



关于权的非交换对称空间

献给刘培德教授 80 华诞

吐尔德别克

Department of Computing and Data Science, Astana IT University, Astana 010000, Kazakhstan

E-mail: bekjant@yahoo.com

收稿日期: 2022-11-28; 接受日期: 2023-04-30; 网络出版日期: 2023-06-02

哈萨克斯坦共和国科学和高等教育部 (批准号: AP14870431) 资助项目

摘要 本文定义一种关于一个给定权的非交换对称空间, 讨论该空间的性质, 并且证明在等距同构意义下该空间与权的选择无关. 进一步地, 本文也引入一种非交换对称 Hardy 空间, 研究此 Hardy 空间的基本性质, 并且给出此 Hardy 空间也在等距同构意义下与权的选择无关.

关键词 局部有限的正规的忠实的权 非交换对称空间 非交换对称 Hardy 空间 半有限 von Neumann 代数

MSC (2020) 主题分类 46L52, 47L05

1 引言

设 $\mathcal{N}$ 是一个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的半有限的 von Neumann 代数, 并且有一个半有限的正规的忠实的迹 ν 满足 $\nu(1) = a$ ($0 < a \leq \infty$), $\varphi(\cdot) = \nu(D_\varphi \cdot)$ 是 $\mathcal{N}$ 上的一个局部有限的正规的忠实的权 (其中 D_φ 是 φ 关于 ν 的 Radon-Nikodym 导数, 从而知道 D_φ 是局部可测的, 参见文献 [23]).

对于 $1 \leq p < \infty$ 和 $\alpha \in [0, 1]$, 定义

$$\mathfrak{N}_\alpha^{\frac{1}{p}} = \{x \in \mathcal{N} : D_\varphi^\alpha x D_\varphi^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(\mathcal{N})\}, \quad \|x\|_{p,\alpha} = \|D_\varphi^\alpha x D_\varphi^{\frac{1-\alpha}{p}}\|_p,$$

则 $(\mathfrak{N}_\alpha^{\frac{1}{p}}, \|\cdot\|_{p,\alpha})$ 是一个赋范空间, 并且其完备空间等距同构于 $L_p(\mathcal{N}, \nu)$ 对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$ 都成立 (参见文献 [22]).

Ayupov 等 [2] 推广这个结论到一个关于 N -函数情形下的 Orlicz 空间, 介绍了一类非交换 Orlicz 空间, 这类空间相关于半有限 von Neumann 代数 $\mathcal{N}$ 上的任意一个局部有限的正规的忠实的权. 他们说明这个 Orlicz 空间能被看成是附属于 $\mathcal{N}$ 的局部可测算子空间 $L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ 的线性子空间. 在文献 [1] 中, 这一类空间是关于态的非交换 Orlicz 空间推广而得到的. 文献 [5] 已经推广了文献 [2] 中的部分结论到弱的非交换 Orlicz 空间的情形下.

英文引用格式: Bekjan T N. Noncommutative symmetric spaces associated with the weight (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1789–1798, doi: 10.1360/SSM-2022-0226

本文的目标是在关于一个权的情形下定义非交换准对称空间和非交换准对称 Hardy 空间. 设 $0 < p < \infty$, 本文推广文献 [2] 中的结论到一个可分的 p -凸对称的准 Banach 函数空间 E 上.

本文余下内容结构如下. 第 2 节给出一些关于交换和非交换对称空间的必要的基础定义和概念. 第 3 节引入关于一个权的非交换准对称空间的定义并且讨论其基本性质. 第 4 节定义并讨论关于一个权的非交换准 Hardy 空间.

2 预备知识

2.1 对称的 Banach 函数空间

令

$$L_0(0, a) = \{f \mid f: (0, a) \rightarrow \mathbb{R} \text{ 是 } m\text{-可测的, 存在 } s > 0 \text{ 使得 } m(\{t \in (0, a) : |f(t)| > s\}) < \infty\},$$

其中 m 是一个区间 $(0, a)$ ($0 < a \leq \infty$) 上通常意义下的 Lebesgue 测度. 对于 $f \in L_0(0, a)$, 定义非增重排函数 $f^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ 如下:

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : m(\{v \in (0, a) : |f(v)| > s\}) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

设 E 是可测函数空间 $L_0(0, a)$ 中的一个准 Banach 子空间 (Banach 空间定义中的三角不等式带一个常数, 即存在常数 $K > 1$ 使得对于任意的 $x, y \in E$ 都有 $\|x + y\| \leq K\|x\| + \|y\|$), 简单地称它为 $(0, a)$ 上的准 Banach 函数空间. 如果对于任意的 $f \in E$ 和 $g \in L_0(0, a)$ 使得 $g^*(t) \leq f^*(t)$ (任意 $t \geq 0$) 可推导出 $g \in E$ 和 $\|g\|_E \leq \|f\|_E$, 则称 E 是对称的; 如果对于 E 中的任意非负单增的网 $(f_i)_{i \in I}$ 使得 $\sup_{i \in I} \|f_i\|_E < \infty$, 则在 E 中上确界 $f = \sup_{i \in I} f_i$ 是存在的, 并且有 $\|f_i\|_E \uparrow \|f\|_E$, 则称 E 具有 Fatou 性质; 如果对于 E 中任意的网 (f_i) 使得当 $f_i \downarrow 0$ 时都有 $\|f_i\|_E \downarrow 0$, 则称 E 的范数是序连续的.

令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的 Banach 函数空间. 定义 E 上的 Köthe 对偶空间如下:

$$E^\times = \left\{ f \in L_0(0, a) : \sup_{\|g\|_E \leq 1} \int_0^a |f(t)g(t)| dt < \infty \right\},$$

有范数 $\|f\|_{E^\times} = \sup_{\|g\|_E \leq 1} \int_0^a |f(t)g(t)| dt$. 若 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的 Banach 函数空间, 则 $E^\times$ 有 Fatou 性质.

设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的 Banach 函数空间, 则 E 存在序连续范数当且仅当它是可分的, 这也等价于条件 $E^* = E^\times$ (参见文献 [6, 第 1 章, 推论 4.3 和 5.6]). 进一步地, 如果 E 是一个可分对称的 Banach 函数空间, 则 E 有 Fatou 性质.

令 E 是一个对称的准 Banach 函数空间. 对于 $0 < p < \infty$, 对称的准 Banach 函数空间 $E^{(p)}$ 定义为

$$E^{(p)} = \{f : |f|^p \in E\},$$

配备一个准范数

$$\|f\|_{E^{(p)}} = \| |f|^p \|_E^{\frac{1}{p}}$$

(参见文献 [12, 命题 3.1] 或者 [19, 24]).

对于任意的 $0 < \theta < \infty$, $L_0(0, a)$ 上的伸缩算子 D_θ 定义为

$$(D_\theta f)(\tau) = \begin{cases} f\left(\frac{\tau}{\theta}\right), & \text{若 } \frac{\tau}{\theta} < a, \\ 0, & \text{若 } \frac{\tau}{\theta} \geq a, \end{cases}$$

其中 $\tau \in (0, a)$. 对于 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间 E , 如果 $f \in E$, 则 $D_\theta f \in E$ 且存在一个常数 $K(\theta)$ 使得 $\|D_\theta f\|_E \leq K(\theta)\|f\|_E$ 对于任意的 $f \in E$ 都成立 (参见文献 [8, 引理 2.2]). 如果 E 是一个 Banach 函数空间, 则这个常数 $K(\theta)$ 能被取成 $\max\{1, \theta\}$ (参见文献 [14]). 定义 E 上的下 Boyd 指标 p_E 和上 Boyd 指标 q_E 分别为

$$p_E = \sup_{\theta > 1} \frac{\log \theta}{\log \|D_\theta\|_E} \quad \text{和} \quad q_E = \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\log \theta}{\log \|D_\theta\|_E}.$$

注意到 $0 < p_E \leq q_E \leq \infty$ (参见文献 [8, 引理 2.2]), 如果 E 是一个对称的 Banach 函数空间, 则 $1 \leq p_E \leq q_E \leq \infty$ (参见文献 [15, 命题 2.b.2]).

令 $0 < p, q \leq \infty$. 设 E 是一个对称的准 Banach 函数空间, 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得对于 E 中的任意有限序列 $(f_n)_{n \geq 1}$, 当 $0 < p < \infty$ (分别地, $0 < q < \infty$) 时, 都有

$$\left\| \left(\sum_{n \geq 1} |f_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E \leq C \left(\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{分别地, } \left(\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_E^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left\| \left(\sum_{n \geq 1} |f_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_E \right),$$

或者当 $p = \infty$ (分别地, $q = \infty$) 时, 都有

$$\left\| \max_n |f_n| \right\|_E \leq C \max_n \|f_n\|_E \quad \left(\text{分别地, } \max_n \|f_n\|_E \leq C \left\| \max_n |f_n| \right\|_E \right),$$

则称 E 是 p -凸的 (分别地, q -凹). 注意到, 若 E 是 p -凸的, 则 $p_E \geq p$; 若 E 是 q -凹的, 则 $q_E \leq q$. 如果对于某些 $q < \infty$, E 是一个 q -凹的对称的准 Banach 函数空间, 则 E 是一个序连续的准范数空间 (参见文献 [9, 第 5 页]).

令 E_i ($i = 1, 2$) 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 空间. 定义乘积空间 $E_1 \odot E_2$ 如下:

$$E_1 \odot E_2 = \{f : f = f_1 f_2, f_i \in E_i, i = 1, 2\}, \quad (2.1)$$

其上的一个泛函 $\|f\|_{E_1 \odot E_2}$ 定义为

$$\|f\|_{E_1 \odot E_2} = \inf \{ \|f_1\|_{E_1} \|f_2\|_{E_2} : f = f_1 f_2, f_i \in E_i, i = 1, 2 \}.$$

根据文献 [4, 推论 1], 得到一个等价的准范数 $\|\cdot\|$, 因此 $(E_1 \odot E_2, \|\cdot\|)$ 是一个 $(0, a)$ 上的对称的准 Banach 函数空间. 利用 [4, 命题 2 和定理 1], 可知

$$E = E^{(\frac{1}{\alpha})} \odot E^{(\frac{1}{1-\alpha})}, \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

和

$$A\|f\|_E \leq \|f\|_{E^{(\frac{1}{\alpha})} \odot E^{(\frac{1}{1-\alpha})}} \leq B\|f\|_E, \quad \forall f \in E, \quad (2.2)$$

其中 A 和 B 是正的常数.

设 $t \mapsto \varpi(t)$ 是从 $(0, a)$ 到它自身的一个映射. 如果对于任意给定的可测集 $e \subset (0, a)$, 都有 $m(\varpi^{-1}(e)) \leq m(e)$, 则称 ϖ 是从 $(0, a)$ 到它自身的一个非增的可测映射. 令

$$M_{(0,a)} = \{\varpi : \varpi \text{ 是一个从 } (0, a) \text{ 到它自身的非增的可测映射}\}.$$

下面引入一个被广泛知晓的基本引理. 为了保证完整性, 给出了一个简单的证明.

引理 2.1 设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间. 设存在一个范数 $\|\cdot\|_l$ 使得 $(E, \|\cdot\|_l)$ 成为一个 Banach 格, 并且满足

$$A\|f\|_E \leq \|f\|_l \leq B\|f\|_E, \quad \forall f \in E,$$

其中 A 和 B 是正的常数. 则 E 能被重新赋予一个等价范数, 在此新的范数下 E 成为一个对称的 Banach 函数空间.

证明 给定 $f \in E$. 对于 $\varpi \in M_{(0,a)}$, 令 $f_\varpi(t) = f(\varpi(t))$ ($t \in (0, a)$). 则 $f_\varpi^*(t) \leq f^*(t)$ 对于任意的 $t \geq 0$ 成立. 因此, $f_\varpi \in E$ 且

$$\|f_\varpi\|_l \leq B\|f_\varpi\|_E \leq B\|f\|_E.$$

定义

$$\|f\|_s = \sup\{\|f_\varpi\|_l : \varpi \in M_{(0,a)}\},$$

则 $\|\cdot\|_s$ 是一个 E 上的范数, 而且有如下控制关系:

$$A\|f\|_E \leq \|f\|_s \leq B\|f\|_E, \quad \forall f \in E. \quad (2.3)$$

因为 $(E, \|\cdot\|_l)$ 是一个 Banach 格, 所以可得如下结论: 如果 $g \in E$, $f \in L_0(0, a)$ 和 $|f(t)| \leq |g(t)|$ 是 m -几乎处处在 $(0, a)$ 中成立的, 则有 $f \in E$. 容易知道 $\|f\|_s \leq \|g\|_s$. 根据两个非增可测映射的复合仍然是非增可测映射的事实, 我们得到, 若 $f \in E$ 和 $\varpi \in M_{(0,a)}$, 则 $f_\varpi \in E$ 和 $\|f_\varpi\|_s \leq \|f\|_s$. 因此, 由文献 [14, 引理 2.4.3], 可以推导出 $(E, \|\cdot\|_s)$ 是一个对称的 Banach 函数空间. $\square$

若对某个 $0 < s < \infty$, E 是 s -凸的, 则 $E^{(\frac{1}{s})}$ 是 1-凸的, 所以此空间可以重新赋范成为一个 Banach 格 (参见文献 [15, 命题 1.d.8] 和 [24, 第 544 页]). 根据引理 2.1 可得, E 可重新赋范成为一个对称的 Banach 函数空间. 关于对称的 (准) Banach 函数空间的更多细节可参见文献 [6, 12, 14, 15].

2.2 非交换对称空间

记 $L_0(\mathcal{N})$ 为所有的 ν -可测算子构成的集合. 在可测算子集 $L_0(\mathcal{N})$ 上, 通过利用可测算子求和 (分别地, 乘积) 的闭包来定义求和运算 (分别地, 乘积运算), 则 $L_0(\mathcal{N})$ 成为一个 $*$ -代数.

若 $x \in L_0(\mathcal{N})$, 则 x 有唯一的极分解 $x = u|x|$, 其中 $u \in \mathcal{N}$ 是一个部分等距满足 $u^*u = (\ker x)^\perp$ 且 $uu^* = \overline{\operatorname{im} x}$ ($\operatorname{im} x = x(D(x))$), 其中 $D(x)$ 是 x 的定义域. 称 $r(x) = (\ker x)^\perp$ 和 $\ell(x) = \overline{\operatorname{im} x}$ 分别为 x 的右支撑和左支撑. 若 x 是自伴算子, 令 $s(x) = r(x)$, 称其为 x 的支撑.

令 $\mathcal{N}^+ = \{x \in \mathcal{N} : x \geq 0\}$, $\mathcal{S}^+ = \{x \in \mathcal{N}^+ : \tau(s(x)) < \infty\}$, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}^+$ 的线性包. $\mathcal{S}$ 中的元素被称为 τ -有限投影支撑的.

令 $x \in L_0(\mathcal{N})$. 对于 $t > 0$, 定义

$$\lambda_t(x) = \nu(e_{(t,\infty)}(|x|)),$$

其中 $e_{(t,\infty)}(|x|)$ 是对应于 (t, ∞) 的 $|x|$ 的谱投影算子,

$$\mu_t(x) = \inf\{s > 0 : \lambda_s(x) \leq t\}.$$

函数 $t \mapsto \lambda_t(x)$ 和 $t \mapsto \mu_t(x)$ 分别称作 x 的分布函数和广义奇异值, 简记为 $\lambda(x)$ 和 $\mu(x)$. 容易知道 $\mu_t(x) = 0$ 对于任意的 $t \geq \nu(1)$ 都成立.

关于可测算子广义奇异值的更多信息可参见文献 [13].

令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的 (准) Banach 函数空间. 定义

$$E(\mathcal{N}) = \{x \in L_0(\mathcal{N}) : \mu(x) \in E\},$$

$$\|x\|_E = \|\mu(x)\|_E, \quad x \in E(\mathcal{N}).$$

则 $(E(\mathcal{N}), \|\cdot\|_E)$ 是一个 (准) Banach 空间, 称 $(E(\mathcal{N}), \|\cdot\|_E)$ 是一个非交换对称的 Banach 空间 (参见文献 [7, 10, 21, 24]).

2.3 非交换 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{A})$

令 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个 von Neumann 子代数使得 τ 限制到 $\mathcal{D}$ 上始终是半有限的, 令 $\mathcal{E}$ 是 (唯一的) 正规的忠实的从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{D}$ 的条件期望, 并且是 τ -不变的.

定义 2.1 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个弱 $*$ - 闭的子代数. 如果

- (i) $\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{M}$ 中弱 $*$ - 稠密, 其中 $J(\mathcal{A}) = \{x^* : x \in \mathcal{A}\}$;
- (ii) $\mathcal{E}(xy) = \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$;
- (iii) $\mathcal{A} \cap J(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$,

则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{N}$ 在条件期望 $\mathcal{E}$ (或 $\mathcal{D}$) 下的次对角代数, 其中称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{A}$ 的对角代数.

对于 $0 < p \leq \infty$, 定义关于 $\mathcal{A}$ 的非交换 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A} \cap L_p(\mathcal{M})$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中的闭包. 当 $\mathcal{M}$ 有限时, 非交换 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中的闭包. 关于非交换 Hardy 空间 $H_p(\mathcal{A})$ 的更多细节可参见文献 [3, 16].

3 关于一个权的非交换对称空间

记 $L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ 是附属于 $\mathcal{N}$ 的所有局部可测算子的全体. 众所周知, $L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ 在强和与强积下是一个 $*$ - 代数, 并且 $L_0(\mathcal{N})$ 是 $L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ $*$ - 子代数 (参见文献 [17, 18]). 设

$$L_{\text{loc}}(\mathcal{N})^+ = \{x \in L_{\text{loc}}(\mathcal{N}) : x \geq 0\}.$$

令

$$\tilde{\nu}(x) = \sup\{\nu(y) : y \in \mathcal{N}^+, y \leq x\}, \quad x \in L_{\text{loc}}(\mathcal{N})^+.$$

则 $\tilde{\nu}$ 是 ν 延拓到 $L_{\text{loc}}(\mathcal{N})^+$ 的新记号 (参见文献 [18, 第 4.1 小节]). 为了方便仍然记为 ν . 另外, 若 $x \in L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ 和 $x = u|x|$ 是它的极分解, 则 $u \in \mathcal{N}$, $|x| \in L_{\text{loc}}(\mathcal{N})$ 且 $|x|$ 的谱投影 $e_{(t,\infty)}(|x|)$ 属于 $\mathcal{N}$.

定义 3.1 (i) 一个 $\mathcal{N}$ 上的权 $\omega : \mathcal{N}^+ \rightarrow [0, \infty]$ 是一个映射, 满足

$$\omega(x + \lambda y) = \omega(x) + \lambda \omega(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{N}^+, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

其中 $0 \cdot \infty = 0$.

(ii) 设 ω 是一个权. 如果 $\sup_i \omega(x_i) = \omega(\sup_i x_i)$ 对于任意的 $\mathcal{N}^+$ 中的有界网 (x_i) 都成立, 则称 ω 是正规的; 如果 $\omega(x) = 0$ 可推导出 $x = 0$, 则称 ω 是忠实的; 如果锥

$$\mathcal{N}_\omega^+ = \{x \in \mathcal{N}^+ : \omega(x) < \infty\}$$

的线性包 $\mathcal{N}_\omega$ 在 $\mathcal{N}$ 中关于极弱 (弱 $*$ -) 拓扑稠密, 则称 ω 是半有限的; 如果对于任意 $x \in \mathcal{M}_+$ ($x \neq 0$), 存在 $y \in \mathcal{M}_+ : y \leq x$, 使得

$$0 < \omega(y) < \infty,$$

则称 ω 是局部有限的.

设 ω 是 $\mathcal{N}$ 上的一个半有限的正规的忠实的权. 则 ω 有一个 Radon-Nikodym 导数 D_ω 关于 ν 使得 $\omega(\cdot) = \nu(D_\omega \cdot)$ (参见文献 [20]). 权 ω 是局部有限的当且仅当算子 D_ω 是局部可测的 (参见文献 [23]). 接下来, 除非特别声明, 总是记 ω 为 $\mathcal{N}$ 上的一个局部有限的正规的忠实的权. 局部有限的正规的权都是半有限的 (参见文献 [23, 引理 1]).

令 $\alpha \in [0, 1]$. 设

$$\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega} = \{D_\omega^\alpha x D_\omega^{1-\alpha} : x \in \mathcal{N}, D_\omega^\alpha x D_\omega^{1-\alpha} \in E(\mathcal{N})\}.$$

定义 3.2 令 ω 是 $\mathcal{N}$ 上的一个局部有限的正规的忠实的权, $\alpha \in [0, 1]$. 称 $(\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}, \|\cdot\|_E)$ 的完备集是非交换对称空间, 记为 $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{N}, \nu)$.

由文献 [2, 定理 4] 中的方法, 得到如下结果.

引理 3.1 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则 $\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 在 $E(\mathcal{N})$ 中稠密对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$ 都成立.

证明 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $e_n = e_{(\frac{1}{n}, n]}(D_\omega)$, 则 e_n 强算子拓扑收敛于 1. 令 $x \in \mathcal{S}$, 则 $x \in E(\mathcal{N})$. 根据文献 [4, 引理 3], 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n x e_n - x\|_E = 0$. 根据事实, 可得 $\bigcup_{n=1}^\infty e_n \mathcal{S} e_n$ 在 $E(\mathcal{N})$ 中的闭包包含 $\mathcal{S}$. 又因为 $\mathcal{S}$ 在 $E(\mathcal{N})$ 中稠密 (参见文献 [24, 引理 4.5]), 所以 $\bigcup_{n=1}^\infty e_n \mathcal{S} e_n$ 在 $E(\mathcal{N})$ 中稠密.

因为 $e_n D_\omega^{-\alpha}, D_\omega^{\alpha-1} e_n \in \mathcal{N}$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 因此, 对于任意的 $x \in \mathcal{S}$ 都有

$$D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1} \in \mathcal{S}.$$

一方面,

$$e_n x e_n = D_\omega^\alpha D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1} D_\omega^{1-\alpha} = D_\omega^\alpha (D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1}) D_\omega^{1-\alpha};$$

另一方面 $e_n x e_n \in \mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 和 $\bigcup_{n=1}^\infty e_n \mathcal{S} e_n \subset \mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$. 因此, 引理成立. $\square$

定理 3.1 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{N}, \nu)$ 和 $E(\mathcal{N})$ 是等距同构的.

证明 定义 $I : \mathcal{N}_E^{\alpha, \omega} \rightarrow \mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 如下:

$$I(x) = x, \quad x \in \mathcal{N}_E^{\alpha, \omega},$$

则 I 是从 $\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 到 $\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 的一个线性等距. 根据 $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{N}, \nu)$ 的定义和引理 3.1, 可知 $\mathcal{N}_E^{\alpha, \omega}$ 在 $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{N}, \nu)$ 和 $E(\mathcal{N})$ 中都稠密. 因此, 可以延拓成为一个 $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{N}, \nu)$ 和 $E(\mathcal{N})$ 之间的等距映射. $\square$

令 τ 是 $\mathcal{N}$ 上的另外一个半有限的正规的忠实的迹. 则 τ 是一个局部有限的权 (参见文献 [23, 引理 2]).

类似于文献 [2, 推论 2 和定理 5], 有如下推论.

推论 3.1 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, τ 是 $\mathcal{N}$ 上的一个半有限的正规的忠实的迹, 则 $E(\mathcal{N}, \tau)$ 和 $E(\mathcal{N}, \nu)$ 是等距同构的.

推论 3.2 设 τ 和 ν 是 $\mathcal{N}$ 上的正规的忠实的迹, ω_1 和 ω_2 是 $\mathcal{N}$ 上的局部有限的正规的忠实的权. 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $E^{\alpha, \omega_1}(\mathcal{N}, \nu)$ 和 $E^{\beta, \omega_2}(\mathcal{N}, \tau)$ 是等距同构的.

对于 $0 < p < 1$ 和 $\alpha \in [0, 1]$, 定义

$$\mathcal{N}_\alpha^{\frac{1}{p}} = \{x \in \mathcal{N} : D_\omega^\alpha x D_\omega^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(\mathcal{N})\},$$

$$\|x\|_{p, \alpha} = \|D_\omega^\alpha x D_\omega^{\frac{1-\alpha}{p}}\|_p.$$

利用上面的方法同样可得如下结论.

命题 3.1 对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $(\mathcal{N}_\alpha^{\frac{1}{p}}, \|\cdot\|_{p, \alpha})$ 是一个准范数空间并且它的完备空间等距同构于 $L_p(\mathcal{N}, \nu)$.

如果 ω 是一个由可测稠定算子 D_ω 给出的态:

$$\omega(x) = \nu(D_\omega x) \quad \text{对于任意的 } x \in \mathcal{N},$$

则 $D_\omega > 0$ 是 $L_0(\mathcal{N})$ 中的稠定算子.

设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的, 则 $F = E^{(\frac{1}{p})}$ 能被赋予一个等价范数 $\|\cdot\|$ 使得 $(F, \|\cdot\|)$ 成为 $(0, \alpha)$ 上的一个可分的对称的 Banach 空间. 因此, F 具备 Fatou 性质. 由文献 [11, 命题 5.5] 知, 存在 $D_F \in F(\mathcal{N})$ 和 $D_{F^\times} \in F^\times(\mathcal{N})$ 使得

$$D_\omega = D_F D_{F^\times} = D_{F^\times} D_F, \quad \|D_\omega\|_1 = \|D_F\|_F \|D_{F^\times}\|_{F^\times}. \quad (3.1)$$

设 $D_E = (D_F)^p$, 则 $D_E \in E(\mathcal{N})$. 利用 (2.2) 和文献 [4, 命题 5] 可知, 对于任意的 $0 < \alpha < 1$, $E(\mathcal{N}) = E^{(\frac{1}{\alpha})}(\mathcal{N}) \odot E^{(\frac{1}{1-\alpha})}(\mathcal{N})$ 且存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|xy\|_E \leq C \|x\|_{E^{(\frac{1}{\alpha})}} \|y\|_{E^{(\frac{1}{1-\alpha})}}, \quad \forall x \in E^{(\frac{1}{\alpha})}(\mathcal{N}), \quad \forall y \in E^{(\frac{1}{1-\alpha})}(\mathcal{N}).$$

因此对于任意的 $x \in \mathcal{N}$ 都有

$$\|D_E^\alpha x D_E^{1-\alpha}\|_E \leq C \|D_E^\alpha x\|_{E^{(\frac{1}{\alpha})}} \|D_E^{1-\alpha}\|_{E^{(\frac{1}{1-\alpha})}} \leq C \|x\| \|D_E\|_E < \infty.$$

从而

$$D_E^\alpha \mathcal{N} D_E^{1-\alpha} \subset E(\mathcal{N}). \quad (3.2)$$

在 $\alpha = 0, 1$ 的情形下, 包含关系 (3.2) 仍成立.

类似于引理 3.1 和定理 3.1, 可以有如下引理.

引理 3.2 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $D_E^\alpha \mathcal{N} D_E^{1-\alpha}$ 在 $E(\mathcal{N})$ 中稠密.

定理 3.2 令 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $(D_E^\alpha \mathcal{N} D_E^{1-\alpha}, \|\cdot\|_E)$ 的完备空间与 $E(\mathcal{N})$ 是等距同构的.

注 3.1 根据定理 3.1 中的证明, 立即可知在定理 3.2 的条件下, $(D_E^\alpha \mathcal{N} D_E^{1-\alpha}, \|\cdot\|_E)$ 是独立于等距同构意义下 (3.1) 的因子分解.

4 关于一个权的非交换对称的 Hardy 空间

类似于 $E = L_p(0, a)$ ($0 < p \leq \infty$) 的情形, 定义对称的准 Hardy 空间如下:

定义 4.1 设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{N}$ 的半有限的次对角代数. 称

$$E(\mathcal{A}) = [\mathcal{A} \cap E(\mathcal{N})]_E \quad (\mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}) \text{ 在 } E(\mathcal{N}) \text{ 中的闭包})$$

是关于 $\mathcal{A}$ 的一个对称的准 Hardy 空间.

设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间, 对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的并且 E 有序连续的范数. 如果 $0 < p_0 < p_E \leq q_E < p_1 < \infty$, 则根据文献 [4, 引理 4] 可得

$$E(\mathcal{A}) = (H_{p_0}(\mathcal{A}) + H_{p_1}(\mathcal{A})) \cap E(\mathcal{N}). \quad (4.1)$$

接下来, 除非特别说明, 记 ω 是 $\mathcal{D}$ 上的一个局部有限的正规的忠实的权. 设 $\alpha \in [0, 1]$. 令

$$\mathcal{A}_E^{\alpha, \omega} = \{D_\omega^\alpha x D_\omega^{1-\alpha} : x \in \mathcal{A}, D_\omega^\alpha x D_\omega^{1-\alpha} \in E(\mathcal{A})\}.$$

定义 4.2 设 $\alpha \in [0, 1]$, ω 是 $\mathcal{D}$ 上的一个局部有限的正规的忠实的权. 称 $(\mathcal{A}_E^{\alpha, \omega}, \|\cdot\|_E)$ 的完备空间是关于 E 、 $\mathcal{A}$ 和 ω 的非交换对称的 Hardy 空间, 记为 $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{A}, \nu)$.

参考引理 3.1 中的方法, 有如下结论.

引理 4.1 设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $\mathcal{A}_E^{\alpha, \omega}$ 在 $E(\mathcal{A})$ 中稠密.

证明 设 $e_n = e_{(\frac{1}{n}, n]}(D_\omega)$ ($n \in \mathbb{N}$), 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, e_n 强算子拓扑收敛于 1. 令 $x \in \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N})$. 利用文献 [4, 引理 3], 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n x e_n - x\|_E = 0$. 因此, $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}) e_n$ 的闭包包含 $\mathcal{A} \cap E(\mathcal{N})$. 显然, $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}) e_n$ 包含于 $E(\mathcal{A})$, 于是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}) e_n$ 在 $E(\mathcal{A})$ 中稠密.

一方面, 对于 $n \in \mathbb{N}$, 有 $e_n D_\omega^{-\alpha}, D_\omega^{\alpha-1} e_n \in \mathcal{A}$. 设 $x \in \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N})$. 从而有

$$D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1} \in \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} e_n x e_n &= D_\omega^\alpha D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1} D_\omega^{1-\alpha} = D_\omega^\alpha (D_\omega^{-\alpha} e_n x e_n D_\omega^{\alpha-1}) D_\omega^{1-\alpha}, \\ e_n x e_n &\in \mathcal{A}_E^{\alpha, \omega}, \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{A} \cap E(\mathcal{N}) e_n &\subset \mathcal{A}_E^{\alpha, \omega}, \end{aligned}$$

所以可得到结论成立. □

定理 3.1 的整个证明过程在非交换对称的 Hardy 空间中也是有效的, 因此有如下定理:

定理 4.1 设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的. 若 E 是可分的且 $q_E < \infty$, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $E^{\alpha, \omega}(\mathcal{A}, \nu)$ 和 $E(\mathcal{A})$ 是等距同构的.

对于 $0 < p < \infty$ 和 $\alpha \in [0, 1]$, 定义

$$\mathcal{A}_\alpha^{\frac{1}{p}} = \{x \in \mathcal{A} : D_\omega^\alpha x D_\omega^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(\mathcal{A})\},$$

$$\|x\|_{p, \alpha} = \|D_\omega^\alpha x D_\omega^{\frac{1-\alpha}{p}}\|_p.$$

类似地, 有如下命题:

命题 4.1 $(\mathcal{A}_\alpha^{\frac{1}{p}}, \|\cdot\|_{p, \alpha})$ 是一个准范数空间, 并且它的完备空间等距同构于 $H_p(\mathcal{A})$.

设 ω 是一个由可测稠定算子 D_ω 给出的态, 具体如下:

$$\omega(x) = \nu(D_\omega x), \quad \text{对于任意的 } x \in \mathcal{D},$$

其中 $D_\omega > 0$ 是 $L_0(\mathcal{D})$ 中的稠定算子. 设 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间、对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的并且 E 是可分的. 若 $F = E^{(\frac{1}{p})}$ 和 $D_F \in F(\mathcal{D})$ 如同 (3.1), $D_E = (D_F)^p$, 则类似于定理 3.2, 有如下定理.

定理 4.2 若 E 是 $(0, a)$ 上的一个对称的准 Banach 函数空间并且对某个 $0 < p < \infty$ 是 p -凸的, 则对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, $(D_E^\alpha \mathcal{A} D_E^{1-\alpha}, \|\cdot\|_E)$ 的完备化空间和 $E(\mathcal{A})$ 是等距同构.

致谢 非常感谢审稿人的建议.

参考文献

- 1 Al-Rashed M H A, Zegarliński B. Noncommutative Orlicz spaces associated to a state. *Studia Math*, 2007, 180: 199–209
- 2 Ayupov Sh A, Chilin V I, Abdullaev R Z. Orlicz spaces associated with a semi-finite von Neumann algebra. *Comment Math Univ Carolin*, 2012, 53: 519–533
- 3 Bekjan T N. Noncommutative Hardy space associated with semi-finite subdiagonal algebras. *J Math Anal Appl*, 2015, 429: 1347–1369
- 4 Bekjan T N, Ospanov M N. On products of noncommutative symmetric quasi Banach spaces and applications. *Positivity*, 2021, 25: 121–148
- 5 Bekjan T N, Raikhan M. On noncommutative weak Orlicz-Hardy spaces. *Ann Funct Anal*, 2022, 13: 7
- 6 Bennett C, Sharpley R. *Interpolation of Operators*. Boston: Academic Press, 1988
- 7 de Pagter B. Non-commutative Banach function spaces. In: Boulabiar K, Buskes G, Triki A, eds. *Positivity. Trends in Mathematics*. Basel: Birkhäuser, 2007, 197–227
- 8 Dirksen S. Noncommutative Boyd interpolation theorems. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 4079–4110
- 9 Dirksen S, de Pagter B, Potapov D, et al. Rosenthal inequalities in noncommutative symmetric spaces. *J Funct Anal*, 2011, 261: 2890–2925
- 10 Dodds P G, Dodds T K Y, de Pagter B. Non-commutative Banach function spaces. *Math Z*, 1989, 201: 583–597
- 11 Dodds P G, Dodds T K, de Pagter B. Fully symmetric operator spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 1992, 15: 942–972
- 12 Dodds P G, Dodds T K, Sukochev F A. On p -convexity and q -concavity in non-commutative symmetric spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 2014, 78: 91–114
- 13 Fack T, Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators. *Pacific J Math*, 1986, 123: 269–300
- 14 Krein S G, Petunin J I, Semenov E M. *Interpolation of Linear Operators*. Translations of Mathematical Monographs. Providence: Amer Math Soc, 1982
- 15 Lindenstrauss J, Tzafriri L. *Classical Banach Space II*. Berlin: Springer-Verlag, 1979
- 16 Marsalli M, West G. Noncommutative H^p -spaces. *J Operator Theory*, 1997, 40: 339–355
- 17 Muratov M A, Chilin V I. $*$ -algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra. *J Math Sci (NY)*, 2007, 140: 445–451

- 18 Muratov M A, Chilin V I. Algebras of Measurable Operators and Locally Measurable Operators. Kyev: Ukrainian Academy of Sciences, 2007
- 19 Okada S, Ricker W J, Sánchez Pérez E A. Optimal Domain and Integral Extension of Operators Acting in Function Spaces. Operator Theory Advances and Applications, vol. 180. Basel: Birkhäuser, 2008
- 20 Pedersen G K, Takesaki M. The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta Math, 1973, 130: 53–87
- 21 Sukochev F. Completeness of quasi-normed symmetric operator spaces. Indag Math NS, 2014, 25: 376–388
- 22 Trunov N V. L_p -spaces associated with a weight on a semifinite von Neumann algebra. In: Constructive Theory of Functions and Functional Analysis, No. 3. Kazan: Kazan Gos Univ, 1981, 88–93
- 23 Trunov N V. To the theory normal weights on von Neumann algebras. Izv Vuzov Math, 1982, 8: 61–70
- 24 Xu Q. Analytic functions with values in lattices and symmetric spaces of measurable operators. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1991, 109: 541–563

Noncommutative symmetric spaces associated with the weight

Turdebek N. Bekjan

Abstract We define noncommutative symmetric spaces associated with the weight and study their properties, and prove that those spaces are independent of the choice of the weight up to isometric isomorphisms. We also introduce noncommutative symmetric Hardy spaces and give their properties, and show that those Hardy spaces are independent of the choice of the weight up to isometric isomorphisms.

Keywords faithful normal locally finite weight, noncommutative symmetric space, noncommutative symmetric Hardy space, semifinite von Neumann algebra

MSC(2020) 46L52, 47L05

doi: 10.1360/SSM-2022-0226