)\right|=\left(2t\log\ \log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}|\{\omega(s);0\leqslant s\leqslant t\}|$$
$$=\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}J(\omega)(t). \tag{12}$$

类似于定理1, 依 Strassen 叠对数律及引理1知存在 $\mathscr{W}_d$ 零测集 $N$ 使得 $\forall W\in N^c$, 函数族 $\left\{\left(2t\log\ \log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}J(\omega)(tT),T\in[0,1]\right\}_{0\leqslant t<e^{-1}}$是相对紧的，从而

$$a(\omega)\triangleq\sup\left\{\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}J(\omega)(t),0\leqslant t<e^{-1}\right\}<+\infty.$$

则由(12)式知 $\forall\, t\in[0,e^{-1}]$,

$$\left|\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega)\right|\leqslant a<+\infty,\ \ \omega\in N^c.$$

于是$\left\{\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\ \right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega),t\in[0,e^{-1})\right\}$是一族包含在紧凸集 $aU^d=\{x\in R^d;|x|\leqslant a(\omega)\}$ 内的紧凸集$(\omega\in N^c)$，所以依文献[4]定理4.3.13知存在 $C(\omega)\in P_k(R^d)$ 及可数点列$\{t_k,k\geqslant 1\}\subset[0,e^{-1})$, $t_k\downarrow 0$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} h\left(2t_k\log\log\left(\frac{1}{t_k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_{t_k}(\omega),C(\omega)=0,\ \ \omega\in N^c.$$

但依文献[4]定理4.3.5知此时必有

$$C(\omega)\subset\bigcap_{k\geqslant 1}\overline{\rm co}\left(\bigcup_{m\geqslant k}\left(2t_m\log\log\left(\frac{1}{t_m}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_{t_m}(\omega)\right),$$

从而依 Kuratowski 上极限与支撑函数的关系(4)式易证

$$C(\omega)\subset\limsup_{t\to 0}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega),$$

再结合定理 1, 得到

$$C(\omega)\subset U^d,\ \omega\in N^c.$$

于是根据下半 Hausdorff 距离的定义知 $\forall k\geqslant 1,\omega\in N^c$,

$$h^+\left(\left(2t_k\log\log\left(\frac{1}{t_k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_{t_k}(\omega),U^d\right)\leqslant h^+\left(\left(2t_k\log\log\left(\frac{1}{t_k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_{t_k}(\omega),C(\omega)\right)$$

$$\leqslant h\left(\left(2t_k\log\log\left(\frac{1}{t_k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_{t_k}(\omega),C(\omega)\right)\to 0,\ k\to\infty,$$

因此,可得

$$\liminf_{t\to 0}h^+\left(\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega),U^d\right)=0\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d).$$

定理得证.

作为本文的结束,提出下述有待解决的问题: 根据文献[4], 集值映射 $A_t$:$[0,1]\to P_{kc}(R^d)$ 的 Kuratowski 下极限定义作

$$\liminf_{t\to 0}A_t=\{x\in R^d;\ \lim_{t\to 0}d(x,A_t)=0\}.$$

对于布朗凸包,根据 Blumenthal 0-1 律及随机集的可测性理论可知,存在紧凸集 $C\in P_{kc}(R^d)$, 使得

$$\liminf_{t\to 0}\left(2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}C_t(\omega)=C\quad \text{a.s.}(\mathscr{W}_d).$$

根据 Kuratowski 上、下极限的定义及定理 1 可证 $0\in C\subset U^d$, 能否给出 $C$ 的确切表达式呢? 考虑到布朗运动轨道的不可微性,我们推测应有 $C=\{0\}$ (单点集 0), 但尚无法证明这一结论.

## 参　考　文　献


1 Cranston M, Hsu P, March P. Smoothness of the convex hull of planar Brownian motion. Ann Probab, 1989, 7: 144～155

2 Burdzy K. Geometric properties of two-dimensional Brownian paths. Probab Th Rel Fields, 1989, 81: 485～505

3 Khoshnevisan D. Local asymptotic laws of the Brownian convex hull. Probab Th Rel Fields, 1992, 93: 377～392

4 Klein E, Thompson A C. Theory of Correspondence. New York: Jhon Wiley & Sons, 1984

5 张文修, 汪振鹏, 高　勇. 集值随机过程. 北京: 科学出版社, 1995