规范场理论的若干问题*

谷超豪　杨振宁

摘　要

规范场理论是电磁场理论的推广和发展. 本文在资料[1]的基础上,对规范场理论作了进一步的探讨. 文中研究了规范场的对偶问题和两个规范场的相互作用问题. 又引进了和洛仑兹规范相类似的补充条件,把场方程化为达兰贝尔型方程,并证明了初始值问题的可解性. 本文还讨论了资料[1]中的引力场无源方程在相对论流体力学中的意义. 此外, 在球对称静态情况下确定了无源方程某些解的存在性和自由度.

一、规范场概述

在资料[1]中用积分形式叙述了规范场的理论,本文将对此作进一步的探讨. 为了后文的需要,我们在这里再作一简短的叙述[1)].

依照资料[1]中的定义,规范场是指一个微分流形 M_n(对于物理学中的问题 $n=4$, M_n 表示四维时空)和一个规范群 G(G 是李群), 并且有 M_n 上分段光滑曲线弧 $\widehat{AB}$ 和 G 中的元素相对应

$$\widehat{AB} \to \phi_{AB} \in G, \tag{1.1}$$

它满足如下的同态性质: 曲线弧 $\widehat{ABC}$ 所对应的群的元素 ϕ_{ABC} 就是

$$\phi_{ABC} = \phi_{AB}\phi_{BC}, \tag{1.2}$$

特别当 $\widehat{AB}$ 化为弧的微分 $\widehat{A\,A+dx}$ 时,

$$\phi_{A\ A+dx} \doteq I + b^i_\mu(x)dx^\mu X_i, \tag{1.3}$$

式中 $x^\mu(\mu=1,2,\cdots,n)$ 表示流形上点的坐标, $X_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是 G 的李代数 G' 的一组基, I 是群 G 的恒等元素, b^i_μ 或 $b_\mu = b^i_\mu X_i$ 称为规范场的势.

对无限小回路 $\widehat{ABCDA}$ 作 ϕ_{ABCDA}, 可以导出

$$\phi_{ABCDA} = I - f^k_{\mu\nu}X_k dx^\mu dx^{\nu'}, \tag{1.4}$$

这里 dx^μ 和 $dx^{\nu'}$ 是构成回路 $\widehat{ABCDA}$ 的两组微分,

$$f^k_{\mu\nu} = b^k_{\mu,\nu} - b^k_{\nu,\mu} - b^i_\mu b^j_\nu c^k_{ij}, \tag{1.5}$$

式中“,”表示偏导数, c^k_{ij} 为李代数 G' 的结构常数,也就是说

本文 1974 年 8 月收到.

* 本文是美国纽约州立大学教授杨振宁于 1974 年 6 月访沪期间,与复旦大学部分教师共同讨论和研究的成果. 参加这项工作的复旦大学教师还有: 孙鑫、苏汝铿、严绍宗、沈纯理、胡和生、夏道行.

1) 规范场的概念实质上和微分几何中纤维丛上的联络相等价,但我们这里采用物理学的术语.

$$[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i = c_{ij}^k X_k. \tag{1.6}$$

$f_{\mu\nu}^k$ 或 $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}^k X_k$ 称为规范场的强度,又称

$$\phi_{AB} \to \phi'_{AB} = \xi_A \phi_{AB} \xi_B^{-1} \quad (\xi_A \in G,\ \xi_B \in G) \tag{1.7}$$

为规范变换.

在 M_n 为闵可夫斯基时空的情况下,定义

$$f_{\mu\nu|\lambda} = f_{\mu\nu,\lambda} + [b_\lambda, f_{\mu\nu}] \tag{1.8}$$

或

$$f_{\mu\nu|\lambda}^k = f_{\mu\nu,\lambda}^k + b_\lambda^i f_{\mu\nu}^j c_{ij}^k \tag{1.9}$$

为 $f_{\mu\nu}$ 或 $f_{\mu\nu}^k$ 的规范导数. 成立毕安基恒等式

$$f_{\mu\nu|\lambda} + f_{\nu\lambda|\mu} + f_{\lambda\mu|\nu} = 0. \tag{1.10}$$

如果 M_n 有黎曼度规 $g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$, 那末定义

$$f_{\mu\nu\|\lambda} = f_{\mu\nu;\lambda} + [b_\lambda, f_{\mu\nu}] \tag{1.11}$$

为 $f_{\mu\nu}$ 的协变规范导数, $f_{\mu\nu;\lambda}$ 中的";"表示协变导数,即

$$f_{\mu\nu;\lambda} = f_{\mu\nu,\lambda} - \begin{Bmatrix}\sigma\\ \mu\lambda\end{Bmatrix} f_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix}\sigma\\ \nu\lambda\end{Bmatrix} f_{\mu\sigma}. \tag{1.12}$$

仍然有毕安基恒等式

$$f_{\mu\nu\|\lambda} + f_{\nu\lambda\|\mu} + f_{\lambda\mu\|\nu} = 0. \tag{1.13}$$

在资料[1]中还讨论源的概念,它的定义是

$$J_\mu = g^{\nu\lambda} f_{\mu\nu\|\lambda} \tag{1.14}$$

或

$$J_\mu^k = g^{\nu\lambda} f_{\mu\nu\|\lambda}^k. \tag{1.15}$$

需要注意的是,在现在的符号系统下, b_μ, $f_{\mu\nu}$ 和 J_μ 是李代数 G' 中的元素. 源 J_μ 满足方程

$$g^{\mu\lambda} J_{\mu\|\lambda} = 0. \tag{1.16}$$

称满足

$$J_\mu = 0 \tag{1.17}$$

的场为无源的,无源的场方程 (1.17) 可以由变分

$$\delta \int L\sqrt{-g}\, d^n x = 0$$

得到,这里 L 是拉氏密度函数:

$$L = f_{\mu\nu}^k f_{\alpha\beta}^j g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} G_{kj}, \tag{1.18}$$

式中的 G_{kj} 是李代数 G' 的关于伴随群不变的一个非退化对称二次型的系数. L 的这种写法比资料[1]中的 (20) 式拓广了一些, 这里群 G 比半单线群广泛一些, 它可以是 $U(1)$ (相当于电磁场)或任何可换群和半单纯群的直积.

此外,从这个拉氏密度函数出发,还可导出规范场的能量动量张量. 对坐标作无穷小变换 $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, 这时 $g^{\alpha\beta}$, b_μ^k 产生相应的变更

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}, \quad b'^k_\mu = b_\mu^k + \delta b_\mu^k.$$

利用无源方程 $J_\mu^k = 0$, 可以得出

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int L\sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial b_\mu^k} \delta b_\mu^k + \frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial b_{\mu,\nu}^k} \delta(b_{\mu,\nu}^k) \right] d^4x \\ &= \int T_{\alpha\beta} (\delta x^\alpha)_{;\gamma}\, g^{\gamma\beta} \sqrt{-g}\, d^4x, \end{aligned} \tag{1.19}$$

这里

$$T_{\alpha\beta} = -4G_{kj}f^k_{\alpha\nu}f^j_{\beta\varepsilon}g^{\nu\varepsilon} + g_{\alpha\beta}G_{kj}f^k_{\mu\nu}f^j_{\gamma\varepsilon}g^{\mu\gamma}g^{\nu\varepsilon}, \tag{1.20}$$

就是场的能量动量张量,它是一个对称张量,而且成立

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0. \tag{1.21}$$

二、规范场的对偶

对于电磁场，有熟知的对偶关系，现在要对一般的规范场讨论对偶问题，但只限于 $n=4$ 的情况．对规范场强度作 $*$ 算子

$$*f_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}f_{\tau\sigma}, \tag{2.1}$$

式中

$$\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} = \begin{cases} \sqrt{-g}, & \text{当 } \lambda, \mu, \alpha, \beta \text{ 为 } 1, 2, 3, 4 \text{ 的偶排列时}, \\ -\sqrt{-g}, & \text{当 } \lambda, \mu, \alpha, \beta \text{ 为 } 1, 2, 3, 4 \text{ 的奇排列时}, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases}$$

并称 $*f_{\lambda\mu}$ 为 $f_{\lambda\mu}$ 的对偶强度．显然有

$$\begin{aligned} *f_{\lambda\mu\|\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}(f_{\tau\sigma;\nu} + [b_\nu, f_{\tau\sigma}]) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}f_{\tau\sigma\|\nu}. \end{aligned}$$

容易看到

$$*f_{\lambda\mu\|\nu} + *f_{\mu\nu\|\lambda} + *f_{\nu\lambda\|\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu\nu\alpha}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}f_{\tau\sigma\|\beta},$$

因此规范场的无源方程可写为:

$$*f_{\lambda\mu\|\nu} + *f_{\mu\nu\|\lambda} + *f_{\nu\lambda\|\mu} = 0. \tag{2.2}$$

同样,规范场的毕安基恒等式也可写为:

$$g^{\lambda\nu}*f_{\lambda\mu\|\nu} = 0. \tag{2.3}$$

现在要问,场的对偶强度能否作为另一个规范场的强度? 如果存在规范势 b^*_μ，使 b^*_μ 的强度就是 $*f_{\lambda\mu}$，那末就称 b^*_μ 为 b_μ 的对偶势，称相应的场 F^* 为场 F 的对偶场．当群 G 为可换群时,场 F 在局部范围中存在对偶场的充分必要条件是场 F 为无源的，事实上，由于群 G 是可换的,对偶势 b^*_μ 满足方程

$$b^*_{\mu,\nu} - b^*_{\nu,\mu} = *f_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

而场 F 的无源方程 (2.2) 化为:

$$*f_{\mu\nu;\lambda} + *f_{\nu\lambda;\mu} + *f_{\lambda\mu;\nu} = 0.$$

这正是方程 (2.4) 的可积条件,因此方程 (2.4) 的解 b^*_μ 存在．反之,如 b^*_μ 存在,由它的毕安基恒等式就推出 F 的无源方程．

现在讨论 G 为非可换群的情况．

引理 1. 设 b_μ 有对偶的规范势 b^*_μ，那末 b_μ 无源的充要条件是

$$[b_\lambda - b^*_\lambda, f_{\mu\nu}]g^{\nu\lambda} = 0. \tag{2.5}$$

证．由 $*f_{\mu\nu}$ 的毕安基等式得出:

$$\begin{aligned} &[b^*_\lambda, *f_{\mu\nu}] + [b^*_\mu, *f_{\nu\lambda}] + [b^*_\nu, *f_{\lambda\mu}] \\ &= -*f_{\mu\nu;\lambda} - *f_{\nu\lambda;\mu} - *f_{\lambda\mu;\nu}. \end{aligned}$$

因此，利用对偶关系得到:

$$[b_\lambda^*, f_{\mu\nu}]g^{\nu\lambda} = -f_{\mu\nu;\lambda}g^{\nu\lambda}.$$

因 b_μ 的源为:

$$J_\mu = f_{\mu\nu\|\lambda}g^{\nu\lambda} = [b_\lambda - b_\lambda^*, f_{\mu\nu}]g^{\nu\lambda},$$

所以场 F 无源的充要条件就是 (2.5) 式.

但是在群 G 不是可换群的情况下，无源的场不一定有对偶的场. 现在举出一例来说明. 取 $G = SU(2)$, $g_{\mu\nu}$ 为闵可夫斯基度规，考察资料[2]中所得的特解

$$\boldsymbol{b}_4 = 0,$$

$$\boldsymbol{b}_k = g(r)\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

这里 $\boldsymbol{e}_k (k = 1, 2, 3)$ 表示三维空间中三个直交的单位向量，$\boldsymbol{r} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$, "×" 表示向量积，而 $g(r)$ 满足常微分方程:

$$(rg)'' + \frac{2}{r}(gr)' - (1 + r^2g)\left(\frac{2g}{r} + rg^2\right) = 0.$$

这样的规范势是无源的，下面来证明它没有对偶的规范势. 对于 $\boldsymbol{b}_\mu$ 下式成立

$$\boldsymbol{f}_{41} = \boldsymbol{f}_{42} = \boldsymbol{f}_{43} = 0,$$

$$\boldsymbol{F}_1 \equiv \boldsymbol{f}_{23} = \left(\frac{g'}{r} - g^2\right)x^1\boldsymbol{r} - (g'r + 2g)\boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{F}_2 \equiv \boldsymbol{f}_{31} = \left(\frac{g'}{r} - g^2\right)x^2\boldsymbol{r} - (g'r + 2g)\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{F}_3 \equiv \boldsymbol{f}_{12} = \left(\frac{g'}{r} - g^2\right)x^3\boldsymbol{r} - (g'r + 2g)\boldsymbol{e}_3.$$

当 $g \neq -\frac{2}{r^2}$ 时，这三个向量 $\boldsymbol{F}_k (k = 1, 2, 3)$ 是线性无关的.

先注意到方程组

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{F}_3 - \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{F}_2 = 0, \tag{2.6}$$

$$-\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{F}_1 = 0, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{F}_1 = 0 \tag{2.8}$$

只有唯一的向量解 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 = 0$. 事实上 (2.6)—(2.8) 式分别表示: $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{F}_2$ 共面; $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{F}_1$ 共面; $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{F}_1$ 共面，因此 $\boldsymbol{u}_k$ 必须和 $\boldsymbol{F}_k (k = 1, 2, 3)$ 共线. 再由 (2.6)—(2.8) 式可知，$\boldsymbol{u}_k = 0$. 若置 $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{b}_k^* (k = 1, 2, 3)$, 方程 (2.5) 就化为 (2.6)—(2.8) 式. 因此必然有 $\boldsymbol{b}_k^* = \boldsymbol{b}_k$. 又从 (2.1) 式得到

$$\boldsymbol{f}_{32} = \boldsymbol{f}_{41}, \quad \boldsymbol{f}_{13} = \boldsymbol{f}_{42}, \quad \boldsymbol{f}_{21} = \boldsymbol{f}_{43}.$$

但这是和 $\boldsymbol{f}_{32}$, $\boldsymbol{f}_{41}$ 等等的表达式相矛盾的，所以 $\boldsymbol{b}_\mu$ 不存在对偶的势.

还可以证明，同位旋场[3]的另一无源场的势[2]

$$\boldsymbol{b}_4 = 0, \quad \boldsymbol{b}_k = \eta(t)\boldsymbol{e}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \ddot{\eta} + 2[\eta(t)]^3 = 0$$

也没有对偶的规范势.

从这两个例子可以见到，在非可换群的情况，对于某些无源的场来说，它们的对偶势确实不存在.

三、规范场的相互作用

在本节中，考虑两个规范场相互作用的问题．设 F_1 和 F_2 是两个规范场，规范群分别是 G_1 和 G_2，现在要问：在不考虑其它场的影响时，这两个规范场可能有哪些相互作用？这里限于在规范场的理论体系中考虑这种相互作用，因而就希望制作一个新的规范场 F，它的规范势可以分为两个部分，一部分相应于 F_1 的规范势，另一部分相应于 F_2 的规范势．当相应于 F_1 的规范势化为零时，场 F 就退化为场 F_2，当相应于 F_2 的规范势化为零时，场 F 就退化为场 F_1．这样，我们自然就要求 F 的规范群 G 满足下述要求：G 中有两个子群 $\bar{G}_1$ 和 $\bar{G}_2$，$\bar{G}_1$ 和 G_1 同构，$\bar{G}_2$ 和 G_2 同构，而 G 中每个元素 g 均可表示为 $g = g_1 g_2$，$g_1 \in \bar{G}_1$，$g_2 \in \bar{G}_2$．相应地，G 的李代数 G' 要分解为两个子代数 $\bar{G}'_1$ 和 $\bar{G}'_2$ 的和，$\bar{G}'_1$ 和 $\bar{G}'_2$ 分别和 G_1，G_2 的李代数 G'_1，G'_2 同构．并且，群 G 和李代数 G' 的维数 $r = r_1 + r_2$，这里 r_1 和 r_2 分别是 G_1 和 G_2 的维数．

如果这样的规范场 F 已经作好，那末可以选取李代数的基 X_i，使 $X_{i_1}(i_1 = 1, 2, \cdots, r_1)$ 构成 $\bar{G}'_1$ 的基，$X_{i_2}(i_2 = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2)$ 构成 $\bar{G}'_2$ 的基．因为 $\bar{G}'_1$，$\bar{G}'_2$ 为子代数，所以 G 的结构常数满足条件：

$$c^{k_2}_{i_1 j_1} = 0, \quad c^{k_1}_{i_2 j_2} = 0. \tag{3.1}$$

容易看到，这时规范场 F 的强度 $f^i_{\mu\nu}$ 可以分为两部分：

$$f^{k_1}_{\mu\nu} = b^{k_1}_{\mu;\nu} - b^{k_1}_{\nu;\mu} - b^{i_1}_\mu b^{j_1}_\nu c^{k_1}_{i_1 j_1} - b^{i_1}_\mu b^{j_2}_\nu c^{k_1}_{i_1 j_2} - b^{i_2}_\mu b^{j_1}_\nu c^{k_1}_{i_2 j_1}, \tag{3.2}$$

$$f^{k_2}_{\mu\nu} = b^{k_2}_{\mu;\nu} - b^{k_2}_{\nu;\mu} - b^{i_2}_\mu b^{j_2}_\nu c^{k_2}_{i_2 j_2} - b^{i_1}_\mu b^{j_2}_\nu c^{k_2}_{i_1 j_2} - b^{i_2}_\mu b^{j_1}_\nu c^{k_2}_{i_2 j_1}. \tag{3.3}$$

此外，场 F 的源 J^k_μ 也可以分为两部分：

$$J^{k_1}_\mu = g^{\nu\lambda} f^{k_1}_{\mu\nu\|\lambda} = g^{\nu\lambda}(f^{k_1}_{\mu\nu;\lambda} + b^{i_1}_\lambda f^{j_1}_{\mu\nu} c^{k_1}_{i_1 j_1} + b^{i_1}_\lambda f^{j_2}_{\mu\nu} c^{k_1}_{i_1 j_2} + b^{i_2}_\lambda f^{j_1}_{\mu\nu} c^{k_1}_{i_2 j_1}), \tag{3.4}$$

$$J^{k_2}_\mu = g^{\nu\lambda} f^{k_2}_{\mu\nu\|\lambda} = g^{\nu\lambda}(f^{k_2}_{\mu\nu;\lambda} + b^{i_2}_\lambda f^{j_2}_{\mu\nu} c^{k_2}_{i_2 j_2} + b^{i_1}_\lambda f^{j_2}_{\mu\nu} c^{k_2}_{i_1 j_2} + b^{i_2}_\lambda f^{j_1}_{\mu\nu} c^{k_2}_{i_2 j_1}). \tag{3.5}$$

由此可见，当 $b^{i_2}_\mu = 0$ 时，$f^{k_2}_{\mu\nu} = 0$，$J^{k_2}_\mu = 0$ 而

$$f^{k_1}_{\mu\nu} = b^{k_1}_{\mu;\nu} - b^{k_1}_{\nu;\mu} - b^{i_1}_\mu b^{j_1}_\nu c^{k_1}_{i_1 j_1} = \underset{1}{f}{}^{k_1}_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

$$J^{k_1}_\mu = g^{\nu\lambda} \underset{1}{f}{}^{k_1}_{\mu\nu\|\lambda} = \underset{1}{J}{}^{k_1}_\mu, \tag{3.7}$$

因而规范场 F 化为规范场 F_1；同样，当 $b^{i_1}_\mu = 0$ 时，规范场 F 化为规范场 F_2．所以这样的 F 能够成为规范场 F_1 和 F_2 相互作用的可能形式．由于 G 的维数 $r = r_1 + r_2$，所以除时空度规外，其他因素是忽略不计的．

从 (3.2)—(3.5) 式可以见到，在一般情况下，两个场的势直接参加相互作用．但当 $\bar{G}_2$ 为 G 的正常子群时，由于 $c^{k_1}_{i_1 j_2} = 0$，$f^{k_1}_{\mu\nu}$ 和 $J^{k_1}_\mu$ 不依赖于 $b^{k_2}_\mu$，所以场 F_2 的势不直接参加对场 F_1 的作用；特别，当 G 分解为 $\bar{G}_1$ 和 $\bar{G}_2$ 的直积时，由于 $c^k_{i_1 i_2} = 0$，场 F_1，F_2 的势均不直接相互作用．

因而，从已给的 F_1，F_2 出发来制作 F 的问题，也就化为从已给的 G_1，G_2 出发作 G 的问题，或从已给的 G'_1，G'_2 出发作李代数 G' 的问题．这样，就把决定相互作用的可能形式问题归结为纯粹的代数学的问题．

这种代数学的问题，可能有多种形式的解答，例如：

1. 作 G'_1 和 G'_2 的直接和，把它取为 G'，这时 G'_1 和 G'_2 都是 G' 的理想子代数，把 G'_1 和 G'_2 取

为 $\bar{G}'_1$, $\bar{G}'_2$,就得到一种最简单的相互作用方式. 这种解答一定存在,是平凡解.

2. 作 G'_1 和 G'_2 的直接和, 把它取为 G', 如果 G'_1 和 G'_2 的某一子代数同构, 那末 G'_2 有一组基 $X_{r_1+1}, \cdots, X_{2r_1}, X_{2r_1+1}, \cdots, X_r$, 使 $[X_{r_1+i_1}, X_{r_1+j_1}] = c^{k_1}_{i_1j_1} X_{r_1+k_1}$ 成立. 这时取 G'_2 为 $\bar{G}'_2$, 取 $X_1 + X_{r_1+1}, \cdots, X_{r_1} + X_{2r_1}$ 所组成的李代数为 $\bar{G}'_1$,那末 $\bar{G}'_2$ 是理想子代数, $\bar{G}'_1$ 不是理想子代数. 这又是一种相互作用的方式. 这种解答的存在是有条件的.

此外,是否还有其他的解答,要看李代数 G'_1 和 G'_2 的性质而定.

以 $G_1 = U(1)$, $G_2 = SU(2)$ 为例作一说明. 这时除解 1 外, 显然还有解 2. 因为 $U'(1)$ 为一维的李代数,而任何一维的李代数都是同构的. 这时除这两种解以外没有其他的解答了, 因为显然没有由这两个李代数合成的单纯或半单纯的李代数, 而包含它们的四维的非半单纯李代数, 又必然要分解为一维的理想和 $SU'(2)$ 的半直和, 如设 X_0, X_1, X_2, X_3 为基, X_0 属于一维理想, X_1, X_2, X_3 属于 $SU'(2)$, 则

$$[X_0, X_i] = c_i X_0, \quad [X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

利用雅科比恒等式

$$[X_0, [X_i, X_j]] + [X_i, [X_j, X_0]] + [X_j, [X_0, X_i]] = 0,$$

就容易知道 $c_i = 0$, 因而就归结为解 1 和解 2. 这个例子说明,电磁场和同位旋场在规范场理论体系中可能的相互作用方式有两种: 1. 两个场的势不直接参与相互作用; 2. 同位旋场的势不直接参与相互作用, 而电磁场的势却直接影响同位旋场. 重申一下, 这里所列举的只是在规范场理论范围内可能的相互作用,而没有涉及其它类型的相互作用.

四、达兰贝尔型的场方程

在电磁场理论中,往往对电磁势 A_ν 引入一个补充条件 $A_{\nu,\nu} = 0$, 使场方程

$$A_{\mu,\nu\nu} - A_{\nu,\mu\nu} = \phi_\mu(x), \tag{4.1}$$

简化为

$$A_{\mu,\nu\nu} = \phi_\mu(x). \tag{4.2}$$

这里 $\phi_\mu(x)$ 是四维的电流矢量,满足电荷守恒方程 $\phi_{\mu,\mu} = 0$. 可以证明,如果 A_μ 在 $t = 0$ 时, 满足

$$A_{\nu,\nu} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(A_{\nu,\nu}) = 0,$$

同时 A_μ 又满足简化的场方程 (4.2),那末补充条件 $A_{\nu,\nu} = 0$ 就常成立,场方程 (4.1) 就和方程 (4.2) 等价. 所以引入补充条件后,方程组 (4.1) 化为波动方程 (4.2),由它可以得出许多结论, 例如初始值问题可解、电磁波以光速传播等等.

在本节中, 我们要证明, 对于规范场(不论有源或无源)也成立类似的情况, 即可引入补充条件,使规范场方程化为和它等价的达兰贝尔型方程,由此也可得出相应的结论: 规范场方程的初始值问题在一定范围内是可解的, 它的扰动的波前以光速传播. 在本节中还作出了这个达兰贝尔型方程相应的拉氏密度函数.

我们先证明两个引理

引理 2. 对任何一个规范场,必可作规范变换,使得补充条件

$$S^k \equiv g^{\nu\lambda} b^k_{\nu;\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(b^{\nu k}\sqrt{-g})_{,\nu} = 0 \tag{4.3}$$

在适当范围中成立.

证. 在规范变换下,规范势的变化是

$$\bar{b}^k_\mu = A^k_l(a(x))a^l_{,\mu} + B^k_l(a(x))b^l_\mu, \tag{4.4}$$

式中 a^l 是群 G 的元素 g 的参数, 现为 x 的函数, B^k_l 是元素 g 在李代数 G' 中伴随表示的矩阵元,而 A^k_l 由

$$g(a)g^{-1}(a+da) = I + A^k_l(a)da^lX_k$$

所确定,显然成立 $\det|A^k_l| \neq 0$, 这时

$$g^{\mu\nu}\bar{b}^k_{\mu;\nu} = A^k_l g^{\mu\nu}a^l_{;\mu\nu} + A^k_{l,m}a^l_{,\mu}a^m_{,\nu}g^{\mu\nu} + B^k_{l,m}a^m_{,\nu}b^l_\mu g^{\mu\nu} + B^k_l g^{\mu\nu}b^l_{\mu;\nu},$$

为了使条件 $g^{\mu\nu}\bar{b}^k_{\mu;\nu} = 0$ 成立,其充要条件是 $a^l(x)$ 满足

$$g^{\mu\nu}a^l_{;\mu\nu} + \tilde{A}^l_k g^{\mu\nu}(A^k_{i,j}a^i_{,\mu}a^j_{,\nu} + B^k_{i,j}a^i_{,\nu}b^j_\mu + B^k_l b^l_{\mu;\nu}) = 0, \tag{4.5}$$

式中 $\tilde{A}^l_k$ 是矩阵 (A^l_k) 的逆阵中的元素. 由于物理学中四维时空的度规是 (+, +, +, −) 型的,所以 (4.5) 式是一个双曲型方程组,依据一般理论[4], 在适当范围内, 这种方程组的初始值问题有唯一解. 现在取 (4.5) 式的任一解来作规范变换,就能使补充条件 $g^{\mu\nu}\bar{b}^k_{\mu;\nu} = 0$ 成立. 引理 2 证毕.

现设规范场的方程为:

$$J^k_\mu \equiv g^{\nu\lambda}f^k_{\mu\nu\|\lambda} = \phi^k_\mu, \tag{4.6}$$

这里 ϕ^k_μ 表示场的外源,在一般情况下,它是表示相互作用的某种表达式,而且

$$g^{\mu\nu}\phi^k_{\mu\|\nu} = 0 \tag{4.7}$$

能作为外源的运动方程的推论而满足. 在可换群的情况, ϕ^k_μ 也可以是满足 (4.7) 的 x 的已给函数.

引理 3. 对规范场的源 J^k_μ, 成立恒等式

$$J^k_\mu \equiv g^{\nu\lambda}f^k_{\mu\nu\|\lambda} = P^k_\mu - S^k_{,\mu} - b^i_\mu S^j c^k_{ij} = P^k_\mu - S^k_{\|\mu}, \tag{4.8}$$

这里

$$P^k_\mu \equiv g^{\nu\lambda}(b^k_{\mu;\nu\lambda} + b^\varepsilon_k R^\varepsilon_{\nu\lambda\mu} + b^j_\lambda c^k_{ji}f^i_{\mu\nu} - b^i_{\mu;\lambda}b^j_\nu c^k_{ij}). \tag{4.9}$$

证. J^k_μ 的表达式为:

$$J^k_\mu = g^{\nu\lambda}[(b^k_{\mu;\nu\lambda} - b^k_{\nu;\mu\lambda}) - (b^i_{\mu;\lambda}b^j_\nu + b^i_\mu b^j_{\nu;\lambda} - b^i_\lambda f^j_{\mu\nu})c^k_{ij}], \tag{4.10}$$

利用协变微分交换次序的恒等式

$$b^k_{\nu;\mu\lambda} = b^k_{\nu;\lambda\mu} + b^k_\varepsilon R^\varepsilon_{\nu\mu\lambda}, \tag{4.11}$$

直接可得 (4.8) 式. 引理 3 证毕.

定理 1. 设补充条件 $S^k = 0$ 成立, 则场方程 (4.6) 就化为达兰贝尔型的场方程

$$P^k_\mu = \phi^k_\mu, \tag{4.12}$$

即

$$g^{\nu\lambda}(b^k_{\mu;\nu\lambda} + b^k_\varepsilon R^\varepsilon_{\nu\lambda\mu} - b^i_{\mu;\lambda}b^j_\nu c^k_{ij} + b^j_\lambda f^i_{\mu\nu}c^k_{ij}) = \phi^k_\mu. \tag{4.12'}$$

相反地,设 b^k_μ 为方程组 (4.12) 的一组解,而且在 $x^4 = 0$ 时有

$$S^k = g^{\lambda\nu}b^k_{\nu;\lambda} = 0, \quad S^k_{,4} = 0. \tag{4.13}$$

那末在 $x^4 \neq 0$ 时,补充条件 $S^k = 0$ 也满足,因而 $b^k_\mu(x)$ 也能满足场方程 (4.6).

证. 由引理 3 立即可见定理的上半部分成立.

现设 $b^k_\mu(x)$ 是 (4.12) 式的解,并且 (4.13) 式成立. 利用 b^k_μ 作 J^k_μ,由 (4.8) 式得

$$J^k_\mu = P^k_\mu - S^k_{\|\mu} = \phi^k_\mu - S^k_{\|\mu}, \tag{4.14}$$

根据恒等式 (1.16) 和 ϕ^k_μ 所满足的 (4.7) 式，我们有

$$g^{\mu\nu}S^k_{\|\mu\nu}=0, \tag{4.15}$$

即

$$g^{\mu\nu}S^k_{;\mu\nu}-2g^{\mu\nu}b^j_\mu c^k_{ij}S^i_{,\nu}+g^{\mu\nu}c^k_{ji}c^i_{lm}b^l_\mu b^j_\nu S^m=0.$$

这是关于 S^k 的齐次双曲型方程组，根据初始值问题解的唯一性定理[4]，在 (4.13) 式成立时，必然有 $S^k=0$，因而 b^k_μ 也能满足 (4.6) 式. 定理 1 证毕.

这样，求解场方程 (4.6) 的问题就化为求解方程组 (4.12) 的问题，而后者是一个拟线性双曲型方程组，只要初始条件有适当的光滑性，它的初始值问题在适当范围中必有解[4]1). 此外，这个方程组的特征锥面就是这个四维时空的光锥，因而得到

定理 2. 规范场方程的初始值问题在小范围内总是有解的，场扰动的波前是以光速传播的.

由于方程 (4.5) 和 (4.12) 一般并不是线性的，所以还只能保证小范围内解的存在性. 在可换群的情况，设 $\phi^k_\mu(x)$ 为已知函数，那末场方程 (4.12) 是线性的，初始值问题的解在大范围中也必然存在.

还要指出，如果用

$$P^k_\mu+A^k_{\mu l}S^l=\phi^k_\mu \tag{4.16}$$

来代替 (4.12) 式，这里 $A^k_{\mu l}$ 是 b^l_μ 的一阶微分表达式，那末前面的论述仍然有效. 因而，我们把方程 (4.12) 或 (4.16) 统称为达兰贝尔型的场方程. 只要他们初始条件满足 (4.13) 式，就可用来代替场方程 (4.6),

通过一定的计算还可以证明

定理 3. 从拉氏密度函数

$$L_1=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}G_{kj}(f^k_{\mu\nu}f^j_{\alpha\beta}+2b^k_{\nu;\mu}b^j_{\alpha;\beta}-2b^k_\varepsilon R^\varepsilon_{\alpha\mu\beta}b^j_\nu) \tag{4.17}$$

出发，通过变分，就得到达兰贝尔型的无源场方程

$$P^k_\mu-c^k_{lm}b^l_\mu S^m=0. \tag{4.18}$$

应当指出，这里的 L_1 和 (1.18) 式中的 L 相差后面二项. 又当 G 为 $SU(2)$，时空为平坦时，L_1 就化为资料[3]中相应的拉氏密度函数.

五、引力论中无源解的一种解释

在资料[1]中将规范场的理论用到引力场中去，得到引力场的无源方程

$$R_{\alpha\beta;\gamma}-R_{\alpha\gamma;\beta}=0\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4). \tag{5.1}$$

这里 $R_{\alpha\beta}$ 是李契张量. 这个方程和爱因斯坦引力理论中的真空引力场方程

$$R_{\alpha\beta}=0 \tag{5.2}$$

是不同的. 显然方程 (5.2) 的解就是方程 (5.1) 的解，但方程 (5.1) 的解未必是方程 (5.2) 的解. 为了弄清这两种引力理论的关系，需要在爱因斯坦引力论的体系中研究无源方程 (5.1) 的意义，本节就讨论这个问题.

先讨论一般情况. 爱因斯坦引力场方程[5]是

---

1) 这里我们假设外源的运动方程也有适当的可解性，使得它和 (4.12) 式联立后仍然可解. 事实上，外源运动方程往往是双曲型方程组，能够满足这里的要求.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^2} T_{\alpha\beta}, \tag{5.3}$$

或

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^2}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right), \tag{5.4}$$

式中 $T_{\alpha\beta}$ 是能量动量张量，$T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$.

将 (5.4) 式进行协变微分，代入 (5.1) 式得到

$$T_{\alpha\beta;\gamma} - T_{\alpha\gamma;\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T_{;\gamma} + \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} T_{;\beta} = 0. \tag{5.5}$$

把它和 $g_{\alpha\beta}$ 并缩，并利用能量动量张量的熟知性质 $T^{\beta}_{\gamma,\beta} = 0$，就得出

$$T_{;\gamma} = 0. \tag{5.6}$$

将其代回 (5.5) 式，就得到

定理 4. 如果爱因斯坦的引力场方程 (5.3) 成立，那末无源方程 (5.1) 和下面的方程

$$T_{\alpha\beta;\gamma} - T_{\alpha\gamma;\beta} = 0 \tag{5.7}$$

等价.

现讨论理想流体的情形，这时能量动量张量[5]是

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \frac{p}{c^2}(u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}), \tag{5.8}$$

式中 u_α 是四维速度向量(协变分量)，ρ 是密度，p 是压强，p 和 ρ 由状态方程

$$p = p(\rho) \tag{5.9}$$

相联系.

如果取随动坐标系，即选取坐标系统，使得粒子运动时它的代表空间位置的坐标 x^1, x^2, x^3 不发生变化，而时间坐标 x^4 选取为从某一瞬时开始计量的固有时，那么成立

$$u^\alpha = \delta^\alpha_4, \tag{5.10}$$

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{44} = 1 \tag{5.11}$$

和

$$g_{4\alpha} = u_\alpha. \tag{5.12}$$

因而

$$T_{\alpha\beta} = \rho g_{4\alpha} g_{4\beta} + \frac{p}{c^2}(g_{4\alpha} g_{4\beta} - g_{\alpha\beta}), \tag{5.13}$$

$$T = \rho - \frac{3p}{c^2}. \tag{5.14}$$

因为 $T_{,\gamma} = 0$，所以有

$$\rho - \frac{3p}{c^2} = \text{常数} \quad \text{或} \quad p(\rho) - \frac{1}{3}\rho c^2 = \text{常数}. \tag{5.15}$$

现假设状态方程不是

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 - A \quad (A = \text{常数}) \tag{5.16}$$

的形式. 显然这是一个很轻微的假定，因为 (5.16) 式只是状态方程的一个非常特殊的形式. 在这个假定下，由 (5.15) 式就得知 ρ 和 p 都是常数.

又由 (5.13) 式作协变微分，得到

$$T_{\alpha\beta;\gamma}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\left[g_{\alpha4,\gamma}g_{\beta4}+g_{\alpha4}g_{\beta4,\gamma}-g_{\sigma4}g_{\beta4}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\gamma\end{matrix}\right\}-g_{\alpha4}g_{\sigma4}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}\right],$$

从而

$$T_{\alpha\beta;\gamma}-T_{\alpha\gamma;\beta}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\left[\frac{1}{2}(g_{\alpha4,\gamma}-g_{\gamma4,\alpha}+g_{\alpha\gamma,4})g_{\beta4}+g_{\alpha4}g_{\beta4,\gamma}-(\beta|\gamma)\right]=0,$$

式中 $(\beta|\gamma)$ 表示前面诸项将 β 和 γ 对换所得到的项.

如果 $\rho\neq0$, 则 $\rho+\frac{p}{c^2}\neq0$, 因而

$$\frac{1}{2}g_{\beta4}(g_{\alpha4,\gamma}-g_{\gamma4,\alpha}+g_{\alpha\gamma,4})+g_{\alpha4}g_{\beta4,\gamma}-(\beta|\gamma)=0. \tag{5.17}$$

取 $\alpha=4$, 因 $g_{44}=1$, 就得到

$$g_{\beta4,\gamma}-g_{\gamma4,\beta}=0.$$

于是 (5.17) 式就化为:

$$g_{\beta4}g_{\alpha\gamma,4}-g_{\gamma4}g_{\alpha\beta,4}=0. \tag{5.18}$$

再令 $\alpha=\beta=4$, 就得到

$$g_{4\gamma,4}=0. \tag{5.19}$$

在 (5.18) 式中令 $\beta=4$, 利用 (5.19) 式就得到

$$g_{\alpha\gamma,4}=0. \tag{5.20}$$

这表示四维时空的度规不因时间而变化,也就是时空是稳态的. 由此得

定理 5. 在理想流体的情形,如果状态方程不具有形式(5.16)式,又无源方程(5.1)成立,那末流体的密度和压强都是常数,并且时空是稳态的.

如果在随动坐标的范围内,能选到适当的 x^4,使 $x^4=0$ 时, $g_{4\alpha}=0$ $(\alpha=1,2,3)$, 那末我们称流体在某一瞬时为静态的. 在这时粒子运动的世界线和类空超曲面 $x^4=0$ 垂直, 这意味着: 如果当地的洛仑兹标架的三个空间方向都切于超曲面 $x^4=0$, 那末粒子的初始速度等于 0. 成立下面的

定理 6. 如果流体在某一瞬时为静态, 又状态方程不具有形式 (5.16) 式,而且 $\rho\neq0$, 那末无源方程不可能满足.

证. 如果无源方程 (5.1) 成立,则由假设及 (5.20) 式得知 $g_{4\alpha}=0$ 恒成立. 这时

$$R_{44}=-\frac{1}{4}g^{\gamma\alpha}g^{\beta\delta}g_{\alpha4,\delta}g_{\beta4,\gamma}=0,$$

但另一方面,在 $\rho\neq0$ 的情况下

$$R_{44}=\frac{8\pi k}{c^2}\left(T_{44}-\frac{1}{2}T\right)=\frac{8\pi k}{c^2}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{3p}{2c^2}\right)>0,$$

这就发生矛盾. 所以这时无源方程无解. 定理 6 证毕.

六、引力场无源方程的球对称解

在本节中我们讨论无源方程

$$R_{\mu\alpha;\beta}=R_{\mu\beta;\alpha} \tag{6.1}$$

的静态球对称解.

如所知, 在球对称的条件下, 如果度规在无限远处为闵可夫斯基式的, 那末爱因斯坦方程

的解，就只能是施瓦茨西德解：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{6.2}$$

它依赖于一个参量 a.

在同样的边界条件下，方程 (6.1) 到底有哪些解，这是一个值得讨论的问题，在本节中我们证明，这个方程有两个参数的解析解.

在静态球对称时，度规为：

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{6.3}$$

代入方程 (6.1) 得 $\nu(r)$ 和 $\lambda(r)$ 的方程为：

$$\frac{\nu'''}{2} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} + \frac{\nu'\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2r} - \frac{\nu'\lambda'}{2r} - \frac{\nu'\lambda''}{4} + \frac{\nu'\lambda'^2}{4} - \frac{\nu'^2\lambda'}{4} - \frac{3\lambda'\nu''}{4} = 0, \tag{6.4}$$

$$\frac{\lambda''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} e^{\lambda} = 0, \tag{6.5}$$

式中记号 “′” 表示对 r 的导数.

作变换 $r = e^{\tau}$，用 “·” 表示关于 τ 的导数，我们得

$$\dddot{\nu} - \ddot{\nu} - 2\dot{\nu} + \dot{\nu}\ddot{\nu} + \dot{\lambda}\dot{\nu} - \frac{3}{2}\ddot{\nu}\dot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\nu}\ddot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\nu}^2\dot{\lambda} + \frac{1}{2}\dot{\nu}\dot{\lambda}^2 = 0, \tag{6.6}$$

$$\ddot{\lambda} - \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} + \frac{1}{2}\dot{\nu}^2 + 2 - 2e^{\lambda} = 0. \tag{6.7}$$

这是一组“常系数”的非线性常微分方程. 设

$$\dot{\nu} = \xi, \quad \ddot{\nu} = \eta, \quad \dot{\lambda} = \zeta, \tag{6.8}$$

它就化为一阶微分方程组

$$\dot{\nu} = \xi, \tag{6.9}$$

$$\dot{\xi} = \eta, \tag{6.10}$$

$$\dot{\eta} = \eta + \xi - \xi\eta - \frac{1}{2}\xi\zeta + \frac{3}{2}\eta\zeta + \frac{1}{4}\xi^2\zeta - \frac{1}{4}\xi^3 + \xi e^{\lambda}, \tag{6.11}$$

$$\dot{\lambda} = \zeta, \tag{6.12}$$

$$\dot{\zeta} = \zeta + \zeta^2 - \frac{1}{2}\xi\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 - 2 + 2e^{\lambda}. \tag{6.13}$$

把 $\dot{\nu}, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\lambda}, \dot{\zeta}$ 看成五维空间的一个向量场的分量，其积分曲线就对应方程 (6.1) 的球对称解. 很明显，向量场的积分曲线非常多，但物理上要求它们满足下述的边界条件：

$$\lim_{r\to\infty} \nu(r) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0. \tag{6.14}$$

这个边界条件的意义是，在无限远处，度规是闵可夫斯基式的.

上述向量场的奇点位于

$$\xi = \eta = \zeta = \lambda = 0. \tag{6.15}$$

因为方程 (6.9)—(6.13) 的右端是解析的，所以在确定奇点附近的积分曲线分布时，可先考察线性近似方程：

$$\begin{cases}\dot{\nu} = \xi, & (6.16)\\ \dot{\xi} = \eta, & (6.17)\\ \dot{\eta} = \eta + 2\xi, & (6.18)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\lambda} = \zeta, & (6.19)\\ \dot{\zeta} = \zeta + 2\lambda, & (6.20)\end{cases}$$

它分解为独立的两组. 方程 (6.19) 和 (6.20) 有两组解

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases}\lambda = ae^{-\tau} = \dfrac{a}{r},\\ \zeta = -ae^{-\tau} = -\dfrac{a}{r}.\end{cases} \tag{6.21}$$

从而 $\lambda = -\zeta$.

$$\text{(ii)}\qquad \begin{cases}\lambda = a_1e^{2\tau} = a_1r^2,\\ \zeta = 2a_1e^{2\tau} = 2a_1r^2.\end{cases} \tag{6.22}$$

从而 $\zeta = 2\lambda$.

在 λ-ζ 平面上, 这两组解所对应的积分曲线如图 1 所示. 因为解 (ii) 不符合边界条件 (6.14),所以舍去.对于解 (i), 由 (6.21) 式可见奇点 ($\lambda = \zeta = 0$) 对应于无穷远点 ($r \to \infty$).

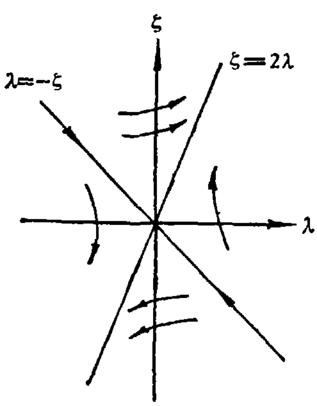

图 1

同样,方程组 (6.16)—(6.18) 满足边界条件的解是

$$\begin{cases}\xi = be^{-\tau} = \dfrac{b}{r},\\ \eta = -be^{-\tau} = -\dfrac{b}{r},\\ \nu = -be^{-\tau} = -\dfrac{b}{r}.\end{cases} \tag{6.23}$$

这样, 我们求得了场方程 (6.1) 经一次近似后满足边界条件的解:

$$\nu(r) = -\frac{b}{r}, \quad \lambda(r) = \frac{a}{r}, \tag{6.24}$$

这里系数 a 和 b 是两个独立的参量.

现在来证明方程组 (6.9)—(6.13) 本身确有解 $\lambda(\tau)$, $\nu(\tau)$, 它们的渐近行为是: 当 $\tau \to \infty$ 时,

$$\lambda(\tau) \sim ae^{-\tau}, \quad \nu(\tau) \sim -be^{-\tau}. \tag{6.25}$$

由于方程组 (6.9)—(6.13) 的线性近似方程组 (6.16)—(6.20) 的特征值为 0, 2, 2, −1, −1. 由李雅普诺夫定理 (见资料[6], 第 47 页)可知, 对应于同号特征值 −1, −1, 原来的非线性方程组必然有下述形式的级数解:

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum \lambda^{(m_1,m_2)}\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}e^{-(m_1+m_2)\tau},\\ \nu &= \sum \nu^{(m_1,m_2)}\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}e^{-(m_1+m_2)\tau},\end{aligned} \tag{6.26}$$

式中 α_1, α_2 是两个任意常数, m_1, m_2 取非负整数,不全为 0, $\lambda^{(m_1,m_2)}$ 和 $\nu^{(m_1,m_2)}$ 都和 α_1, α_2 无关. 对于任何 τ_0, 当 α_1, α_2 的绝对值不超过一定限度 (依赖于 τ_0) 时, 级数 (6.26) 在 $\tau \geqslant \tau_0$ 时是绝对收敛的. 因为方程组 (6.16)—(6.20) 的特征阵相似于对角阵, 它的基本解组都是形如 $ce^{\lambda\tau}$

型的，又 (6.9)—(6.13) 式的右边不显含 τ，因此用幂级数解法(见资料[6]，第 19 页公式 (5)) 可以验证，$\lambda^{(m_1,m_2)}$ 和 $\nu^{(m_1,m_2)}$ 都是和 τ 无关的常数．由 (6.26) 的绝对收敛性，可以归并 $e^{-m\tau}$ 的同类项，从而能保证方程组有关于 $e^{-\tau}$ 的幂级数解，这种解依赖于两个参数．再把 (6.26) 式代入(6.9)—(6.13) 式，比较系数就可以得到 $\lambda(\tau)$ 和 $\nu(\tau)$ 的展开式：

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &= ae^{-\tau} + \left[\frac{a^2}{2} + \frac{b(a-b)}{8}\right]e^{-2\tau} + \cdots,\\ \nu(\tau) &= -be^{-\tau} + \left[\frac{b^2}{2} - \frac{3b(a-b)}{8}\right]e^{-2\tau} + \cdots.\end{aligned} \tag{6.27}$$

这个幂级数是绝对收敛的 ($\tau \geqslant \tau_0$ 时)，而且

$$a = \lambda^{(1,0)}\alpha_1 + \lambda^{(0,1)}\alpha_2, \quad b = -(\nu^{(1,0)}\alpha_1 + \nu^{(0,1)}\alpha_2).$$

解 (6.27) 式确实满足条件 (6.25) 式．回到自变数 $r = e^\tau$ 就得到：

$$\begin{aligned}e^{\nu(r)} &= 1 - \frac{b}{r} - \frac{3b(a-b)}{8}\frac{1}{r^2} + \cdots,\\ e^{-\lambda(r)} &= 1 - \frac{a}{r} - \frac{b(a-b)}{8}\frac{1}{r^2} + \cdots.\end{aligned} \tag{6.28}$$

由解的形式展开可见到，这个幂级数解是由 a, b 两个参数所完全决定的．特别，当 $a = b$ 时，它们就化为施瓦茨西德解．因此得到

定理 5. 在球对称和静态的情况下，无源方程 (6.1) 有依赖于两个参数 a, b 的解析解，它们在无限远处趋近于闵可夫斯基度规，解析范围和 a, b 有关．特别当 a 和 b 相等时，它们化为施瓦茨西德解．

附带指出，对方程 (6.1) 直接实行线性近似，利用无限远处的边界条件，可以得到度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{6.29}$$

它也依赖于两个参数．

另外，在引力场理论中，有莱施纳-诺特洛姆度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{6.30}$$

在爱因斯坦理论中，带 Q 的项表示空间中有径向电场存在．由前面的分析知道，如果它再满足无源方程 (6.1)，它必定化为施瓦茨西德解 (因为 $a = b = 2m$)，因而 $Q = 0$，这表示电场化为 0．这一点也可以通过直接的计算予以验证．

参　考　资　料

[1] Yang, C. N., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 445.
[2] Wu, T. T. & Yang, C. N., Some Solutions of the Classical Isotropic Gauge Field Equations, in *Properties of Matter under Unusual Conditions* (ed. Fernbach & Mark), 349.
[3] Yang, C. N. & Mills, R. L., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 191.
[4] Leray, J., *Hyperbolic Differential Equations*, 1953, 230.
[5] Adler, R., Bazin, M. & Schiffer, M., *Introduction to General Relativity*, 1965.
[6] Ляпунов, А. М., *Собрание сочинений* II, 1956.