中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 12 期: 1 ∼ 8
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

相邻整数的最大素因子问题

王志伟

山东大学数学学院, 济南 250100
E-mail: zhiwei.wang@sdu.edu.cn

收稿日期: 2024-08-30; 接受日期: 2024-12-25; 网络出版日期: 2025-01-24
国家自然科学基金 (批准号: 12322101) 和山东省自然科学基金 (批准号: ZR2023YQ004) 资助项目

摘要 数论中的一个一般性猜想断言整数的加法与其乘法结构是相互独立的, 许多著名的猜想本质都属于该类别. 相邻整数的最大素因子问题, 以及与其相关的变体问题, 也可列为上述的一般性猜想之中. 本文主要概述涉及相邻整数的最大素因子问题的一些猜想的研究背景、研究进展以及所涉及的研究方法.

关键词 最大素因子 筛法 Bombieri-Vinogradov 定理 脆数

MSC (2020) 主题分类 11N25, 11N36, 11N05

1 引言

解析数论主要关心整数的加法和乘法性质. 一个最基本的一般性猜想断言, 整数的加法与其乘法结构是相互独立的, 即 n 和 $n+h$ $(h\in\mathbb{Z}^*)$ 应该是乘法独立的. 因为这种独立性尚未被证明, 所以融合了两种运算结构的问题一般都是非常困难的. 数论中诸多著名的猜想, 本质上均属于该一般性猜想. 例如, 孪生素数猜想 (哥德巴赫猜想类似) 断言有无穷多个素数 p, 使得 p 做加法之后的 $p+2$ 仍保留其原有的乘法性质, 即 $p+2$ 也为素数. abc 猜想断言对任意的正整数 a, b 和 c, 若 $a+b=c$, $(a,b)=1$, 则有 $a+b=c\ll(\prod_{p\mid abc}p)^{1+\varepsilon}$. abc 猜想的不等式中, 左侧是加法运算, 而右侧含有乘法结构.

令 $P^+(n)$ 表示整数 n 的最大素因子, 并令 $P^+(1)=1$. 相邻整数的最大素因子问题主要考虑 $P^+(n)$ 和 $P^+(n+1)$ 的共同分布. 在该问题中, 既有加法运算 "+1", 又蕴含最大素因子 $P^+(\cdot)$ 这种乘法结构, 因此, 它也属于上述的加法乘法独立性猜想. 更一般地, 也可以考虑相邻整数的最大素因子问题的一些广义情形或变体情形. 具体地, 我们将分以下 4 个方面来介绍.

(1) 两个相邻整数的最大素因子问题: Erdős-Turán 猜想和孪生光滑数猜想;
(2) 多个相邻整数的最大素因子问题;
(3) 素数 (殆素数) 版本的最大素因子问题;
(4) 平均版本的最大素因子问题.

英文引用格式: Wang Z W. The largest prime factors of consecutive integers (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–8, doi: 10.1360/SSM-2024-0264

2 两个相邻整数的最大素因子问题: Erdős-Turán 猜想和孪生光滑数猜想

首先考虑关于两个相邻整数最大素因子 $P^+(n)$ 和 $P^+(n+1)$ 的 Erdős-Turán 猜想和孪生光滑数猜想. 这两个猜想是 Erdős [15] 一直都很关心的问题, 他在多个场合提起过该问题, 并认为它们极有可能非常困难且看似无法攻克. 2013 年, Tenenbaum [38] 在追忆 Erdős 的文章中认为 Erdős-Turán 猜想本质源于 n 和 $n+1$ 的乘法独立, 且它与著名的 abc 猜想属于同一类问题. 下面详细介绍这两个猜想 [1].

2.1 Erdős-Turán 猜想

首先考虑两个相邻整数最大素因子的情形. 20 世纪 30 年代, Erdős 和 Turán 在通信中猜想 $P^+(n)>P^+(n+1)$ 和 $P^+(n)<P^+(n+1)$ 成立的概率或密度相等, 均为 1/2 (参见文献 [39]):

猜想 2.1 (Erdős-Turán 猜想) 对于 $x\to\infty$, 有 $|\{n\leqslant x: P^+(n)<P^+(n+1)\}|\sim\frac{1}{2}x$.

Erdős-Turán 猜想可以很好地诠释整数的加法乘法独立性猜想: 假如 n 和 $n+1$ 是乘法独立的, 则 $P^+(n)$ 和 $P^+(n+1)$ 是相互独立互不干扰的, 进而 $P^+(n)>P^+(n+1)$ 和 $P^+(n)<P^+(n+1)$ 发生的概率相等, 即它们的分布概率都是 1/2.

1978 年, Erdős 和 Pomerance [16] 通过基本的筛法上界公式和初等方法, 证明了 $P^+(n)>P^+(n+1)$ 或 $P^+(n)<P^+(n+1)$ 均对正密度的正整数 n 成立: $|\{n\leqslant x: P^+(n)<P^+(n+1)\}|>cx$, 这里正密度 $c>0.0099$. 2005 年, de la Bretèche 等 [11] 将此密度改进到 0.05544, 并且指出, 通过 Fouvry 的一个观察, 0.05544 可以进一步改进到 0.05866. 他们的主要思路和方法是作如下求和分解:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+1)}}1 &= \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n+1)>x^\alpha}}1-\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)>P^+(n+1)>x^\alpha}}1+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+1)\leqslant x^\alpha}}1\\ &=:\mathscr{S}_1-\mathscr{S}_2+\mathscr{S}_3,\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $1/2\leqslant\alpha<1$ 是一个参数. 对于 $\mathscr{S}_1$, 通过脆数分布理论 (参见文献 [24]), 可以直接得到其渐近公式. 对于 $\mathscr{S}_2$, 我们只需要给出一个合适的上界估计即可. de la Bretèche 等 [11] 将求和 $\mathscr{S}_2$ 放大为筛法上界估计问题, 其中筛序列为 $\{(ap+1)/b\}_{p<x/a}$. 通过 Rosser-Iwaniec 线性筛法, 以及算术级数中素数分布的 Bombieri-Vinogradov 定理 [2]:

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\max_{y\leqslant x}\max_{(a,q)=1}\left|\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{\pi(y)}{\varphi(q)}\right|\ll\frac{x}{(\log x)^A},\tag{2.2}$$

他们得到了 $\mathscr{S}_2$ 的上界估计. 再结合 $\mathscr{S}_1$ 的渐近公式, 他们得到了密度 0.05544 (0.05866).

2017 年, 本文作者 [40] 通过对 $\mathscr{S}_2$ 中筛序列 $\{(ap+1)/b\}_{p<x/a}$ 求和条件的一个观察, 将密度改进到 0.1063. 2018 年, 本文作者 [41] 再次将之改进到 0.1356. 改进来自两个方面: 一方面, 在应用 Rosser-Iwaniec 线性筛法时, 通过对余项的重新构造调整, 可以使余项求和系数为好分解的 (well-factorable), 进而可以使用更高分布阶 4/7 的 Bombieri-Fouvry-Friedlander-Iwaniec 型的 Bombieiri-Vinogradov 定理:

$$\sum_{q\leqslant x^{4/7-\varepsilon}}\lambda(q)\left(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\right)\ll\frac{x}{(\log x)^A}.$$

1) 事实上, 孪生光滑数猜想比 Erdős-Turán 猜想更深刻, 前者可以推导出后者成立.
2) 在应用到筛法等问题中时, 该定理等价于广义 Riemann 猜想.

另一方面, 通过引入一个下界筛法权 $\omega(n;y,z):=\sum_{z<p\leqslant y,p\mid n}1$, 并利用不等式

$$\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{-1}\omega(n;y,z)\begin{cases}\leqslant 1, & \text{若 } \left(n,\prod\limits_{z<p\leqslant y}p\right)>1,\\ =0, & \text{其他情形,}\end{cases}$$

我们可以筛出一个大的素因子, 进而可以对 (2.1) 中的第三个求和 $\mathscr{S}_3$ 得到一个非平凡的下界估计. 通过对 $\mathscr{S}_2$ 和 $\mathscr{S}_3$ 的改进, 我们得到密度下界 0.1356, 但离猜想的 1/2 仍相距甚远. 此外, 我们还在文献 [41] 中证明, 即使假设关于算术级数中素数分布的最强猜想, 即 Elliott-Halberstam 猜想 ((2.2) 中的 "$q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B$" 替换为 "$q\leqslant x^{1-\varepsilon}$"), 也可以得到密度下界 0.411, 但仍然无法得到 1/2.

2001 年, Rivat [35] 考虑了截断型的 Erdős-Turán 猜想, 即将 $P^+(n)$ 替换为 $P_y^+(n)=\max\{p\mid n: p\leqslant y\}$, 考虑 $P_y^+(n)<P_y^+(n+1)$, 并证明当 $y\leqslant\exp\{\log x/(100\log\log x)\}$ 时, Erdős-Turán 猜想成立. 这次首次得到分布密度 1/2. 显然, 如果能将上面 y 的范围扩大到 $y\leqslant x$, 即可得到 Erdős-Turán 猜想, 但是看起来遥不可及. 2018 年, Teräväinen [39] 考虑了对数形式的有界可乘函数的二元相关性均值估计. 作为应用, 他证明了对数密度的 Erdős-Turán 猜想成立:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+1)}}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

之后, 2019 年, Tao 和 Teräväinen [36] 进一步证明了, 在排除掉一个对数零密度的例外集之后, Erdős-Turán 猜想成立:

$$\lim_{x\to\infty,x\notin\mathscr{X}}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+1)}}1=\frac{1}{2},$$

其中 $\mathscr{X}$ 是一个对数密度为零的集合. 原始的自然密度的 Erdős-Turán 猜想并未解决, 因为自然密度存在可以推导出对数密度也存在且两者相等, 反之则不行, 对数密度存在并不能保证自然密度一定存在. 2021 年, 本文作者 [43] 给出了 Erdős-Turán 猜想的条件性证明: 假设光滑数版本的 Elliott-Halberstam 猜想 (即光滑数在算术级数中的分布阶为 $x^{1-\varepsilon}$) 成立, 则 $P^+(n)<P^+(n+1)$ 的自然密度为 1/2. 2022 年, Jiang 等 [26] 考虑了平均形式的 Erdős-Turán 猜想, 即 $P^+(n)<P^+(n+h)$, 其中 h 为不为零的整数. 利用 Matomäki 等 [30,31] 发展的新圆法, 我们证明了对 $(\log X)^{1+\varepsilon}\leqslant H\leqslant X^{1-\varepsilon}$, 有

$$\sum_{0<|h|\leqslant H}\left|\sum_{\substack{X<n\leqslant 2X\\ P^+(n)<P^+(n+h)}}1-\frac{1}{2}X\right|^2=o(HX^2).$$

由上式可以推导出, 对 $(\log X)^{1+\varepsilon}\leqslant H\leqslant X^{1-\varepsilon}$, 在排除掉 $o(H)$ 个极少数平移 h 之后, $P^+(n)<P^+(n+h)$ 和 $P^+(n)>P^+(n+h)$ 的自然密度各为 1/2. 这里比较关键的一点是, 利用 Matomäki 等 [30,31] 的新圆法, 可以将 H 范围的下界取到 $(\log X)^{1+\varepsilon}$. 因而, 可以证明在 $|h|\leqslant H$ 范围内排除掉极少数的平移 h 之后, Erdős-Turán 猜想成立.

2.2　孪生光滑数猜想

首先简略介绍光滑数 (smooth number). 光滑数, 也称为脆数 (friable number), 笼统来讲, 是指所有素因子都不大的整数. 具体地, 称一个整数 n 为 y- 光滑数, 是指 n 满足 $P^+(n)\leqslant y$. 关于光滑数分

布, Hildebrand [24] 在 1986 年证明了如下经典的结果: 对 $\exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x$, 有

$$\sum_{n\leqslant x, P^+(n)\leqslant y} 1 = x\rho(u)\left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\},$$

其中, $u = \log x/\log y$, $\rho(u)$ 为 Dickman 函数.

类似于孪生素数猜想, 孪生光滑数猜想考虑 $P^+(n)$ 和 $P^+(n+1)$ 皆为光滑数的情形. 根据 n 和 $n+1$ 乘法独立性猜想, 1978 年, Erdős 和 Pomerance [16] 猜测 $P^+(n)$ 和 $P^+(n+1)$ 应该为 "独立事件", 即 n 和 $n+1$ 同时为光滑数的分布密度应该等于两者单独为光滑数的分布密度之积:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x, P^+(n)\leqslant x^s\\ P^+(n+h)\leqslant x^t}} 1 \sim \rho\left(\frac{1}{s}\right)\rho\left(\frac{1}{t}\right),$$

其中, $0 \leqslant s, t \leqslant 1$.

1985 年, Hildebrand [23] 利用组合方法, 证明了有正密度的整数 n 满足 $n^\alpha < P^+(n) \leqslant n^\beta$ 和 $(n+1)^\alpha < P^+(n+1) \leqslant (n+1)^\beta$, 其中 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. 类似对数密度的 Erdős-Turán 猜想 (2.3), 2018 年, Teräväinen [39] 也证明了对数密度的孪生光滑数猜想成立. 事实上, 对数 (自然) 密度的 Erdős-Turán 猜想是对数 (自然) 密度的孪生光滑数猜想的一个直接推论. 同样地, 2019 年, Tao 和 Teräväinen [36] 也证明了, 在排除掉一个对数零密度的例外集之后, 孪生光滑数猜想成立; 2021 年, Wang [43] 证明在光滑数版本的 Elliott-Halberstam 猜想假设下, 自然密度的孪生光滑数猜想成立, 证明的主要想法是将其中的一个光滑数条件转化为筛法条件; 2022 年, Jiang 等 [26] 证明了类似的平均版本的孪生光滑数猜想.

3 多个相邻整数的最大素因子问题

多个相邻整数的最大素因子问题要比两个的情形困难很多. 根据整数的加法乘法独立性猜想, 当相邻整数的个数固定时, 最大素因子每种排列的概率应该相等. 基于此, 2011 年, De Koninck 和 Doyon [10] 提出了如下一般性猜想: 令 $k \geqslant 2$ 为任意固定的正整数, 对于任意 $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ 的排列 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n+a_1)<P^+(n+a_2)<\cdots<P^+(n+a_k)}} 1 \to \frac{1}{k!}.$$

事实上, 早在 1978 年, Erdős 和 Pomerance [16] 就考虑了 3 个相邻整数的最大素因子问题. 首先, 他们注意到情形

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \tag{3.1}$$

或

$$P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \tag{3.2}$$

对无穷多个整数 n 成立, 并断言对正密度的整数应该也成立. 其次, 他们通过一个初等但不平凡的构造, 证明了情形

$$P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)$$

对无穷多个整数 n 成立, 但并没有给出第 4 种情形 $P^+(n-1)>P^+(n)>P^+(n+1)$ 无穷性的证明. 2001 年, Balog [5] 通过考虑 m^2-2, m^2-1 和 m^2 这种特殊形式的 3 个相邻整数, 证明了第 4 种情形的无穷性: $|\{n\leqslant x: P^+(n-1)>P^+(n)>P^+(n+1)\}|\gg x^{1/2}$. 2018 年, Wang [41] 通过引入的下界筛法权 $\sum_{z<p\leqslant y, p\mid n}1$, 并结合素数以及光滑数版本的 Bombieri-Vinogradov 型定理, 分别证明了情形 (3.1) 和 (3.2) 对正密度的整数成立, 验证了 Erdős 和 Pomerance [16] 的断言:

$$|\{n\leqslant x: P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)\}|>1.06\times 10^{-7}x,$$
$$|\{n\leqslant x: P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1)\}|>8.84\times 10^{-4}x.$$

对于另外两种更加困难的情形, 2019 年, Tao 和 Teräväinen [37] 证明了其正密度的存在性. 实际上, 他们得到了如下更强的 4 个连续整数最大素因子排列的结果:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{x}|\{n\leqslant x: P^+(n-1)<P^+(n)<P^+(n+1)>P^+(n+2)\}|>0,$$
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{x}|\{n\leqslant x: P^+(n-1)>P^+(n)>P^+(n+1)<P^+(n+2)\}|>0.$$

对于更多个相邻整数的情形, 已知结果相对较少. 2018 年, Wang [41] 证明了对任意给定的 $J\leqslant 3$, 情形 $P^+(n+i)<\min_{j\leqslant J, j\neq i}P^+(n+j)$ 和 $P^+(n+i)>\max_{j\leqslant J, j\neq i}P^+(n+j)$ 都对正密度的整数 n 成立.

4 素数 (殆素数) 版本的最大素因子问题

如果在相邻整数最大素因子问题 $P^+(n)<P^+(n+1)$ 中, 再额外加入一个 n 为素数的乘法结构, 问题会变得困难许多. 由于 n 为素数这个乘法性质, 此时, 问题会分为对称和非对称的两种情形. 下面分类讨论.

4.1 非对称情形: 孪生素数猜想

对于非对称的情形, 考虑 $P^+(p)<P^+(p+2)$, 因为当 $p\geqslant 3$ 时, $P^+(p)<P^+(p+1)\leqslant (p+1)/2$ 不可能发生. 此时, 条件 $P^+(p)<P^+(p+2)$ 等价于 $p+2$ 也是一个素数. 因而, 孪生素数猜想就等价于

$$|\{p\leqslant x: P^+(p)<P^+(p+2)\}|\to\infty,\quad x\to\infty. \tag{4.1}$$

关于孪生素数猜想, 主要有 3 条研究路径. 路径一是考虑 $p+2$ 表示为殆素数. 现在最好的结果是 Chen [9] 的著名的 "1+2" 陈氏定理: 存在无穷多个素数 p 使得 $p+2=P_2$, 其中 P_2 为至多有两个素因子的殆素数. 路径二是考虑相邻素数间距的下极限, Zhang [44] 和 Maynard [32] 在该方面作出了重大突破和贡献. 其中, 在张益唐的相邻素数有界间距结果的证明过程中, 最关键的一点是得到如下形式的 Bombieri-Vinogradov 型定理:

$$\sum_{\substack{q\leqslant x^{1/2+2/1168},\ (q,a)=1\\ P^+(q)\leqslant x^{1/1168},\ \mu(q)\neq 0}}\left|\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\right|\ll\frac{x}{(\log x)^A},$$

且分布阶 $x^{1/2+2/1168}$ 越过了 $x^{1/2}$- 障碍. 前面提到过, 即使假设广义 Riemann 猜想, 原始的 Bombieri-Vinogradov 定理也无法越过这个 $x^{1/2}$- 障碍. 而张益唐能够越过这个障碍, 最重要的一个观察是将模 q 限制为光滑数 (即条件 $P^+(q)\leqslant x^{1/1168}$).

路径三是考虑 $p+2$ 的最大素因子 $P^+(p+2)$, 此即对应 (4.1). 从路径三出发, Goldfeld [21] 首先证明了存在无穷多个素数 p 使得 $P^+(p+h)>p^\delta$ 对某些 $\delta>1/2$ 成立. 之后, 幂次 δ 被许多数学家研究和改进, 下面只列出其中的部分改进结果: $\delta=0.6105$ [33], $\delta=0.6199$ [25], $\delta=0.6563$ [12], $\delta=0.6683$ [18] 和 $\delta=0.676$ [2], 其中, Fouvry 在 1985 年的结果 0.6683, 是首次越过 2/3. 该结果再结合 Adleman 和 Heath-Brown [1] 的判别法, 在当时 Fermat 大定理还未完全解决的情形下, 可以推导出 Fermat 大定理的第一种情形对无穷多个素数成立 (即存在无穷多个素数 p, 使得 $x^p+y^p+z^p=0\Rightarrow p\mid xyz$). 截至目前, 最好的结果来自 Baker 和 Harman [3]. 他们在 1998 年证明了 δ 可以取到 0.677. 从上面 δ 改进记录来看, 目前都是在百分位或者千分位上改进, 改进难度非常之大, 且距离孪生素数猜想中的 $\delta=1$ 仍非常遥远. 研究该问题的主要方法是 Bombieri-Vinogradov 定理 (当模 q 不超过 $x^{1/2-\varepsilon}$ 时) 关于 $\sum_{p\leqslant x,p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}1$ 上界的 Brun-Titchmarsh 不等式及其平均形式以及筛法等 (当模 q 大于 $x^{1/2-\varepsilon}$ 时). 关于 $P^+(p+h)$ 取大值的其他相关问题, 也被其他大量数学家研究, 如 Luca 等 [29], Chen 和 Chen [8], Feng 和 Wu [17], Ding 和 Zhao [13] 等.

$p+2$ 最大素因子问题的一个对偶问题是考虑 $p+2$ 为光滑数. 按照整数的加法乘法独立性猜想, 素数 p 作平移 $p+2$ 之后, 破坏了其原有的乘法结构. 因此, $p+2$ 的乘法结构应该会表现得类似于一般整数. 基于此, 我们预期渐近公式

$$\frac{1}{\pi(x)}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p+h)\leqslant y}}1\sim\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)\leqslant y}}1\sim\rho(u),\quad u=\frac{\log x}{\log y}\tag{4.2}$$

对于某些范围内的 y 成立. 1980 年, Pomerance [34] 首先明确提出了猜想 (4.2), 但原始思想可以追溯到 1935 年的 Erdős [14]. 2008 年, Granville 在文献 [22] 中称 (4.2) 可以由 Elliott-Halberstam 猜想的一个弱形式推导出, 但并没有给出证明过程. 具体的条件性证明细节分别由 Lamzouri [27] 和 Wang [42] 给出. 类似平均版本的 Erdős-Turán 猜想和孪生光滑数猜想, Jiang 等 [26] 也证明了 (4.2) 的平均形式

$$\sum_{|h|\leqslant H}\Bigg|\sum_{\substack{X<p\leqslant 2X\\ P^+(p+h)\leqslant y}}1-\rho(u)\pi(X)\Bigg|=O\bigg(\frac{H\rho(u)\pi(X)}{\log\log\log X}\bigg),\tag{4.3}$$

对 $(\log X)^{c_o}\leqslant H\leqslant X^{1-\varepsilon}$ 和 $X^\varepsilon\leqslant y\leqslant X$ 成立, 其中 $u=\log X/\log y$, c_0 是一个小的可计算的常数. 同样地, 可以推导出渐近公式 (4.2) 对几乎所有的 (排除掉至多 $o(H)$, $(\log X)^{c_o}\leqslant H\leqslant X^{1-\varepsilon}$ 个例外) 平移 h 成立. 作为应用, 我们可以考虑 (4.1) 的平均版本. 根据素数定理和 (4.3), 可以直接推导出存在正密度的素数 p, 使得 $P^+(p+h)>p^{1-\varepsilon}$ 对几乎所有的平移 h 成立. 此外, 该问题还可以与密码和算法复杂度等问题产生关联, 详情可参见文献 [7].

既然无法给出渐近公式 (4.2) 的非条件性证明, 可以退一步, 考虑 $\sum_{p\leqslant x,P^+(p+h)\leqslant y}1$ 的上下界等其他相关问题. Balog [4], Fouvry 和 Grupp [19], Friedlander [20] 等数学家考虑存在多小的 $y=x^\alpha$ 使得 y- 光滑数 $p+h$ 有正密度:

$$\sum_{p\leqslant x,P^+(p+h)\leqslant y}1\gg\pi(x),\tag{4.4}$$

且 Friedlander 在 1989 年证明了 α 可以取到 $0.303\cdots$. 如果不考虑正密度而只是要求有无穷多的素数满足 $P^+(p+h)\leqslant y$, Baker 和 Harman [3] 在 1998 年证明了 α 可以取到 0.296. Banks 等 [6] 和 Liu 等 [28] 还研究了该问题在算术级数中的分布并得到诸多有趣结果.

4.2　对称情形: $P^+(p-1) < P^+(p+1)$

类似上面所述, 素数 p 作平移 $p-1$ 或者 $p+1$ 之后, 已经破坏了其原有的乘法结构, 因此我们预期它的乘法结构已经 "类似" 整数了. 根据整数的加法乘法独立性猜想, $p-1$ 和 $p+1$ 应该是乘法独立的, 因此 $P^+(p-1)$ 和 $P^+(p+1)$ 也是相互独立、互不干扰的. 这样, 根据对称性, 我们很自然地猜测 $P^+(p-1) < P^+(p+1)$ 和 $P^+(p-1) > P^+(p+1)$ 的密度比例各占一半:

猜想 4.1 (素变量的 Erdős-Turán 猜想)　对于 $x \to \infty$, 有

$$|\{p \leqslant x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| \sim \frac{1}{2}\pi(x).$$

显然, 素变量的 Erdős-Turán 猜想要比原始的整数的 Erdős-Turán 猜想困难许多. 考虑到上面提到的条件性渐近结果 (4.2) 和无条件的下界结果 (4.4), 即使将猜想 4.1 中公式右侧的变量 $P^+(p+1)$ 换成一个固定的量, 要得到正密度结果也非常困难. 而猜想 4.1 中的公式右侧是一个变量 $P^+(p+1)$, 一般情形下是要比定量的情形困难不少, 我们对此了解很少. 2018 年, Wang [43] 证明了若 Elliott-Halberstam 猜想成立, 则可以得到正密度 "0.1779": $|\{p \leqslant x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| > 0.1779\pi(x)$. 证明的一个关键点是前面所提到的, Elliott-Halberstam 猜想可以推导出关于 $P^+(p+h) \leqslant y$ 分布的渐近公式 (4.2). 若将素数放弱为殆素数, 则可以得到正密度的无条件的结果.

致谢　衷心感谢审稿人仔细认真的阅读以及提出的宝贵意见.

参考文献

1 Adleman L M, Heath-Brown D R. The first case of Fermat's last theorem. Invent Math, 1985, 79: 409–416
2 Baker R C, Harman G. The Brun-Titchmarsh theorem on average. In: Analytic Number Theory. Progress in Mathematics, vol. 138. Boston: Birkhäuser, 1996, 39–103
3 Baker R C, Harman G. Shifted primes without large prime factors. Acta Arith, 1998, 83: 331–361
4 Balog A. $p+a$ without large prime factors. In: Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, vol. 31. Talence: Univ Bordeaux I, 1984, 1–6
5 Balog A. On triplets with descending largest prime factors. Studia Sci Math Hungar, 2001, 38: 45–50
6 Banks W D, Harcharras A, Shparlinski I E. Smooth values of shifted primes in arithmetic progressions. Michigan Math J, 2004, 52: 603–618
7 Barbulescu R, Jouve F. ECM and the Elliott-Halberstam conjecture for quadratic fields. Acta Arith, 2024, 213: 289–324
8 Chen F J, Chen Y G. On the largest prime factor of shifted primes. Acta Math Sin (Engl Ser), 2017, 33: 377–382
9 Chen J R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Sci Sin, 1973, 16: 157–176
10 De Koninck J M, Doyon N. On the distance between smooth numbers. Integers, 2011, 11: 647–669
11 de la Bretèche R, Pomerance C, Tenenbaum G. Products of ratios of consecutive integers. Ramanujan J, 2005, 9: 131–138
12 Deshouillers J M, Iwaniec H. On the Brun-Titchmarsh theorem on average. In: Topics in Classical Number Theory. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 34. Amsterdam: North-Holland, 1984, 319–333
13 Ding Y C, Zhao L L. Solution to a problem of Luca, Menares and Pizarro-Madariaga. Acta Arith, 2023, 210: 391–401
14 Erdős P. On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's ϕ-function. Q J Math, 1935, 6: 205–213
15 Erdős P. Some unconventional problems in number theory. Math Mag, 1979, 61: 73–82
16 Erdős P, Pomerance C. On the largest prime factors of n and $n+1$. Aequationes Math, 1978, 17: 311–321
17 Feng B, Wu J. On the density of shifted primes with large prime factors. Sci China Math, 2018, 61: 83–94
18 Fouvry É. Théorème de Brun-Titichmarsh; application au théorème de Fermat. Invent Math, 1985, 79: 383–407
19 Fouvry É, Grupp F. On the switching principle in sieve theory. J Reine Angew Math, 1986, 370: 101–126
20 Friedlander J B. Shifted primes without large prime factors. In: Number Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer, 1989, 393–401

21 Goldfeld M. On the number of primes p for which $p+a$ has a large prime factor. Mathematika, 1969, 16: 23–27
22 Granville A. Smooth numbers: Computational number theory and beyond. In: Algorithmic Number Theory: Lattices, Number Fields, Curves and Cryptography, vol. 44. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 267–323
23 Hildebrand A. On a conjecture of Balog. Proc Amer Math Soc, 1985, 95: 517–523
24 Hildebrand A. On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. J Number Theory, 1986, 22: 289–307
25 Hooley C. On the largest prime factor of $p+a$. Mathematika, 1973, 20: 135–143
26 Jiang Y J, Lü G S, Wang Z W. Averaged forms of two conjectures of Erdős and Pomerance, and their applications. Adv Math, 2022, 409: 108592
27 Lamzouri Y. Smooth values of the iterates of the Euler phi-function. Canad J Math, 2007, 59: 127–147
28 Liu J Y, Wu J, Xi P. Primes in arithmetic progressions with friable indices. Sci China Math, 2020, 63: 23–38
29 Luca F, Menares R, Pizarro-Madariaga A. On shifted primes with large prime factors and their products. Bull Belg Math Soc Simon Stevin Simon Stevin, 2015, 22: 39–47
30 Matomäki K, Radziwiłł M, Tao T. Correlations of the von Mangoldt and higher divisor functions II: Divisor correlations in short ranges. Math Ann, 2019, 374: 793–840
31 Matomäki K, Radziwiłł M, Tao T. Correlations of the von Mangoldt and higher divisor functions I. Long shift ranges. Proc Lond Math Soc (3), 2019, 118: 284–350
32 Maynard J. Small gaps between primes. Ann of Math (2), 2015, 181: 383–413
33 Motohashi Y. A note on the least prime in an arithmetic progression with a prime difference. Acta Arith, 1970, 17: 283–285
34 Pomerance C. Popular values of Euler's function. Mathematika, 1980, 27: 84–89
35 Rivat J. On pseudo-random properties of $P(n)$ and $P(n+1)$. Periodica Math Hungarica, 2002, 43: 121–136
36 Tao T, Teräväinen J. The structure of correlations of multiplicative functions at almost all scales, with applications to the Chowla and Elliott conjectures. Algebra Number Theory, 2019, 13: 2103–2150
37 Tao T, Teräväinen J. Value patterns of multiplicative functions and related sequences. Forum Math Sigma, 2019, 7: 55
38 Tenenbaum G. Some of Erdős' unconventional problems in number theory, thirty-four years later. Bolyai Soc Math Stud, 2013, 25: 651–681
39 Teräväinen J. On binary correlations of multiplicative functions. Forum Math Sigma, 2018, 6: 41
40 Wang Z W. On the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 3211–3220
41 Wang Z W. Sur les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs. Mathematika, 2018, 64: 343–379
42 Wang Z W. Autour des plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé. Q J Math, 2018, 69: 995–1013
43 Wang Z W. Three conjectures on $P^+(n)$ and $P^+(n+1)$ hold under the Elliott-Halberstam conjecture for friable integers. J Number Theory, 2021, 223: 1–11
44 Zhang Y. Bounded gaps between primes. Ann of Math (2), 2014, 179: 1121–1174

The largest prime factors of consecutive integers

Zhiwei Wang

Abstract In number theory, a general hypothesis asserts that the multiplicative properties of an integer and its additive shift are independent, and many famous conjectures lie in this class. The problems on the largest prime factors of consecutive integers and their variants also stem from the above general hypothesis. In this survey, we briefly introduce the background and progress on this topic, as well as the methods to study them.

Keywords **largest prime factor, sieve method, Bombieri-Vinogradov theorem, friable numbers**

MSC(2020) **11N25, 11N36, 11N05**

doi: 10.1360/SSM-2024-0264