中国科学: 数学　2021 年　第 卷　第 ? 期: 1～17
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
论　文

# 随机时滞 Schrödinger 格系统的不变测度

陈章[1], 王碧祥[2], 杨莉[1]*

1. 山东大学数学学院, 济南 250100;
2. Department of Mathematics, New Mexico Institute of Mixing and Technology, Socorro, NM 87801, USA
E-mail: zchen@sdu.edu.cn, bwang@nmt.edu, shirlyya0812@163.com

收稿日期: 2021-01-13; 接受日期: 2021-07-30; 网络出版日期: 2021-XX-XX; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11471190, 11971260) 资助项目

**摘要**　本文研究随机时滞 Schrödinger 格系统, 其漂移和扩散系数是局部 Lipschitz 连续的. 首先, 建立了一些解的一致估计, 包括高阶矩估计和一致尾端估计. 其次, 运用 Ascoli-Arzel$\grave{a}$ 定理和二分法技巧证明了解的概率分布族在空间 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的胎紧性. 最后, 利用 Krylov-Bogolyubov 方法证明了系统 Markov 半群不变测度的存在性.

**关键词**　不变测度　随机离散 Schrödinger 方程　非线性噪声　时滞　尾端估计

**MSC (2020) 主题分类**　34K50, 37L40, 37L55, 60H10

## 1　引言

本文研究如下随机时滞 Schrödinger 格系统的不变测度的存在性:

$$\begin{cases} du_n(t) - i(u_{n-1}(t) - 2u_n(t) + u_{n+1}(t))dt + \lambda u_n(t)dt + i|u_n(t)|^2 u_n(t)dt \\ \quad = f_n(u_n(t-\rho))dt + g_n dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(h_{j,n} + \sigma_{j,n}(u_n(t)))dW_j(t), \quad t > 0, \\ u_n(s) = \varphi_n(s), \quad s \in [-\rho, 0], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是未知序列; $\lambda$ 和 $\rho$ 是正常数; $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}, h = (h_{j,n})_{j\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}} \in l^2$; $f_n, \sigma_{j,n}$ 是局部 Lipschitz 连续函数, $\{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是完备概率空间上的相互独立的双边实值维纳过程.

格系统的渐近动力学被广泛研究, 对于确定性格系统, 参见 [1–7], 对于随机格系统, 参见 [8–14]. 由于在实际系统中经常会遇到非瞬时传输或记忆过程, 因此研究带有时滞的系统是有重要意义的. 关于确定性时滞方程可参见 [15–21], 关于随机时滞方程可参见 [22–31]. 特别地, [22, 24, 29, 32–35] 等文献研究了有限维随机时滞系统的不变测度. 近来, 文献 [36] 研究了无穷维随机时滞格系统的不变测度

英文引用格式: Chen Z, Wang B, Yang L.
(in Chinese). Sci Sin Math, 2021, : 1–17, doi:

度的存在性, 其非线性项是全局 Lipschitz 的. 本文将研究随机时滞 Schrödinger 格系统 (1.1) 的不变测度, 其漂移项和扩散项都是局部 Lipschitz 的, 我们将采用停时思想来处理这些局部 Lipschitz 非线性项.

基于解的概率分布族在空间 $l^2$ 中的胎紧性, 文献 [14] 讨论了不带时滞的随机 Schrödinger 格系统 (即 (1.1) 中的 $\rho = 0$ 且 $f \equiv 0$) 的不变测度的存在性. 然而, 对于时滞格系统 (1.1) , 为了证明不变测度的存在性, 我们需要证明解的概率分布族在空间 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的胎紧性, 这比在空间 $l^2$ 中的证明复杂的多. 为此, 我们需要利用 Ascoli-Arzelà 定理证明解在空间 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的等度连续性.

事实上, 本文首先得到了解的高阶距估计和其关于时间的 Hölder 连续性 (见引理 3.2 和引理 3.3). 接着通过说明解的尾端项关于 $t \geqslant 0$ 是一致小的, 进而建立了系统 (1.1) 解的一致尾端估计 (见引理 3.5). 最后, 基于这些一致估计和二分法技巧, 通过 Ascoli-Arzelà 定理, 建立了解在空间 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的等度连续性, 进而得到解的概率分布族在空间 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 中的胎紧性 (见引理 4.1).

另一方面, 为了得到不变测度的存在性, 我们还需要建立与系统 (1.1) 相关的 Markov 半群的 Feller 性. 由于 (1.1) 中的非线性项是局部 Lipschitz 的, 我们不能用 [36] 中的方法来得到 Feller 性. 为此, 我们将采用停时思想和解的一致估计来证明 (更多的细节见引理 4.2 和引理 4.3). 基于这些分析, 利用 Krylov-Bogolyubov 方法, 我们最终得到系统 (1.1) 的不变测度的存在性 (见定理 2.2).

在下一节中, 我们将给出 (1.1) 中非线性项的假设及本文的主要定理. 最后两节将分别建立解的一致估计和证明系统 (1.1) 不变测度的存在性.

在该论文中, 我们用 $l^2$ 表示由所有 $\mathbb{C}$ 值的平方可加的序列构成的 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $(\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$. 用 $C([-\rho, 0]; l^2)$ 表示定义在 $[-\rho, 0]$ 上的所有 $l^2$- 值连续函数构成的 Banach 空间, 范数为 $\|u\|_{C_\rho} = \max\limits_{s \in [-\rho, 0]} \|u(s)\|$. 给定 $t \geqslant 0$, 定义 $u_t(s) = u(t+s),\ \ s \in [-\rho, 0]$. 字母 $M$ 和 $c$ 表示不同的行可能不同的正常数.

## 2 假设条件和主要结论

### 2.1 假设条件

定义线性算子 $A, B, B^* : l^2 \to l^2$ 如下:

$$(Au)_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1},$$

$$(Bu)_n = u_{n+1} - u_n,\ \ (B^*u)_n = u_{n-1} - u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, u \in l^2.$$

**(A1)** $\|g\|^2 = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 < \infty,\ \ \|h\|^2 = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |h_{j,n}|^2 < \infty.$

**(F1)** $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 关于 $n \in \mathbb{Z}$ 是一致局部 Lipschitz 连续的; 即, 对 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集 $\mathcal{C}$, 存在常数 $L_{\mathcal{C}} > 0$ 使得 $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant L_{\mathcal{C}} |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{Z}$.

**(F2)** 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 存在正数 $\gamma_n$ 和 $\eta_0$, 使得 $|f_n(z)| \leqslant \gamma_n + \eta_0 |z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}$, 其中 $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$.

**(Σ1)** $\sigma_{j,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是局部 Lipschitz 连续的; 即, 对任意的 $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{C}$ 的任一紧子集 $\mathcal{K}$, 存在常数 $L_{j,n,\mathcal{K}} > 0$ 使得 $|\sigma_{j,n}(z_1) - \sigma_{j,n}(z_2)| \leqslant L_{j,n,\mathcal{K}} |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{K}$, 其中 $L_{\mathcal{K}} = (L_{j,n,\mathcal{K}})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \in l^2$.

**(Σ2)** 对任一 $j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$, 存在正数 $\delta_{j,n}$ 和 $\eta_j$ 使得 $|\sigma_{j,n}(z)| \leqslant \delta_{j,n} + \eta_j |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$, 其中 $(\delta_{j,n})_{j\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}}, (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$.

在上述符号下, 系统 (1.1) 在 $l^2$ 中可以被表示为如下形式:

$$\begin{cases} du(t) - iAu(t)dt + \lambda u(t)dt + i|u(t)|^2 u(t)dt \\ \qquad\qquad = (f(u(t-\rho)) + g)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(h_j + \sigma_j(u(t)))dW_j(t), \\ u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\rho, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $|u|^2 u = (|u_n|^2 u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $f(u(t-\rho)) = (f_n(u_n(t-\rho)))_{n\in\mathbb{Z}}$, $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h_j = (h_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\sigma_j(u) = (\sigma_{j,n}(u_n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

### 2.2 主要结论

**定义2.1** 假设 $\varphi \in L^2(\Omega, C([-\rho,0]; l^2))$ 是 $\mathscr{F}_0$- 可测的. 一个连续的 $l^2$- 值的过程 $u(t), t \geqslant -\rho$, 被称为系统 (2.1) 的解, 如果对所有的 $T > -\rho$, 有 $u \in L^2(\Omega, C([-\rho,T]; l^2))$, $(u_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的, $u_0 = \varphi$, 并且对任一 $t \geqslant 0$, 下式在 $l^2$ 中 $\mathbb{P}$-a.s. 成立:

$$\begin{aligned} u(t) = \varphi(0) + \int_0^t (iAu(s) - \lambda u(s) - i|u(s)|^2 u(s) + f(u(s-\rho)) + g)ds \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (h_j + \sigma_j(u(s)))dW_j(s). \end{aligned}$$

参考文献 [37] 可以证明如下解的存在唯一性定理.

**定理2.1** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 (Σ1)-(Σ2) 成立. 对任意 $\mathscr{F}_0$- 可测的 $\varphi \in L^2(\Omega, C([-\rho,0]; l^2))$, 系统 (2.1) 在定义 2.1 的意义下存在唯一的解 $u$, 且对任意的 $T > 0$, 有

$$\mathbb{E}\big(\|u\|^2_{C([-\rho,T];l^2)}\big) \leqslant M_0 e^{M_0 T}\left(\mathbb{E}\big(\|\varphi\|^2_{C_\rho}\big) + T + \|g\|^2 T + \sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2 T\right),$$

其中 $M_0$ 是不依赖于 $\varphi$ 和 $T$ 的正常数.

在此基础上, 我们将证明其不变测度的存在性. 为此, 假设存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$2^{\frac{4m-1}{2m}}(2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0 + 4m(2m-1)\|\eta\|^2 - (2m - \frac{1}{2})\lambda < 0. \tag{2.2}$$

**定理2.2** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 (Σ1)-(Σ2) 成立. 令 (2.2) 式在 $m = 1$ 和 $m = 6$ 的情况下成立. 则系统 (2.1) 在空间 $C([-\rho,0]; l^2)$ 中存在一个不变测度.

**注2.1** 我们指出, 当 (1.1) 中的三次项 $i|u_n|^2 u_n$ 改为更一般的非线性项 $\pm iF(|u_n|)u_n$ 时, 本文的结论也是成立的, 其中 $F: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的, $F(0) = 0$, 并且存在 $L_F > 0$ 和 $\vartheta \geqslant 0$ 使得

$$|F(|z_1|)z_1 - F(|z_2|)z_2| \leqslant L_F(|z_1|^\vartheta + |z_2|^\vartheta)|z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

## 3 解的一致估计

在本节中, 我们将得到系统 (2.1) 解的一致估计, 这对于证明解的概率分布族的胎紧性是有用的.

**引理3.1** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 (Σ1)-(Σ2) 成立. 令 (2.2) 式在 $m = 1$ 时成立. 如果 $\varphi \in L^2(\Omega, C([-\rho, 0]; l^2))$, 则 (2.1) 的解 $u$ 满足

$$\sup_{t\geqslant -\rho} \mathbb{E}(\|u(t)\|^2) \leqslant M_1\Big(1 + \mathbb{E}\big(\|\varphi\|^2_{C_\rho}\big)\Big), \tag{3.1}$$

其中 $M_1$ 是不依赖于 $\varphi$ 的正常数.

**证明** 令 $\sigma > 0$ 为一待定常数. 由 Ito 公式, 对所有的 $t \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} e^{\sigma t}\mathbb{E}(\|u(t)\|^2) = {} & \mathbb{E}(\|\varphi(0)\|^2) + (\sigma - 2\lambda)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds \\ & + 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(u(s), f(u(s-\rho)))ds + 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(u(s), g)ds \\ & + \sum_{j=1}^\infty \int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|h_j + \sigma_j(u(s))\|^2)ds \\ := {} & \mathbb{E}(\|\varphi(0)\|^2) + (\sigma - 2\lambda)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds + \sum_{i=1}^3 \mathscr{I}_i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, Young 不等式和假设 (F2), 有

$$\mathscr{I}_1 \leqslant \sqrt{2}\rho\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\mathbb{E}\big(\|\varphi\|^2_{C_\rho}\big) + \frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\sigma}e^{\sigma t} + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds. \tag{3.3}$$

类似可得

$$\mathscr{I}_2 \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds + \frac{2}{\lambda\sigma}e^{\sigma t}\|g\|^2. \tag{3.4}$$

对于最后一项, 通过假设 (Σ2), 我们有

$$\mathscr{I}_3 \leqslant \frac{2}{\sigma}\Big(\sum_{j=1}^\infty \|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2\Big)e^{\sigma t} + 4\|\eta\|^2\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds. \tag{3.5}$$

从 (3.2)-(3.5) 可知, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} e^{\sigma t}\mathbb{E}(\|u(t)\|^2) \leqslant {} & \Big(1 + \sqrt{2}\rho\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\Big)\mathbb{E}\big(\|\varphi\|^2_{C_\rho}\big) + \Big(\sigma + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} + 4\|\eta\|^2 - \frac{3}{2}\lambda\Big)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|u(s)\|^2)ds \\ & + \Big(\frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}} + \frac{2}{\lambda}\|g\|^2 + 2\sum_{j=1}^\infty \|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2\Big)\sigma^{-1}e^{\sigma t}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

则由 (2.2), (3.6) 可得, 存在 $\sigma_0 > 0$ 使得对任意 $\sigma \in (0, \sigma_0)$, 对所有的 $t \geqslant 0$, 有

$$\mathbb{E}(\|u(t)\|^2) \leqslant \Big(1 + \sqrt{2}\rho\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\Big)\mathbb{E}(\|\varphi\|^2_{C_\rho})e^{-\sigma t} + \Big(\frac{\sqrt{2}\|\gamma\|^2}{\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}} + \frac{2}{\lambda}\|g\|^2 + 2\sum_{j=1}^\infty \|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2\Big)\sigma^{-1},$$

由此可知 (3.1) 成立. □

**引理3.2** 　假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 令 (2.2) 式在 $m \geqslant 2$ 时成立. 如果 $\varphi \in L^{2m}(\Omega, C([-\rho, 0]; l^2))$, 则 (2.1) 的解 $u$ 满足

$$\sup_{t \geqslant -\rho} \mathbb{E}(\|u(t)\|^{2m}) \leqslant M_2\Big(1 + \mathbb{E}\big(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}\big)\Big), \tag{3.7}$$

其中 $M_2$ 是依赖于 $m$ 但不依赖于 $\varphi$ 的常数.

**证明** 　定义停时: $\tau_n = \inf\{t \geqslant 0 : \|u(t)\| > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, 如果 $\{t \geqslant 0 : \|u(t)\| > n\} = \varnothing$, 此时 $\tau_n = +\infty$. 令 $\sigma > 0$ 为一待定常数, 由 Ito 公式可得, 对所有的 $t \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(e^{\sigma(t\wedge\tau_n)}\|u(t\wedge\tau_n)\|^{2m}\big) = \mathbb{E}\big(\|\varphi(0)\|^{2m}\big) + (\sigma - 2m\lambda)\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m} ds\bigg)\\
&\quad + 2m\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m-2}\mathrm{Re}(u(s), f(u(s-\rho)))ds\bigg)\\
&\quad + 2m\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m-2}\mathrm{Re}(u(s), g)ds\bigg)\\
&\quad + \Bigg[m\mathbb{E}\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m-2}\|h_j + \sigma_j(u(s))\|^2 ds\bigg)\\
&\quad + 2m(m-1)\mathbb{E}\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m-4}|\mathrm{Re}(u(s), h_j + \sigma_j(u(s)))|^2 ds\bigg)\Bigg]\\
&=: \mathbb{E}\big(\|\varphi(0)\|^{2m}\big) + (\sigma - 2m\lambda)\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m} ds\bigg) + \sum_{i=1}^{3}\mathscr{I}_i.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由假设 (F2) 和 Young 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_1 &\leqslant 2^{\frac{4m-1}{2m}}(2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2m}}\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m} ds\bigg) + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0\rho e^{\frac{\sigma\rho}{2m}}\mathbb{E}\big(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}\big)\\
&\quad + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0^{-(2m-1)}e^{-\frac{2m-1}{2m}\sigma\rho}\|\gamma\|^{2m}\sigma^{-1}e^{\sigma t}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

对于 $\mathscr{I}_2$, 利用 Young 不等式, 我们有

$$\mathscr{I}_2 \leqslant \frac{1}{4}\lambda\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m} ds\bigg) + (8m-4)^{2m-1}\lambda^{-(2m-1)}\|g\|^{2m}\sigma^{-1}e^{\sigma t}. \tag{3.10}$$

最后, 由假设 ($\Sigma$2), 可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_3 &\leqslant (\frac{1}{4}\lambda + 4m(2m-1)\|\eta\|^2)\mathbb{E}\bigg(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m} ds\bigg)\\
&\quad + (4m-2)^m(4m-4)^{m-1}\lambda^{-(m-1)}\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2\bigg)^m\sigma^{-1}e^{\sigma t}.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

从 (3.8)-(3.11) 可得, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(e^{\sigma(t\wedge\tau_n)}\|u(t\wedge\tau_n)\|^{2m}\big) &\leqslant (1 + (4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0\rho e^{\frac{\sigma\rho}{2m}})\mathbb{E}\big(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}\big)\\
&\quad + \bigg(\sigma + 2^{\frac{4m-1}{2m}}(2m-1)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2m}} + 4m(2m-1)\|\eta\|^2 - 2(m - \frac{1}{4})\lambda\bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\|u(s)\|^{2m}ds\Big)\\
&+(4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0^{-(2m-1)}e^{-\frac{2m-1}{2m}\sigma\rho}\|\gamma\|^{2m}\sigma^{-1}e^{\sigma t}\\
&+(8m-4)^{2m-1}\lambda^{-(2m-1)}\|g\|^{2m}\sigma^{-1}e^{\sigma t}\\
&+(4m-2)^m(4m-4)^{m-1}\lambda^{-(m-1)}\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2+2\|\delta\|^2\Bigg)^m\sigma^{-1}e^{\sigma t}.
\end{aligned}\tag{3.12}
$$

由 (2.2), (3.12) 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=+\infty$ 可得, 存在 $\sigma_0>0$ 使得对任意 $\sigma\in(0,\sigma_0)$, 对所有的 $t\geqslant 0$, 有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\|u(t)\|^{2m}\big)\leqslant{}&(1+(4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0\rho e^{\frac{\sigma\rho}{2m}})\mathbb{E}\big(\|\varphi\|_{C_\rho}^{2m}\big)e^{-\sigma t}\\
&+(4m-2)^{\frac{2m-1}{2m}}\eta_0^{-(2m-1)}e^{-\frac{2m-1}{2m}\sigma\rho}\|\gamma\|^{2m}\sigma^{-1}\\
&+(8m-4)^{2m-1}\lambda^{-(2m-1)}\|g\|^{2m}\sigma^{-1}\\
&+(4m-2)^m(4m-4)^{m-1}\lambda^{-(m-1)}\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2+2\|\delta\|^2\Bigg)^m\sigma^{-1},
\end{aligned}
$$

由此可得估计式 (3.7). □

**引理3.3** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 (Σ1)-(Σ2) 成立. 令 (2.2) 式在 $m=6$ 时成立. 如果 $\varphi\in L^{12}(\Omega,C([-\rho,0];l^2))$, 则 (2.1) 的解 $u$ 满足, 对任意的 $t>r\geqslant 0$,

$$
\mathbb{E}\big(\|u(t)-u(r)\|^4\big)\leqslant M_3\big(|t-r|^2+|t-r|^4\big),\tag{3.13}
$$

其中 $M_3>0$ 是依赖于 $R$ 但不依赖于 $t$ 和 $r$ 的常数, $\|\varphi\|_{L^{12}(\Omega,C([-\rho,0];l^2))}\leqslant R$.

**证明** 通过 (2.1), 对所有的 $t>r\geqslant 0$, 有

$$
\begin{aligned}
\|u(t)-u(r)\|\leqslant{}&(\lambda+4)\int_r^t\|u(s)\|ds+\int_r^t\|u(s)\|^3ds+\int_r^t\|f(u(s-\rho))\|ds\\
&+\|g\||t-r|+\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}\int_r^t(h_j+\sigma_j(u(s)))dW_j(s)\Big\|.
\end{aligned}\tag{3.14}
$$

从 (3.14) 可知, 对所有的 $t>r\geqslant 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\|u(t)-u(r)\|^4\big)\leqslant{}&125\|g\|^4|t-r|^4+125(\lambda+4)^4\mathbb{E}\Bigg(\Big(\int_r^t\|u(s)\|ds\Big)^4\Bigg)\\
&+125\mathbb{E}\Bigg(\Big(\int_r^t\|u(s)\|^3ds\Big)^4\Bigg)+125\mathbb{E}\Bigg(\Big(\int_r^t\|f(u(s-\rho))\|ds\Big)^4\Bigg)\\
&+125\mathbb{E}\Bigg(\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}\int_r^t(h_j+\sigma_j(u(s)))dW_j(s)\Big\|^4\Bigg)\\
=:{}&125\|g\|^4|t-r|^4+\sum_{i=1}^{4}\mathscr{K}_i.
\end{aligned}
$$

由引理 3.2 ($m=6$ 的情况) 和 Hölder 不等式, 我们有

$$
\mathscr{K}_1\leqslant 125(\lambda+4)^4|t-r|^3\int_r^t\mathbb{E}\big(\|u(s)\|^4\big)ds\leqslant c_1|t-r|^4.
$$

类似地, 对于 $\mathscr{K}_2$, 通过引理 3.2 和 Hölder 不等式, 我们得到

$$\mathscr{K}_2 \leqslant 125|t-r|^3\int_r^t \mathbb{E}\big(\|u(s)\|^{12}\big)ds \leqslant c_2|t-r|^4.$$

对于 $\mathscr{K}_3$, 通过假设 (F2), 引理 3.2 和 Hölder 不等式, 我们有

$$\mathscr{K}_3 \leqslant 1000\|\gamma\|^4|t-r|^4 + 1000\eta_0^4|t-r|^3\int_{r-\rho}^{t-\rho} \mathbb{E}\big(\|u(s)\|^4\big)ds \leqslant c_3|t-r|^4.$$

最后, 由假设 $(\Sigma 2)$, 引理 3.2 和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_4 &\leqslant c_4\mathbb{E}\bigg(\Big(\int_r^t\big(2\sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2 + 4\|\delta\|^2 + 4\|\eta\|^2\|u(s)\|^2\big)ds\Big)^2\bigg)\\ &\leqslant 8c_4\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|h_j\|^2 + 2\|\delta\|^2\Big)^2|t-r|^2 + 32c_5\|\eta\|^4|t-r|^2.\end{aligned}$$

结合以上所有的估计可得 (3.13). □

为了证明 (2.1) 解的概率分布族的胎紧性, 我们对解的尾端给出一些一致估计.

**引理3.4**　假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 $(\Sigma 1)$-$(\Sigma 2)$ 成立. 令 (2.2) 在 $m=1$ 时成立. 则系统 (2.1) 的解 $u$ 满足, 对 $L^2(\Omega, C([-\rho,0];l^2))$ 中的任一紧子集 $E$, 有

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\varphi\in E}\sup_{t\geqslant-\rho}\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\big(|u_n(t,\varphi)|^2\big) = 0.$$

**证明**　选取 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $\xi$ 如下:

$$\xi(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leqslant 1,\\ 1, & |s| \geqslant 2,\end{cases}$$

并且对所有的 $s\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\xi(s)\leqslant 1$. 给定 $k\in\mathbb{N}$, 记 $\xi_k = (\xi(\frac{n}{k}))_{n\in\mathbb{Z}}$, $\xi_k u = (\xi(\frac{n}{k})u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. 由 (2.1), 我们得到

$$\begin{aligned} d(\xi_k u) - (i\xi_k Au - \lambda\xi_k u - i\xi_k|u|^2u)dt &= (\xi_k f(u(t-\rho)) + \xi_k g)dt\\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_k h_j + \xi_k\sigma_j(u(t)))dW_j(t). \end{aligned}\tag{3.15}$$

令 $\sigma>0$ 为一待定常数, 由 Ito 公式可知, 对所有的 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&e^{\sigma t}\mathbb{E}(\|\xi_k u(t)\|^2)\\ &= (\sigma-2\lambda)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2)ds + \mathbb{E}(\|\xi_k\varphi(0)\|^2)\\ &\quad + 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(iAu(s), \xi_k^2 u(s))ds - 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(i|u(s)|^2u(s), \xi_k^2u(s))ds\\ &\quad + 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\xi_k f(u(s-\rho)), \xi_k u(s))ds + 2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\xi_k g, \xi_k u(s))ds\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k h_j+\xi_k\sigma_j(u(s))\|^2)ds$$

$$=: (\sigma-2\lambda)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2)ds+\sum_{i=1}^{6}\mathscr{S}_i. \tag{3.16}$$

注意到 $\varphi\in E$, 并且 $E$ 在 $L^2(\Omega,C([-\rho,0];l^2))$ 中是紧的. 所以对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $K_1=K_1(\epsilon,E)\geqslant 1$, 使得对所有的 $k\geqslant K_1$ 和 $\varphi\in E$, 有 $\sum\limits_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}(|\varphi_n(0)|^2)\leqslant\epsilon$. 由此对所有的 $k\geqslant K_1$ 和 $\varphi\in E$, 我们有

$$\mathscr{S}_1=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\Big(\big|\xi(\frac{n}{k})\varphi_n(0)\big|^2\Big)=\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\Big(\big|\xi(\frac{n}{k})\varphi_n(0)\big|^2\Big)\leqslant\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\big(|\varphi_n(0)|^2\big)\leqslant\epsilon. \tag{3.17}$$

对于 $\mathscr{S}_2$, 由引理 3.1 可得

$$\mathscr{S}_2=2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(iAu(s),\xi_k^2u(s))ds=-2\mathrm{Re}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(iBu(s),B(\xi_k^2u(s)))ds$$

$$\leqslant\frac{c_1}{k}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}\big(\|u(s)\|^2\big)ds, \tag{3.18}$$

其中 $c_1>0$ 是依赖于 $\xi$ 的常数, $c_2>0$ 是依赖于 $\varphi$ 但不依赖于 $k$ 的常数. 由于 $\mathbb{E}(i|u(s)|^2u(s),\xi_k^2u(s))$ 是纯虚数, 我们很容易得到

$$\mathscr{S}_3=0. \tag{3.19}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, Hölder 不等式和假设 (F2), 可得

$$\mathscr{S}_4\leqslant 2\sqrt{2}\eta_0e^{\frac{\sigma\rho}{2}}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_ku(s)\|^2)ds$$

$$+\frac{\sqrt{2}e^{\sigma t}}{\sigma\eta_0e^{\frac{\sigma\rho}{2}}}\sum_{|n|\geqslant k}\gamma_n^2+\sqrt{2}\eta_0e^{\frac{\sigma\rho}{2}}\int_{-\rho}^0 e^{\sigma s}\mathbb{E}\big(\,\|\xi_k\varphi(s)\|^2\,\big)ds. \tag{3.20}$$

由于 $\gamma=(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2$, 存在 $K_2=K_2(\epsilon)\geqslant 1$, 使得对所有的 $k\geqslant K_2$, 有

$$\sum_{|n|\geqslant k}\gamma_n^2\leqslant\epsilon. \tag{3.21}$$

注意到对 $\varphi\in L^2(\Omega,C([-\rho,0];l^2))$, 我们有 $\varphi\in C([-\rho,0];L^2(\Omega,l^2))$, 并且集合 $\{\varphi(s)\in L^2(\Omega,l^2):s\in[-\rho,0]\}$ 在 $L^2(\Omega,l^2)$ 中是紧的. 因此, 给定 $\epsilon>0$, 存在 $s_1,s_2,\cdots,s_m\in[-\rho,0]$, 使得

$$\{\varphi(s)\in L^2(\Omega,l^2):s\in[-\rho,0]\}\subseteq\bigcup_{j=1}^m B(\varphi(s_j),\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}), \tag{3.22}$$

其中 $B(\varphi(s_j),\frac{\sqrt{\epsilon}}{2})$ 是 $L^2(\Omega,l^2)$ 中的半径为 $\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ 的开球. 由于 $\varphi(s_j)\in L^2(\Omega,l^2), j=1,2,\cdots,m$, 所以存在 $K_3=K_3(\epsilon,\varphi)$, 使得对所有的 $k\geqslant K_3$, 有

$$\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\big(\,|\varphi_n(s_j)|^2\,\big)\leqslant\frac{1}{4}\epsilon,\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{3.23}$$

由 (3.22)-(3.23) 可知, 对所有的 $k \geqslant K_3$, 有

$$\sum_{|n|\geqslant k} \mathbb{E}\big(|\varphi_n(s)|^2\big) \leqslant \epsilon, \quad \forall\, s\in[-\rho,0]. \tag{3.24}$$

由于 $E$ 在 $L^2(\Omega, C([-\rho,0];l^2))$ 中是紧的, 通过 (3.24) 可知, 存在 $K_4=K_4(\epsilon,E)\geqslant \max\{K_1,K_2\}$, 使得对所有的 $\varphi\in E$ 和 $k\geqslant K_4$, 有

$$\sum_{|n|\geqslant k} \mathbb{E}\big(|\varphi_n(s)|^2\big) \leqslant \epsilon, \quad \forall\, s\in[-\rho,0]. \tag{3.25}$$

从 (3.20)-(3.21) 和 (3.25) 中可以得出, 对所有的 $\varphi\in E$, $t\geqslant 0, k\geqslant K_4$,

$$\mathscr{S}_4 \leqslant 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2)ds + \frac{\sqrt{2}e^{\sigma t}}{\sigma\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}}}\epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{\sigma\rho}{2}}\rho\epsilon. \tag{3.26}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式, 我们得到

$$\mathscr{S}_5 \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2)ds + \frac{2}{\lambda\sigma}e^{\sigma t}\sum_{|n|\geqslant k}|g_n|^2. \tag{3.27}$$

对于最后一项, 通过假设 $(\Sigma 2)$, 我们得到

$$\mathscr{S}_6 \leqslant \frac{2}{\sigma}e^{\sigma t}\sum_{|n|\geqslant k}\sum_{j=1}^{\infty}(|h_{j,n}|^2+2\delta_{j,n}^2) + 4\|\eta\|^2\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}\big(\|\xi_k u(s)\|^2\big)ds. \tag{3.28}$$

从 (3.16)-(3.17), (3.18)-(3.19) 和 (3.26)-(3.28) 可以得出, 对所有的 $\varphi\in E$, $t\geqslant 0, k\geqslant K_4$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\xi_k u(t)\|^2) \leqslant{}& \epsilon e^{-\sigma t} + (\sigma + 2\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho} + 4\|\eta\|^2 - \frac{3}{2}\lambda)\int_0^t e^{\sigma s}\mathbb{E}(\|\xi_k u(s)\|^2)ds\\ &+ \frac{c_1c_2}{k\sigma} + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho}\eta_0^{-1}\sigma^{-1}\epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\rho\epsilon e^{-\sigma t}\\ &+ 2\Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{|n|\geqslant k}|g_n|^2 + \sum_{|n|\geqslant k}\sum_{j=1}^{\infty}(|h_{j,n}|^2+2\delta_{j,n}^2)\Big)\sigma^{-1}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

通过 (2.2) 和 (3.29) 可得, 存在充分小的 $\sigma>0$, 对所有的 $\varphi\in E$, $t\geqslant 0, k\geqslant K_4$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\xi_k u(t)\|^2) \leqslant{}& \epsilon + \frac{c_1c_2}{k\sigma} + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho}\eta_0^{-1}\sigma^{-1}\epsilon + \sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\rho\epsilon\\ &+ 2\Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{|n|\geqslant k}|g_n|^2 + \sum_{|n|\geqslant k}\sum_{j=1}^{\infty}(|h_{j,n}|^2+2\delta_{j,n}^2)\Big)\sigma^{-1}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

由于 $g=(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}, h=(h_{j,n})_{j\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}}, (\delta_{j,n})_{j\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}}\in l^2$, 通过 (3.30) 可得, 存在 $K_5=K_5(\epsilon,E)\geqslant K_4$, 使得对所有的 $\varphi\in E$, $t\geqslant 0, k\geqslant K_5$, 有

$$\sum_{|n|\geqslant 2k}\mathbb{E}(|u_n(t)|^2) \leqslant \mathbb{E}(\|\xi_k u(t)\|^2) \leqslant (3+\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho}\eta_0^{-1}\sigma^{-1}+\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho}\rho)\epsilon. \tag{3.31}$$

通过 (3.25) 和 (3.31), 我们得到对所有的 $\varphi\in E$, $k\geqslant K_5$,

$$\sup_{t\geqslant-\rho}\sum_{|n|\geqslant 2k}\mathbb{E}(|u_n(t)|^2) \leqslant (4+\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma\rho}\eta_0^{-1}\sigma^{-1}+\sqrt{2}\eta_0 e^{\frac{1}{2}\sigma\rho})\epsilon,$$

证毕. □

**引理3.5** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 (Σ1)-(Σ2) 成立. 令 (2.2) 在 $m=1$ 时成立. 则系统 (2.1) 的解 $u$ 满足, 对 $L^2(\Omega, C([-\rho,0];l^2))$ 中的任一紧集 $E$ , 有

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\varphi\in E}\sup_{t\geqslant\rho}\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k}|u_n(r,\varphi)|^2\Big)=0.$$

**证明** 令 $\xi$ 是引理 3.4 中定义的光滑函数. 对 (3.15) 用 Ito 公式, 并从 $t-\rho$ 到 $r$ 积分, 其中 $t\geqslant\rho, t-\rho\leqslant r\leqslant t$, 我们得到

$$\begin{aligned}\|\xi_k u(r)\|^2 &= \|\xi_k u(t-\rho)\|^2 - 2\lambda\int_{t-\rho}^{r}\|\xi_k u(s)\|^2 ds\\
&+2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(iAu(s),\xi_k^2u(s))ds-2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(i|u(s)|^2u(s),\xi_k^2u(s))ds\\
&+2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(\xi_k f(u(s-\rho)),\xi_k u(s))ds+2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(\xi_k g,\xi_k u(s))ds\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t-\rho}^{r}\|\xi_k h_j+\xi_k\sigma_j(u(s))\|^2ds\\
&+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t-\rho}^{r}(h_j+\sigma_j(u(s)),\xi_k^2u(s))dW_j(s).\end{aligned}\tag{3.32}$$

对于 (3.32) 式右端的第三项, 利用与推导 (3.18) 类似的计算, 可得

$$2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(iAu(s),\xi_k^2u(s))ds\leqslant 4\int_{t-\rho}^{r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\xi(\frac{n+1}{k})-\xi(\frac{n}{k})\Big||u_nu_{n+1}|ds\leqslant\frac{c}{k}\int_{t-\rho}^{r}\|u(s)\|^2ds.\tag{3.33}$$

注意到

$$-2\mathrm{Re}\int_{t-\rho}^{r}(i|u(s)|^2u(s),\xi_k^2u(s))ds=0.\tag{3.34}$$

从 (3.32)-(3.34) 可得, 对所有的 $t\geqslant\rho, t-\rho\leqslant r\leqslant t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t}\|\xi_k u(r)\|^2\Big)&\leqslant\mathbb{E}\big(\|\xi_k u(t-\rho)\|^2\big)+\frac{c}{k}\int_{t-\rho}^{t}\mathbb{E}\big(\|u(s)\|^2\big)ds\\
&+2\int_{t-\rho}^{t}\mathbb{E}\big(|(\xi_k f(u(s-\rho)),\xi_k u(s))|\big)ds+2\int_{t-\rho}^{t}\mathbb{E}\big(|(\xi_k g,\xi_k u(s))|\big)ds\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t-\rho}^{t}\mathbb{E}\big(\|\xi_k h_j+\xi_k\sigma_j(u(s))\|^2\big)ds\\
&+2\mathbb{E}\Bigg(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t}\Big|\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t-\rho}^{r}(h_j+\sigma_j(u(s)),\xi_k^2u(s))dW_j(s)\Big|\Bigg)=:\sum_{i=1}^{6}\mathscr{T}_i.\end{aligned}$$

利用引理 3.4, 对给定的 $\epsilon>0$, 存在 $K_1=K_1(\epsilon)\geqslant 1$, 使得对所有的 $t\geqslant\rho, k\geqslant K_1$, 有

$$\mathscr{T}_1=\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\big(|\xi(\frac{n}{k})u_n(t-\rho)|^2\big)\leqslant\sum_{|n|\geqslant k}\mathbb{E}\big(|u_n(t-\rho)|^2\big)\leqslant\epsilon.\tag{3.35}$$

通过引理 3.1, 存在 $K_2 = K_2(\epsilon, E) \geqslant K_1$, 使得对所有的 $t \geqslant \rho, k \geqslant K_2$,

$$\mathscr{T}_2 \leqslant \epsilon. \tag{3.36}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, Hölder 不等式, 引理 3.4 和假设 (F2), 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_3 &\leqslant \int_{t-\rho}^{t} \mathbb{E}\big(\|\xi_k f(u(s-\rho))\|^2\big) ds + \int_{t-\rho}^{t} \mathbb{E}\big(\|\xi_k u(s)\|^2\big) ds \\ &\leqslant \rho\epsilon + 2\rho \sum_{|n|\geqslant k} \gamma_n^2 + 2\eta_0^2 \rho\epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2$, 存在 $K_3 = K_3(\epsilon, E) \geqslant K_2$, 使得对所有的 $t \geqslant \rho, k \geqslant K_3$,

$$\mathscr{T}_3 \leqslant 3\rho\epsilon + 2\eta_0^2 \rho\epsilon. \tag{3.37}$$

对于 $\mathscr{T}_4$, 我们有

$$\mathscr{T}_4 \leqslant 2\int_{t-\rho}^{t} \mathbb{E}\big(\|\xi_k g\| \|\xi_k u(s)\|\big) ds \leqslant \int_{t-\rho}^{t} \mathbb{E}\big(\|\xi_k g\|^2\big) ds + \int_{t-\rho}^{t} \mathbb{E}\big(\|\xi_k u(s)\|^2\big) ds \leqslant \rho \sum_{|n|\geqslant k} |g_n|^2 + \rho\epsilon.$$

注意到 $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2$, 则存在 $K_4 = K_4(\epsilon, E) \geqslant K_3$, 使得对所有的 $t \geqslant \rho, k \geqslant K_4$, 有

$$\mathscr{T}_4 \leqslant 2\rho\epsilon. \tag{3.38}$$

对于 $\mathscr{T}_5$, 利用引理 3.4 和假设 $(\Sigma 2)$, 我们有

$$\mathscr{T}_5 \leqslant 2\rho \sum_{|n|\geqslant k} \sum_{j=1}^{\infty} (h_{j,n}^2 + 2\delta_{j,n}^2) + 4\|\eta\|^2 \epsilon\rho,$$

因此存在 $K_5 = K_5(\epsilon, E) \geqslant K_4$, 使得对所有的 $t \geqslant \rho, k \geqslant K_5$, 有

$$\mathscr{T}_5 \leqslant 4(1 + \|\eta\|^2)\rho\epsilon. \tag{3.39}$$

最后, 利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, Cauchy-Schwarz 不等式, Hölder 不等式和 (3.39), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_6 &\leqslant c_1 \mathbb{E}\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{t-\rho}^{t} |(\xi_k h_j + \xi_k \sigma_j(u(s)), \xi_k u(s))|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\bigg) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant s\leqslant t} \|\xi_k u(s)\|^2\Big) + 2c_1^2(1 + \|\eta\|^2)\rho\epsilon.\end{aligned} \tag{3.40}$$

从 (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) 和 (3.40) 可以得出, 对所有的 $t \geqslant \rho, k \geqslant K_5$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t} \sum_{|n|\geqslant 2k} |u_n(r)|^2\Big) &\leqslant \mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t} \|\xi_k u(r)\|^2\Big) \\ &\leqslant 2\left(2 + 2\eta_0^2\rho + 5\rho + (4 + 2c_1^2)(1 + \|\eta\|^2)\rho\right)\epsilon,\end{aligned}$$

这样我们就完成了引理 3.5 的证明. □

作为引理 3.5 的直接结果, 我们得到以下引理.

**引理3.6** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 令 (2.2) 在 $m=1$ 时成立. 则系统 (2.1) 的解 $u$ 满足, 对 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的任一紧子集 $E$, 有

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\varphi\in E}\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant r\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k}|u_n(r,\varphi)|^2\Big)=0.$$

**证明** 由 $E$ 是 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的紧集, 我们知道 $E$ 在 $L^2(\Omega,C([-\rho,0];l^2))$ 中也是紧的, 再结合关于 (3.25) 的讨论, 我们可以说, 对每一个 $\epsilon>0$, 存在 $K=K(\epsilon,E)\geqslant 1$, 使得对所有的 $\varphi\in E,k\geqslant K$, 有

$$\sup_{-\rho\leqslant r\leqslant 0}\sum_{|n|\geqslant k}|u_n(r,\varphi)|^2=\sup_{-\rho\leqslant r\leqslant 0}\sum_{|n|\geqslant k}|\varphi_n(r)|^2\leqslant\epsilon.$$

结合上式和引理 3.5, 我们就完成了对引理 3.6 的证明. □

## 4 不变测度的存在性

### 4.1 Feller 性, Markov 性和胎紧性

在本小节中, 我们建立了转移半群的 Feller 性质和 Markov 性质, 以及解的概率分布族的胎紧性, 这对证明 (2.1) 在空间 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的不变测度的存在性是有用的.

为了方便, 把 (2.1) 的解记为 $u(t,r,\varphi)$, 其中 $t\geqslant r-\rho,\varphi\in C([-\rho,0];l^2)$ 是初始条件, 这意味着 $u(t,r,\varphi)=\varphi(t-r),t\in[r-\rho,r]$. 当 $r=0$ 时, 我们把 $u(t,0,\varphi)$ 写作 $u(t,\varphi)$, 其中 $t\geqslant-\rho$. 定义 $u_t(r,\varphi)(s)=u(t+s,r,\varphi),s\in[-\rho,0]$. $u_t(r,\varphi)$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的分布被记为 $\mathcal{L}(u_t(r,\varphi))$.

接下来, 我们将建立 (2.1) 解的概率分布族的胎紧性.

**引理4.1** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 令 (2.2) 在 $m=1$ 和 $m=6$ 时成立. 则 (2.1) 解的概率分布族 $\{\mathcal{L}(u_t(0,0)):t\geqslant 0\}$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中是胎紧的.

**证明** 通过 Chebyshev 不等式和引理 3.1 可知, 存在常数 $c_1>0$, 使得对所有的 $t\geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}\{\|u_t(0,0)(0)\|\geqslant R\}=\mathbb{P}\{\|u(t,0,0)\|\geqslant R\}\leqslant\frac{1}{R^2}\mathbb{E}(\|u(t,0,0)\|^2)\leqslant\frac{c_1}{R^2},$$

因此对每个 $\epsilon>0$, 存在 $R_1=R_1(\epsilon)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\{\|u_t(0,0)(0)\|\geqslant R_1\}\leqslant\frac{1}{3}\epsilon. \tag{4.1}$$

从引理 3.3 得出, 对所有的 $t\geqslant 0,r,s\in[-\rho,0]$,

$$\mathbb{E}(\|u_t(0,0)(r)-u_t(0,0)(s)\|^4)\leqslant c_2(1+|r-s|^2)|r-s|^2\leqslant c_2(1+\rho^2)|r-s|^2, \tag{4.2}$$

其中 $c_2>0$. 利用 (4.2) 和二分法技巧可知, 对给定的 $\epsilon>0$, 存在 $R_2=R_2(\epsilon)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\sup_{-\rho\leqslant s<r\leqslant 0}\frac{\|u_t(0,0)(r)-u_t(0,0)(s)\|}{|r-s|^{\frac{1}{8}}}\leqslant R_2\Big\}\Big)>1-\frac{1}{3}\epsilon. \tag{4.3}$$

通过引理 3.6 可得, 对任一 $\epsilon > 0$ 以及 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $k_m = k(\epsilon, m) \geqslant 1$, 使得对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant s\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k_m}|u_n(s,0,0)|^2\Big) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{2m+2}}. \tag{4.4}$$

由 Chebyshev 不等式和 (4.4) 可得, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Big\{\sup_{t-\rho\leqslant s\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k_m}|u_n(s,0,0)|^2 \geqslant \frac{1}{2^m}\Big\}\Big) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}2^m\mathbb{E}\Big(\sup_{t-\rho\leqslant s\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k_m}|u_n(s,0,0)|^2\Big) \leqslant \frac{1}{4}\epsilon,$$

这表明, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\sup_{t-\rho\leqslant s\leqslant t}\sum_{|n|\geqslant k_m}|u_n(s,0,0)|^2 \leqslant \frac{1}{2^m},\quad \forall m\in\mathbb{N}\Big\}\Big) > 1-\frac{1}{3}\epsilon. \tag{4.5}$$

对给定的 $\epsilon > 0$, 令 $\mathscr{Z}_\epsilon = \mathscr{Z}_{1,\epsilon}\bigcap\mathscr{Z}_{2,\epsilon}\bigcap\mathscr{Z}_{3,\epsilon}$, 其中

$$\mathscr{Z}_{1,\epsilon} = \{z \in C([-\rho,0];l^2):\ \|z(0)\| \leqslant R_1(\epsilon)\}, \tag{4.6}$$

$$\mathscr{Z}_{2,\epsilon} = \left\{z \in C([-\rho,0];l^2):\ \sup_{-\rho\leqslant s<r\leqslant 0}\frac{\|z(r)-z(s)\|}{|r-s|^{\frac{1}{8}}} \leqslant R_2(\epsilon)\right\}, \tag{4.7}$$

$$\mathscr{Z}_{3,\epsilon} = \left\{z \in C([-\rho,0];l^2):\ \sup_{-\rho\leqslant r\leqslant 0}\sum_{|n|\geqslant k_m(\epsilon)}|z_n(r)|^2 \leqslant \frac{1}{2^m},\quad \forall m\in\mathbb{N}\right\}. \tag{4.8}$$

从 (4.1), (4.3) 以及 (4.5)-(4.8) 可得, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(\{u_t(0,0) \in \mathscr{Z}_\epsilon\}) > 1-\epsilon.$$

接下来, 我们将用 Ascoli-Arzelà 定理证明 $\mathscr{Z}_\epsilon$ 是 $C([-\rho,0]l^2)$ 中的预紧集.

根据 (4.7) 可知, $\mathscr{Z}_\epsilon$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中是等度连续的. 另一方面, 由 (4.6) 和 (4.7) 可得, 对每个 $r \in [-\rho,0]$

$$\|z(r)\| \leqslant \|z(r)-z(0)\| + \|z(0)\| \leqslant R_2(\epsilon)|r|^{\frac{1}{8}} + R_1(\epsilon) \leqslant \rho^{\frac{1}{8}}R_2(\epsilon) + R_1(\epsilon). \tag{4.9}$$

结合 (4.8), (4.9) 可知, 对任意固定的 $r \in [-\rho,0]$, 集合 $\{z(r): z\in\mathscr{Z}_\epsilon\}$ 在 $l^2$ 中是预紧的, 证毕. □

现在我们来介绍系统 (2.1) 的转移半群. 如果 $\psi : C([-\rho,0];l^2) \to \mathbb{R}$ 是有界 Borel 函数并且 $0 \leqslant r \leqslant t$, 令 $(P_{r,t}\psi)(\varphi) = \mathbb{E}(\psi(u_t(r,\varphi)))$, $\forall\ \varphi \in C([-\rho,0];l^2)$, 则集合族 $\{P_{r,t}\}_{0\leqslant r\leqslant t}$ 是关于 (2.1) 的转移半群, 通常把 $P_{0,t}$ 记作 $P_t$. 另外, 对于 $G \in \mathcal{B}(C([-\rho,0];l^2)), 0 \leqslant r \leqslant t$ 以及 $\varphi \in C([-\rho,0];l^2)$, 我们记 $p(r,\varphi;t,G) = (P_{r,t}1_G)(\varphi) = \mathbb{E}(1_G(u_t(r,\varphi))) = \mathbb{P}(\omega\in\Omega : u_t(r,\varphi)\in G)$, 其中 $1_G$ 是 $G$ 的示性函数.

**定义4.1** 令 $\mathscr{P}(C([-\rho,0];l^2))$ 是 $C([-\rho,0];l^2)$ 中的所有概率测度构成的空间. 则 $\mu \in \mathscr{P}(C([-\rho,0];l^2))$ 被称为 (2.1) 的不变测度, 如果对所有的 $t \geqslant 0$, 对每一个有界 Borel 函数 $\psi : C([-\rho,0];l^2) \to \mathbb{R}$, 有 $\int_{C([-\rho,0];l^2)}(P_t\psi)(\varphi)\mu(d\varphi) = \int_{C([-\rho,0];l^2)}\psi(\varphi)\mu(d\varphi)$.

现在我们来建立转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0\leqslant r\leqslant t}$ 的 Feller 性质. 我们首先考虑解关于初始条件的局部 Lipschitz 连续性. 给定 $R>0$, 记 $\tau_R=\inf\{t\geqslant 0:\|u(t,\varphi_1)\|\vee\|u(t,\varphi_2)\|>R\}$, 其中 $u(\cdot,\varphi_1)$ 以及 $u(\cdot,\varphi_2)$ 分别是 (2.1) 在初始条件 $\varphi_1$ 以及 $\varphi_2$ 下的解.

**引理4.2** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 如果 $\varphi_1,\varphi_2\in L^2(\Omega,C([-\rho,0];l^2))$, 则对任一 $t\geqslant 0$, 有

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{-\rho\leqslant s\leqslant t}\|u(s\wedge\tau_R,\varphi_1)-u(s\wedge\tau_R,\varphi_2)\|^2\Big)\leqslant(2+M)e^{Mt}\mathbb{E}\big(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{C_\rho}^2\big),$$

其中 $M$ 是依赖于 $R$ 但不依赖于 $t,\varphi_1,\varphi_2$ 的常数.

引理 4.2 可由假设 $(F1)$, ($\Sigma$1), 停时思想和 Ito 公式证得, 详细证明省略.

令 $C_b(C([-\rho,0];l^2))$ 是由所有从 $C([-\rho,0];l^2)$ 到 $\mathbb{R}$ 的有界连续函数构成的 Banach 空间, 其范数为

$$\|\psi\|_\infty:=\sup_{u\in C([-\rho,0];l^2)}|\psi(u)|,\quad \forall\ \psi\in C_b(C([-\rho,0];l^2)).$$

**引理4.3** 假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 则转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0\leqslant r\leqslant t}$ 是 Feller 的, 这意味着, 如果 $\psi\in C_b(C([-\rho,0];l^2))$, 则对每个 $0\leqslant r\leqslant t$, 有 $P_{r,t}\psi\in C_b(C([-\rho,0];l^2))$.

**证明** 给定 $0\leqslant r_0\leqslant t_0$ 以及 $\psi\in C_b(C([-\rho,0];l^2))$, 由定义, $P_{r_0,t_0}\psi$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中是有界的. 现在我们说明 $P_{r_0,t_0}\psi$ 的连续性; 即, 当 $n\to\infty$ 时, 如果在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中有 $\varphi_n\to\varphi$, 则

$$\mathbb{E}\left(\psi(u_{t_0}(r_0,\varphi_n))\right)\to\mathbb{E}\left(\psi(u_{t_0}(r_0,\varphi))\right).\tag{4.10}$$

由于在空间 $C([-\rho,0];l^2)$ 中 $\varphi_n\to\varphi$, 我们知道 $\{\varphi_n:n\in\mathbb{N}\}$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中是有界的, 由定理 2.1 可知, 存在不依赖于 $n$ 的常数 $c_1>0$, 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{r_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi_n)\|^2\Big)+\mathbb{E}\Big(\sup_{r_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi)\|^2\Big)\leqslant c_1.\tag{4.11}$$

通过 (4.11) 可得, 对每个 $\epsilon>0$, 存在 $R(\epsilon)>0$, 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\sup_{r_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi_n)\|>R(\epsilon)\Big\}\Big)<\frac{1}{2}\epsilon,\tag{4.12}$$

以及

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\sup_{r_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi)\|>R(\epsilon)\Big\}\Big)<\frac{1}{2}\epsilon.\tag{4.13}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\tau_n=\inf\{t\geqslant r_0:\|u(t,r_0,\varphi)\|\vee\|u(t,r_0,\varphi_n)\|>R(\epsilon)\}.\tag{4.14}$$

由引理 4.2 可得, 存在 $c_2=c_2(\epsilon)>0$, 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 对每个 $\delta>0$, 有

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega\in\Omega:\sup_{r_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t\wedge\tau_n,r_0,\varphi_n)-u(t\wedge\tau_n,r_0,\varphi)\|\geqslant\delta\Big\}\Big)\leqslant\frac{c_2}{\delta^2}\|\varphi_n-\varphi\|_{C_\rho}^2.\tag{4.15}$$

定义

$$\Omega_n^\epsilon=\Big\{\omega\in\Omega:\sup_{r_0\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi)\|\leqslant R(\epsilon)\ \text{ and }\ \sup_{r_0\leqslant t\leqslant t_0}\|u(t,r_0,\varphi_n)\|\leqslant R(\epsilon)\Big\}.\tag{4.16}$$

从 (4.12)-(4.13) 以及 (4.16) 可以得出 $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_n^\epsilon) < \epsilon$. 通过 (4.14) 以及 (4.16), 我们看到对所有的 $\omega \in \Omega_n^\epsilon$, 有 $\tau_n(\omega) \geqslant t_0$, 进一步由 (4.15) 得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : \|u_{t_0}(r_0,\varphi_n) - u_{t_0}(r_0,\varphi)\|_{C_\rho} \geqslant \delta\}\big) \\
&\leqslant \epsilon + \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega_n^\epsilon : \|u_{t_0}(r_0,\varphi_n) - u_{t_0}(r_0,\varphi)\|_{C_\rho} \geqslant \delta\}\big) \\
&\leqslant \epsilon + \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : \sup_{t_0-\rho\leqslant t\leqslant t_0} \|u(t\wedge\tau_n, r_0,\varphi_n) - u(t\wedge\tau_n, r_0,\varphi)\| \geqslant \delta\}\big) \\
&\leqslant \epsilon + \frac{c_2}{\delta^2}\|\varphi_n - \varphi\|_{C_\rho}^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

由于 $\varphi_n$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中收敛于 $\varphi$, 并且 $\epsilon > 0$ 是任意的, 从 (4.17) 可以得出, 对每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \|u_{t_0}(r_0,\varphi_n) - u_{t_0}(r_0,\varphi)\|_{C_\rho} \geqslant \delta\}\right) = 0.$$

因此, 存在 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使得在空间 $C([-\rho,0];l^2)$ 中

$$u_{t_0}(r_0,\varphi_{n_k}) \to u_{t_0}(r_0,\varphi) \quad \text{a.s..} \tag{4.18}$$

由 $\psi$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 上的连续性、有界性以及 Lebesgue 控制收敛定理, 通过 (4.18) 可得, 当 $k \to \infty$ 时,

$$\mathbb{E}\big(\psi(u_{t_0}(r_0,\varphi_{n_k}))\big) \to \mathbb{E}\big(\psi(u_{t_0}(r_0,\varphi))\big). \tag{4.19}$$

然后利用 (4.19) 以及反证法, 可得序列 $\{\mathbb{E}\left(\psi(u_{t_0}(r_0,\varphi_n))\right)\}_{n=1}^\infty$ 是收敛的, 由此可得 (4.10). □

参考 [38, pp. 250-252], 可以得到转移半群 $\{P_{r,t}\}_{0\leqslant r\leqslant t}$ 的下述性质.

**引理4.4**　假设 (A1), (F1)-(F2) 以及 ($\Sigma$1)-($\Sigma$2) 成立. 则有

(i) $\{P_{r,t}\}_{0\leqslant r\leqslant t}$ 是齐次的, i.e., $p(r,\varphi;t,\cdot) = p(0,\varphi;t-r,\cdot)$, $\forall\, 0 \leqslant r \leqslant t$, $\varphi \in C([-\rho,0];l^2)$;

(ii) 对 $r \geqslant 0$ 以及 $\varphi \in C([-\rho,0];l^2)$, $\{u_t(r,\varphi)\}_{t\geqslant r}$ 是一个 $C([-\rho,0];l^2)$- 值的 Markov 过程;

(iii) 如果 $\psi : C([-\rho,0];l^2) \to \mathbb{R}$ 是有界 Borel 函数, 则

$$(P_{s,t}\psi)(\varphi) = (P_{s,r}(P_{r,t}\psi))(\varphi), \ \ \forall\, 0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t, \varphi \in C([-\rho,0];l^2).$$

特别地, 下面的 Chapman-Kolmogorov 方程成立:

$$p(s,\varphi;t,G) = \int_{C([-\rho,0],l^2)} p(s,\varphi;r,dy)p(r,y;t,G), \ \forall \varphi \in C([-\rho,0];l^2), G \in \mathcal{B}(C([-\rho,0];l^2)).$$

### 4.2　定理 2.2 的证明

基于前面的分析, 下面我们将证明系统 (2.1) 不变测度的存在性.

首先, 由引理 4.3 和引理 4.4 可以分别得到 Feller 性和 Markov 性. 另一方面, 由引理 4.1 知, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $C([-\rho,0];l^2)$ 中是胎紧的. 因此存在概率测度 $\mu$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $\mu_n \to \mu$. 由 Chapman-Kolmogorov 方程可知, 对每个 $t \geqslant 0$ 以及 $\psi \in C_b(C([-\rho,0];l^2))$, 有

$$\int_{C([-\rho,0];l^2)} \psi(y)\mu(dy)$$

$$= \int_{C([-\rho,0];l^2)} \left( \int_{C([-\rho,0];l^2)} \psi(y)p(0,\xi;t,dy) \right) \mu(d\xi) = \int_{C([-\rho,0];l^2)} (P_t\psi)(\xi)\mu(d\xi). \quad (4.20)$$

由 (4.20) 以及定义 4.1 可知, $\mu$ 是 (2.1) 的不变测度.

**致谢** 感谢编辑以及审稿人对本文提出的建设性意见.

## 参考文献


1 Beyn W J, Pilyugin S Y. Attractors of reaction diffusion systems on infinite lattices. J. Dyn. Diff. Eqns, 2003, 15: 485-515
2 Caraballo T, Morillas F, Valero J. Asymptotic behaviour of a logistic lattice system. Discrete Contin. Dyn. Syst, 2014, 34: 4019-4037
3 Chow S N, Mallet-Paret J, Shen W. Traveling waves in lattice dynamical systems. J. Differential Equations, 1998, 149: 248-291
4 Huang J, Han X, Zhou S. Uniform attractors for non-autonomous Klein-Gordon-Schrödinger lattice systems. Appl. Math. Mech., 2009, 30: 1597-1607
5 Van Vleck E, Wang B. Attractors for lattice FitzHugh-Nagumo systems. Phys. D: Nonlinear Phenomena, 2005, 212: 317-336
6 Wang B. Dynamics of systems on infinite lattices. J. Differential Equations, 2006, 221: 224-245
7 Wang R, Li Y. Regularity and backward compactness of attractors for non-autonomous lattice systems with random coefficients. Appl. Math. Comput., 2019, 354: 86-102
8 Bates P W, Lisei H, Lu K. Attractors for stochastic lattice dynamical systems. Stoch. Dyn., 2006, 6: 1-21
9 Bates P W, Lu K, Wang B. Attractors of non-autonomous stochastic lattice systems in weighted spaces. Phys. D: Nonlinear Phenomena, 2014, 289: 32-50
10 Caraballo T, Morillas F, Valero J. Attractors of stochastic lattice dynamical systems with a multiplicative noise and non-Lipschitz nonlinearities. J. Differential Equations, 2012, 253: 667-693
11 Han X. Random attractors for stochastic sine-Gordon lattice systems with multiplicative white noise. J. Math. Anal. Appl., 2011, 376: 481-493
12 Han X, Shen W, Zhou S. Random attractors for stochastic lattice dynamical systems in weighted spaces. J. Differential Equations, 2011, 250: 1235-1266
13 Wang B. Dynamics of stochastic reaction-diffusion lattice systems driven by nonlinear noise. J. Math. Anal. Appl., 2019, 477: 104-132
14 Wang B, Wang R. Asymptotic behavior of stochastic Schrödinger lattice systems driven by nonlinear noise. Stoch. Anal. Appl., 2020, 38: 213-237
15 Caraballo T, Morillas F, Valero J. On differential equations with delay in Banach spaces and attractors for retarded lattice dynamical systems. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2013, 34: 51-77
16 Caraballo T, Morillas F, Valero J. Attractors for non-autonomous retarded lattice dynamical systems. Nonautonomous Dynamical Systems, 2015, 1: 31-51
17 Chen T, Zhou S, Zhao C. Attractors for discrete nonlinear Schrödinger equation with delay. Acta Math. Appl. Sinica, 2010, 26: 633-642
18 Han X, Kloeden P E. Non-autonomous lattice systems with switching effects and delayed recovery. J. Differential Equations, 2016, 261: 2986-3009
19 Hale J K, Lunel S M V. Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1993
20 Liu L, Caraballo T, Kloeden P E, et al. The asymptotic behaviour of fractional lattice systems with variable delay. Fract. Calc. Appl. Anal., 2019, 22: 681-698
21 Zhao C, Zhou S. Compact uniform attractors for dissipative lattice dynamical systems with delays. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2008, 21: 643-663
22 Butkovsky O, Scheutzow M. Invariant measures for stochastic functional differential equations. Electron. J. Probab., 2017, 22: 1-23
23 Caraballo T, Garrido-Atienza M J, Schmalfuss B. Existence of exponentially attracting stationary solutions for delay evolution equations. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, 18: 271-293
24 Es-Sarhir A, van Gaans O ,Scheutzow M. Invariant measures for stochastic functional differential equations with superlinear drift term. Differential Integral Equations, 2010, 23: 189-200
25 Garrido-Atienza M J, Ogrowsky A , Schmalfuss B. Random differential equations with random delays. Stoch. Dyn., 2011, 11: 369-388
26 Liu L, Caraballo T. Analysis of a Stochastic 2D-Navier-Stokes Model with Infinite Delay. J. Dyn. Diff. Eqns., 2019, 31: 2249-2274

27 Li D, Shi L. Upper semicontinuity of attractors of stochastic delay reaction-diffusion equations in the delay. J. Math. Phys., 2018, 59: 032703
28 Li D, Shi L. Upper semicontinuity of random attractors of stochastic discrete complex Ginzburg-Landau equations with time-varying delays in the delay. J. Diff. Equa. Appl., 2018, 24: 872-897
29 Mohammed S E A. Stochastic Functional Differential Eqautions. Longman, New York, 1986
30 Wang X, Lu K, Wang B. Random attractors for delay parabolic equations with additive noise and deterministic nonautonomous forcing. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2015, 14: 1018-1047
31 Wang X, Lu K, Wang B. Exponential stability of non-autonomous stochastic delay lattice systems with multiplicative noise. J. Dyn. Diff. Eqns., 2016, 28: 1309-1335
32 Bo L, Yuan C. Stochastic delay differential equations with jump reflection: invariant measure. Stochastics, 2016, 88: 841-863
33 Chen L, Dong Z, Jiang J, et al. On limiting behavior of stationary measures for stochastic evolution systems with small noise intensity. Sci. China Math., 2020, 63: 1463-1504
34 Scheutzow M. Exponential growth rate for a singular linear stochastic delay differential equation. Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B, 2013, 18；1683-1696
35 Wu F, Yin G, Mei H. Stochastic functional differential equations with infinite delay: Existence and uniqueness of solutions, solution maps, Markov properties, and ergodicity. J. Differential Equations, 2017, 262：1226-1252
36 Chen Z, Li X, Wang B. Invariant measures of stochastic delay lattice systems. Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B, 2021, 26: 3235-3269
37 Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. Second edition, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2011
38 Da Prato G, Zabczyk J. Stochastic Equations Infinite Dimensions. Cambridge university press, Cambridge, 1992

# Invariant measures of stochastic Schrödinger delay lattice systems

Zhang Chen, Bixiang Wang & Li Yang

**Abstract** In this paper, we investigate stochastic Schrödinger lattice systems with time delay, whose drift and diffusion coefficients are locally Lipschitz continuous. Firstly, some uniform estimates of solutions are established which include higher-order moment estimates and uniform tail-ends estimates. Then the tightness of a family of probability distributions of solutions in $C([-\rho,0];l^2)$ is proved by the Ascoli-Arzelà theorem and the technique of diadic division. Finally, the existence of invariant measures for the Markov semigroup of the system is proved by the Krylov-Bogolyubov method.

**Keywords Invariant measure, stochastic discrete Schrödinger equation, nonlinear noise; delay, tail-estimate**
**MSC(2020) 34K50, 37L40, 37L55, 60H10**
**doi:**