



四维陈-西蒙斯理论与可积模型

贺一珺¹, 陈斌^{2*}

1. 东南大学物理学院&丘成桐中心, 南京, 211189;

2. 宁波大学基础物理与量子科技研究院&物理科学与技术学院, 宁波, 315211;

3. 北京大学物理学院&北京大学高能物理中心, 北京, 100871

* 联系人, E-mail: chenbin1@nbu.edu.cn

收稿日期: 2020-01-29; 接受日期: 2020-02-25;

国家自然科学基金(编号: No. 11735001, 12275004)资助项目。贺一珺由江苏省卓越博士后计划资助。

摘要 本文系统介绍了四维陈-西蒙斯理论与可积模型的深刻联系, 重点揭示了其与可积格点模型及可积场论的内在关联。基于四维陈-西蒙斯理论与杨-巴克斯特方程之间的联系, 可积格点模型的配分函数可以通过该理论框架自然给出。而通过在四维陈-西蒙斯理论中引入二维面缺陷, 二维经典可积场论也可从中构造出来。本文分别回顾了借助有序缺陷和无序缺陷构造可积场论这两种方式, 并展示了从四维陈-西蒙斯理论出发给出二维可积场论的拉克斯联络与作用量的过程。最后, 本文对四维陈-西蒙斯理论相关的后续研究进行了展望。

关键词 可积系统, 陈-西蒙斯理论, 杨-巴克斯特方程

PACS: 02.30.Ik, 11.15.-q, 05.50.+q, 03.50.-z

1 引言

可积系统在物理学领域扮演着独特而关键的角色。它们不仅因具备丰富的对称性而使得重要物理量的解析求解成为可能, 也为理解更广泛的强耦合物理系统提供了一个强有力的起点。尽管基于可积结构的各种解析方法已相对成熟, 但对于不同系统中可积结构的起源, 人们尚缺乏普适的理解。因此, 既没有系统性的方法来判断物理模型是否可积, 也没有可积系统的完整“图景”。为了解决这些问题, 找到一个可用于构造各类可积系统的方法显得尤为关键。近年来, 得益于四维陈-西蒙

斯(Chern-Simons)理论的提出, 人们对这些问题有了新的理解。

陈-西蒙斯理论与可积系统之间的联系由来已久[1]。早在1989年, 威滕(Edward Witten)就发现三维陈-西蒙斯理论可以用来计算纽结不变量[2], 而在纽结理论中, 类型三的赖德迈斯特(Reidemeister)移动与杨-巴克斯特(Yang-Baxter)方程有相似之处。然而, 由于三维陈-西蒙斯理论未能自然地引入可积系统中的谱参数(spectral parameter), 利用它来生成可积模型一直是个难题。直到2013年, 能够构造可积系统的陈-西蒙斯型理论才被提出[3, 4], 即本文所要介绍的四维陈-西蒙斯

引用格式: 贺一珺, 陈斌. 四维陈-西蒙斯理论与可积模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 013002, doi: ??

Yi-Jun He, Bin Chen. Four-dimensional Chern-Simons Theory and Integrable Models (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 013002, doi: ??

理论. 该理论将三维陈-西蒙斯理论的几何背景扩展为四维流形 $\Sigma \times C$, 从而解决了谱参数的引入问题: 四维流形 $\Sigma \times C$ 中, Σ 代表一个二维光滑定向流形, 它定义了可积模型所处的二维时空; 而 C 代表黎曼面 (Riemann surface), 它提供了可积系统中的谱参数. 四维陈-西蒙斯理论的作用量定义如下:

$$S_{CS_4}[A] = \frac{i}{4\pi} \int_{\Sigma \times C} \omega \wedge CS(A), \quad (1)$$

其中, ω 为黎曼面 C 上的亚纯 1-形式, $CS(A)$ 为陈-西蒙斯 3-形式

$$CS(A) = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (2)$$

A 是取值在复化李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上的 1-形式规范场.

实际上, 四维陈-西蒙斯理论可追溯至更早期的文献[5]. 虽然该工作已探讨了其与量子仿射代数的联系, 但这一理论在当时并未获得足够关注. 近年来, 随着研究的深入, 四维陈-西蒙斯理论与可积系统之间的深刻关联逐渐被揭示[6–9]. 特别地, 当 1-形式 ω 没有零点时, 通过选取不同的黎曼面 C 和 ω , 四维陈-西蒙斯理论可以给出三类杨-巴克斯特方程的解. 具体而言, 杨-巴克斯特方程的解对应于四维陈-西蒙斯理论中两条交叉威尔逊线 (Wilson line) 的关联函数. 基于这一对应关系, 可积的格点模型和量子自旋链可以自然地通过四维陈-西蒙斯场论来构造[6–8]. 这种对应关系很快被推广到带边的系统中[10, 11]. 对于可积格点模型中的 Q 算符, 同样可以通过考虑四维陈-西蒙斯理论中的特霍夫特线算符 ('t Hooft line operator) 来实现[12]. 此外人们还发现, 四维陈-西蒙斯理论的非微扰定义可以借助弦论给出[13–15].

通过引入二维缺陷, 利用四维陈-西蒙斯场论能够构造出二维可积场论[9]. 通常, 有两种引入二维缺陷的方式: 一种是将四维陈-西蒙斯场论与二维场论相耦合, 这种缺陷被称为有序缺陷 (order defect); 另一种是在规范场中沿黎曼面 C 引入极点, 并同时在 1-形式 ω 中引入零点, 这种缺陷被称作无序缺陷 (disorder defect). 利用有序缺陷可以构造诸如 Gross-Neveu 模型、Thirring 模型、靶空间为 Kähler 流形的 σ -模型[9]、Zakharov-Mikhailov 模型[16]、Faddeev-Reshetikhin 模型[17]

等可积模型. 利用无序缺陷, 人们系统给出了部分二维可积 σ -模型的作用量[18], 并发现了几种可积形变的构造方式[9, 19–22]. 此外, 还可以在规范场中沿黎曼面 C 引入割线来构造靶空间为对称空间的 σ -模型[9], 这包括在 AdS/CFT 对应中有着重要地位的 $AdS_5 \times S^5$ 超陪集 σ -模型及其可积形变[23–26]. 进一步地, 人们发现通过四维陈-西蒙斯理论既可以构造 $AdS_5 \times S^5$ 上的 Green-Schwarz 超弦理论[27] 也可以构造 $AdS_5 \times S^5$ 上的纯旋量 (pure spinor) 超弦理论[28]. 通过对四维陈-西蒙斯场论中引入的缺陷进行更细致的研究, 人们得以对二维可积场论和二维可积格点模型之间的关系有了新的理解, 并发现了二维可积场论之间丰富的对偶网络[29].

本文其余部分的结构如下: 在第二节, 本文将介绍后文中涉及到的可积性相关基本概念; 在第三节, 本文将介绍四维陈-西蒙斯理论与可积格点模型之间的联系; 在第四节, 本文将介绍四维陈-西蒙斯理论与二维可积场论之间的联系; 在最后一节中, 作者给出了关于本文的总结与展望.

2 可积性基础

为确保文章内容的完整性, 本节将介绍在后续讨论中涉及到的可积性相关基本概念, 包括杨-巴克斯特方程与拉克斯联络 (Lax connection). 这些概念在二维可积格点模型、一维可积自旋链和二维可积场论中扮演着至关重要的角色.

2.1 杨-巴克斯特方程

对于定义在两个复向量空间的直积空间 $V \otimes V'$ 上的线性映射 $R(z, z')$, 以下方程即为杨-巴克斯特方程:

$$R_{12}(z_1, z_2) R_{13}(z_1, z_3) R_{23}(z_2, z_3) = R_{23}(z_2, z_3) R_{13}(z_1, z_3) R_{12}(z_1, z_2) \quad (3)$$

其中, z_1, z_2, z_3 为复参数. 方程的左右两边作用在直积空间 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 上, 线性映射 $R(z, z')$ 的下角标表示其作用的相应线性空间. 在后文中, 我们将 $R(z, z')$ 称为 R -矩阵.

对于二维可积统计格点模型, R -矩阵可以给出格点处的玻尔兹曼权重 (Boltzmann weight). 对于周期性边界条件的情况, 从 R -矩阵出发可以定义如下转移矩阵 (transfer matrix):

$$\tau(z) = \text{tr}_j(R_{j,1}(z)R_{j,2}(z)\dots R_{j,M}(z)) \quad (4)$$

由杨-巴克斯特方程可知, 谱参数不同的转移矩阵之间相互对易:

$$[\tau(z), \tau(z')] = 0 \quad (5)$$

模型的配分函数可写为:

$$Z = \text{tr}_{1,\dots,M}(\tau^N) \quad (6)$$

对于可积格点模型, 其转移矩阵可以通过代数贝特拟设 (Algebraic Bethe ansatz) 方法来对角化.

一维可积自旋链的哈密顿量也可以通过代数贝特拟设方法来对角化. 为此, 需要先引入辅助的线性空间 (此处用拉丁字母 a, b 来标记) 以及拉克斯算子 (Lax operator), 后者作用于辅助空间与单个自旋所处希尔伯特空间 (Hilbert space) (用自旋的相应位置所对应的数字来标记) 的直积空间上. 拉克斯算子与 R -矩阵满足如下 RLL 关系:

$$R_{ab}(z_a - z_b)L_{a,j}(z_a)L_{b,j}(z_b) = L_{b,j}(z_b)L_{a,j}(z_a)R_{ab}(z_a - z_b) \quad (7)$$

通过拉克斯算子可以构造如下单值矩阵 (monodromy matrix):

$$T_a(z) = L_{a,N}(z)L_{a,N-1}(z)\dots L_{a,2}(z)L_{a,1}(z) \quad (8)$$

可以证明, 单值矩阵 $T(z)$ 满足如下 RTT 关系:

$$R_{ab}(z_a - z_b)T_a(z_a)T_b(z_b) = T_b(z_b)T_a(z_a)R_{ab}(z_a - z_b) \quad (9)$$

通过单值矩阵可以进一步定义转移矩阵:

$$t(z) = \text{tr}_a T_a(z) \quad (10)$$

同可积格点模型中的情况类似, 谱参数不同的转移矩阵之间相互对易.

对于二维量子可积场论, 由于其中存在着无穷多的守恒荷, 其散射过程满足如下性质:

1. 粒子数守恒: 散射不会导致粒子的产生或湮灭;
2. 动量守恒: 初态动量之集合等于末态动量之集合;
3. 因子化散射: n 到 n 粒子散射的 S -矩阵可写为 $n(n-1)/2$ 个 2 到 2 粒子散射 S -矩阵之乘积.

由自洽性易知此类场论中 2 到 2 散射的 S -矩阵应该满足杨-巴克斯特方程.

后文中将要用到的 R -矩阵存在如下半经典展开:

$$R(z_1, z_2) = 1_{V_1 \otimes V_2} + \hbar r_{12}(z_1, z_2) + O(\hbar^2) \quad (11)$$

其中 $r_{12}(z)$ 即为经典 r -矩阵, 它是谱参数 z_1, z_2 的亚纯函数, 且取值在 $\text{End}(V_1 \otimes V_2)$ 中. 经典 r -矩阵可以被推广为取值在复李代数的直积 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 中的映射. 将此展开代入到杨-巴克斯特方程, 可得经典杨-巴克斯特方程

$$[r_{12}(z_1, z_2), r_{13}(z_1, z_3)] + [r_{12}(z_1, z_2), r_{23}(z_2, z_3)] + [r_{13}(z_1, z_3), r_{23}(z_2, z_3)] = 0 \quad (12)$$

2.2 拉克斯联络

对于二维场论, 若可以通过其基本场构造出联络 $\mathcal{L}_\alpha(z; t, x)$ ($\alpha = t, x$), 使得场论的运动方程等价于如下方程

$$\dot{\mathcal{L}}_x(z) - \mathcal{L}'_t(z) + [\mathcal{L}_x(z), \mathcal{L}_t(z)] = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (13)$$

则可以构造出无穷多个守恒荷. 此方程被称作拉克斯方程或平坦条件. 联络 $\mathcal{L}_\alpha(z; t, x)$ 被称作拉克斯联络, 是谱参数 z 的亚纯函数. 无穷多个相互独立的守恒荷的存在是二维场论经典可积的必要条件. 通常, 可积性还会进一步要求这些守恒荷之间是对合的 (in involution), 即它们之间的泊松括号为零, 这可以通过要求拉克斯联络之间的泊松括号满足特定的形式来满足. 拉克斯联络之间的泊松括号有如下两种典型形式:

• 超局域斯克莱宁括号 (Ultralocal Sklyanin bracket) [30]:

$$\{\mathcal{L}_1(\lambda, x), \mathcal{L}_2(\mu, y)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), \mathcal{L}_1(\lambda, x) + \mathcal{L}_2(\mu, x)]\delta(x-y) \quad (14)$$

其中, r_{12} 满足条件

$$r_{12}(\lambda, \mu) = -r_{21}(\mu, \lambda) \quad (15)$$

和经典杨-巴克斯特方程(12);

• 非超局域马耶括号 (Non-ultralocal Maillet bracket) [31, 32]:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{L}_1(\lambda, x), \mathcal{L}_2(\mu, y)\} = & [r_{12}(\lambda, \mu), \mathcal{L}_1(\lambda, x)]\delta(x-y) - [r_{21}(\mu, \lambda), \mathcal{L}_2(\mu, x)]\delta(x-y) \\ & - (r_{12}(\lambda, \mu) + r_{21}(\mu, \lambda))\delta'(x-y) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, r_{12} 满足经典杨-巴克斯特方程(12). 这里的 r_{12} 矩阵通常可以拆分成一个标准的 r_{12}^0 矩阵乘以一个扭转函数 (twist function) $\varphi(\mu)^{-1}$ [33].

这两种形式都是守恒荷之间满足对合关系的充分条件.

3 从四维陈-西蒙斯理论到可积格点模型

在二维可积格点模型中, 玻尔兹曼权重由杨-巴克斯特方程的解给出. 因此, 对于四维陈-西蒙斯理论来说, 构造二维可积格点模型的关键在于它能够直接给出作为杨-巴克斯特方程解的 R -矩阵. 本节将介绍四维陈-西蒙斯场论的基本特性以及它与杨-巴克斯特方程之间的联系, 并阐明如何从四维陈-西蒙斯理论得到可积格点模型.

3.1 四维陈-西蒙斯理论与杨-巴克斯特方程

四维陈-西蒙斯理论(1)存在着一个额外的规范对称性: $A \mapsto A + \chi dz$. 通过选取规范 $\chi = -A_z$, 我们可以消去规范场的 A_z 分量, 使其与整个理论解耦. 这样的话, 规范场 A 可以表示为

$$A = A_t dt + A_x dx + A_z dz \quad (17)$$

因此, A 也被称作“部分联络 (partial connection)”. 后文的讨论将默认在此规范下进行.

对于四维陈-西蒙斯场论与杨-巴克斯特方程之间的联系, 以下两个特性至关重要. 一方面, 由于作用量(1)不依赖于二维流形 Σ 上的度规, 四维陈-西蒙斯场论在 Σ 上展现出拓扑性质, 即在 Σ 的微分同胚变换下保持不变; 另一方面, 四维陈-西蒙斯场论是一个可重整的红外自由理论[4].

考虑 1-形式 ω 没有零点的情况, 根据黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem), C 的亏格只能是 0 或 1, 因此 (C, ω) 只可能是以下三种情形之一: (C, dz) 、 $(\mathbb{C}^\times, \frac{dz}{z})$ 或者 $(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), dz)$, 分别对应着杨-巴克斯特方程的有理、三角和椭圆解. 由于此时 ω 是全纯的, 在这些情况下, ω 在 C 上存在着由 ω^{-1} 所生成的阿贝尔整体对称性. 在这三种情况下, 都可以通过选取合适的边界条件来保持四维陈-西蒙斯理论在 Σ 上的拓扑特性.

在四维陈-西蒙斯场论中, 威尔逊线是构造 R -矩阵的出发点. 由于四维陈-西蒙斯场论中规范场 A 的 A_z 分量是脱耦的, 此处我们只考虑位于黎曼面 C 的固定点处且仅在 Σ 上延伸的西蒙斯线. 因此, 每条西蒙斯线可以用一个对应于 C 上坐标的谱参数来标记. 利用这一特性, 四维陈-西蒙斯理论中的西蒙斯线可以表示为由无穷维代数 $\mathfrak{g}[[u]]$ 及其表示所标记的形式. 对于基底为 $\{t_a\}$, $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ 的李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}[[u]]$ 的基底可以表示为:

$$\{t_a^{(n)} = t_a u^n\}_{a=1, n \in \mathbb{Z}_0^+} \quad (18)$$

相应的对易关系为:

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(n)}] = f_{ab}^c t_c^{(m+n)}. \quad (19)$$

这个代数存在有限维的表示. 引入记号:

$$A^{\mathfrak{g}[[u]]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t_a^{(m)} \partial_z^m A^a \quad (20)$$

我们可以定义广义的威尔逊线算子:

$$\mathcal{W}_V[\gamma, A] = \text{P exp} \left(\int_{\gamma} A_V^{\mathfrak{g}[[u]]} \right) \quad (21)$$

其中, γ 为固定于 C 上某点处的路径, V 为选定的李代数表示. 类似地, 取值在 $\mathfrak{g}[[u]]$ 中的无穷小规范变换可定义为:

$$\varepsilon^{\mathfrak{g}[[u]]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t_a^{(m)} \partial_z^m \varepsilon^a. \quad (22)$$

为了得到 R -矩阵, 我们需要考虑威尔逊线算子的真空期待值. 对于四维陈-西蒙斯理论中的任意可观测量 $O[A]$, 其真空期待值定义为:

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A O[A] \exp(-S_{\text{CS}_4}[A]/\hbar)}{\int \mathcal{D}A \exp(-S_{\text{CS}_4}[A]/\hbar)}. \quad (23)$$

为了计算真空期待值, 需要先固定 Σ 平面上的度规. 考虑一些在 Σ 平面上相交 (但固定于 C 中不同点) 的威尔逊线, 它们在 Σ 上的交点可以通过调整度规使其相互远离, 除了交点处外, 线与线之间的距离可以无限被“拉远”. 四维陈-西蒙斯理论的红外自由性质意味着这些可以被“拉远”的线算子之间的相互作用会被压低, 因此这些威尔逊线算子的真空期待值主要来自于 Σ 上交点处的贡献. 如图 1 所示的交点是用以构造威尔逊线算子真空期待值的基本单元.

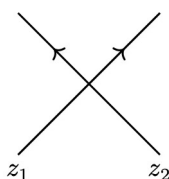


图 1 威尔逊线的交点

Figure 1 Intersection point of Wilson lines.

此类威尔逊线的交点的真空期待值将提供一个线性映射:

$$R(z_1, z_2) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad (24)$$

其中, z_1, z_2 代表着威尔逊线在 C 中所处的位置, V_1, V_2 代表着李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示空间. 值得一提的是, 由前文提到的对称变换 ω^{-1} 可以推测出 $R(z_1, z_2)$ 对 z_1, z_2 的依赖方式. 对于 (C, ω) 为 $(\mathbb{C}, dz)$ 和 $(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), dz)$ 的情况, ω^{-1} 的作用为 $z \mapsto z + a$; 对于 (C, ω) 为 $(\mathbb{C}^\times, \frac{dz}{z})$ 的情况, ω^{-1} 的

作用为 $z \mapsto \lambda z$. 因此, 在前两种情形中, $R(z_1, z_2)$ 通过 $z_1 - z_2$ 依赖于 z_1, z_2 , 而在第三种情形中, $R(z_1, z_2)$ 通过 z_1/z_2 依赖于 z_1, z_2 . 考虑在黎曼面 C 上分别位于三个不同点 z_1, z_2, z_3 处的威尔逊线, 四维陈-西蒙斯场论在 Σ 上的拓扑性质意味着如图 2 中等号两边两种不同位形的威尔逊线算子具有相同的真空期待值. 由于四维陈-西蒙斯场论是红外自由的, 这些威尔逊线算子的真空期待值都可以用其交点处所对应的线性映射 $R(z_i, z_j)$ 来表示. 两种位形具有相同的真空期待值意味着线性映射 $R(z_i, z_j)$ 满足杨-巴克斯特方程.

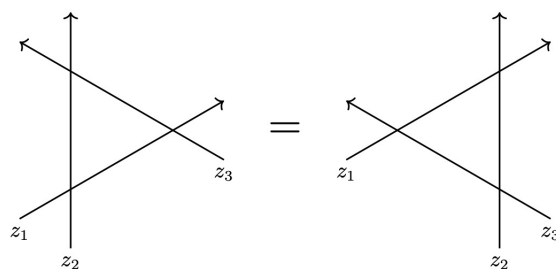


图 2 杨-巴克斯特方程

Figure 2 Yang-Baxter equation.

实际上, 我们可以利用 R -矩阵与四维陈-西蒙斯理论中相交威尔逊线算子真空期待值间的联系, 通过微扰论来计算半经典 R -矩阵. 考虑如图 3 所示的威尔逊线位形, 由前文可知

$$R_{12}(z_1, z_2) = \langle \mathcal{W}_{V_1}[\gamma_1, A] \otimes \mathcal{W}_{V_2}[\gamma_2, A] \rangle \quad (25)$$

其中, γ_1, γ_2 分别为 $z_1, z_2 \in C$ 处的不平行直线. 交叉威尔逊线的费曼图 (Feynman diagram) 会给出前文中提到的经典 r -矩阵. 取不同的 (C, ω) 时, 微扰计算会给出不同的结果, 其中 $(\mathbb{C}, dz)$ 会给出有理 R -矩阵, $(\mathbb{C}^\times, \frac{dz}{z})$ 会给出三角的 R -矩阵, $(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), dz)$ 会给出椭圆的 R -矩阵. 以有理的情形为例, 图 3 的贡献为

$$r_{12}(z_1, z_2) = \frac{c_{\rho\rho'}}{z_1 - z_2} \quad (26)$$

其中

$$c_{\rho\rho'} = \sum_a t_{a\rho} \otimes t_{a\rho'} \quad (27)$$

是 $c = \sum_a t_a \otimes t_a$ 在 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 的表示 $\rho \otimes \rho'$ 下的像.(26) 即为有理的经典 r -矩阵.事实上, 有定理表明完整的有理 R -矩阵可以在只相差一个因子的前提下由经典 r -矩阵和一些一般性条件完全确定下来[34].

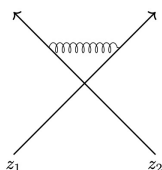


图 3 交叉威尔逊线的领头阶费曼图

Figure 3 The leading Feynman diagram for the intersection of Wilson lines.

3.2 四维陈-西蒙斯场论与可积格点模型

前文已提到, 可积格点模型在格点上的玻尔兹曼权重由 R -矩阵给出.具体而言, 此类模型定义在如图4所示的二维格点上, 边界条件可以取周期性边界条件.对于一个给定的态 v , 其玻尔兹曼权重为每个顶点所对应的玻尔兹曼权重之积, 即:

$$\exp(-\beta E_v) = \prod_{\text{顶点 } k} \exp(-\beta \varepsilon_{v(k)}). \quad (28)$$

模型的配分函数定义为可能的玻尔兹曼权重之和, 即

$$Z = \sum_{\text{态 } v} \exp(-\beta E_v). \quad (29)$$

另一方面, 可以利用 R -矩阵来定义转移矩阵

$$\tau(z) = \text{tr}_j(R_{j,1}(z)R_{j,2}(z)\dots R_{j,M}(z)) \quad (30)$$

则配分函数可写为

$$Z(z) = \text{tr}_{1,\dots,M}(\tau^N(z)) \quad (31)$$

由于 R -矩阵满足杨-巴克斯特方程, 不同谱参数的转移矩阵之间是对易的, 即 $[\tau(z), \tau(z')] = 0$, 此时称此格点模型是可积的.

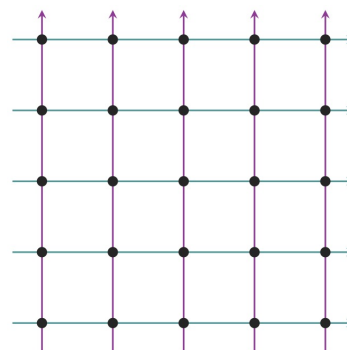


图 4 顶点模型

Figure 4 Vertex model.

若将图4中的线视为四维陈-西蒙斯理论中的威尔逊线在 Σ 方向上的位形, 其中, 水平和竖直方向的威尔逊线分别位于 C 上两个不同的点处, 则由四维陈-西蒙斯场论的红外自由可知, 此时其真空期待值的贡献全部来自于 Σ 方向上交叉点处所对应的 R -矩阵, 因而可以给出相应格点模型的配分函数.

4 从四维陈-西蒙斯理论到二维可积场论

如前所述, 二维可积场论的构造需要在四维陈-西蒙斯理论中引入沿 Σ 方向延伸的二维缺陷.这些缺陷分为有序和无序缺陷两类, 通过它们可以构造出多种二维可积场论.本节将介绍利用这两种缺陷构造二维可积场论的方法.

4.1 有序缺陷

有序缺陷即耦合到四维陈-西蒙斯理论的二维场论, 它位于黎曼面 C 中的特定点, 并在 Σ 上延伸.其整体对称性被四维陈-西蒙斯理论的规范场 A “规范掉”了.为简化讨论, 本小节将以 $(C, \omega) = (C, dz)$ 为例, 回顾如何利用有序缺陷构造二维可积场论.若第 α 个缺陷位于 $z_\alpha \in C$ 处, 其拉氏密度为 $\mathfrak{L}_\alpha(\phi_\alpha; A_w|_{z_\alpha}, A_{\bar{w}}|_{z_\alpha})$, 其中 ϕ_α 代表缺陷上的场, 则这个四维-二维耦合体系的作用量为

$$S_{4d-2d} = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times C} \omega \wedge CS(A) + \sum_{\alpha=1}^n \int_{\mathbb{R}^2 \times z_\alpha} \mathfrak{L}_\alpha(\phi_\alpha; A_w|_{z_\alpha}, A_{\bar{w}}|_{z_\alpha}) \quad (32)$$

这里将 Σ 取为了 $\mathbb{R}^2$.通过在路径积分里积掉四维规范场的相应自由度,可以得到二维经典可积场论.在考虑 $(C, \omega) = (\mathbb{C}, d\bar{z})$ 的情况下,选择全纯规范 $\partial_{\bar{z}} A_{\bar{z}} = 0$.此时,四维陈-西蒙斯理论的运动方程给出 $\partial_{\bar{z}} A_w = \partial_{\bar{z}} A_{\bar{w}} = 0$.

4.1.1 从规范场到拉克斯联络

若取 Σ 为 $\mathbb{R}^2$,其上的坐标为 τ, σ ,则在洛伦兹号差下通常采取光锥坐标 $w = \tau + \sigma, \bar{w} = \tau - \sigma$.对于 C 中缺陷以外的点 z ,可定义如下 $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ 上的联络:

$$\mathcal{L}^{4d}(z) = A_w(z)dw + A_{\bar{w}}(z)d\bar{w}. \quad (33)$$

可以将其视为 $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ 上的1-形式, z 为其参数. $A_{\bar{z}}$ 的运动方程为:

$$\partial_{\bar{w}} A_w - \partial_w A_{\bar{w}} + [A_{\bar{w}}, A_w] = 0 \quad (34)$$

此方程也可视为是1-形式 $\mathcal{L}^{4d}(z)$ 在 $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ 上的平坦性方程,与拉克斯方程形式相同.在规范条件 $A_{\bar{z}} = 0$ 下,有 $\partial_{\bar{z}} A_w = \partial_{\bar{z}} A_{\bar{w}} = 0$,此时 $\mathcal{L}^{4d}(z)$ 在 C 上缺陷以外的区域为全纯的.在缺陷处, $\mathcal{L}^{4d}(z)$ 通常会存在极点.从 $\mathcal{L}^{4d}(z)$ 出发,计算四维规范场的真空期待值可得二维可积场论的拉克斯算子 $\mathcal{L}^{2d}(z)$.借助二维可积场论的运动方程可验证, $\mathcal{L}^{2d}(z)$ 满足如下拉克斯方程:

$$\partial_w \mathcal{L}_{\bar{w}}^{2d}(z) - \partial_{\bar{w}} \mathcal{L}_w^{2d}(z) + [\mathcal{L}_w^{2d}(z), \mathcal{L}_{\bar{w}}^{2d}(z)] = 0 \quad (35)$$

若将 Σ 在空间方向 σ 上紧化, Σ 变为圆柱 $\mathbb{R} \times S^1$,则可以构造如下算子:

$$W_{\mathcal{R}}(z) = \text{Tr}_{\rho} \mathcal{P} \exp \int_{\{\tau\} \times S^1} d\sigma \mathcal{L}(\tau, \sigma, z) \quad (36)$$

其中, $\mathcal{P}$ 算符指沿着 σ 方向做路径排序, ρ 为 $\mathfrak{g}$ 的表示.由拉克斯算子所满足的拉克斯方程可知:

$$\partial_{\tau} W_{\mathcal{R}}(z) = 0 \quad (37)$$

即 $W_{\mathcal{R}}(z)$ 守恒.这意味着从 $W_{\mathcal{R}}(z)$ 中可得到无穷多个守恒荷:

$$W_{\mathcal{R}}(z) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{z^n} \right) \quad (38)$$

这是可积场论的特性之一.

4.1.2 从四维陈-西蒙斯理论到二维可积场论

考虑手征或反手征的二维场论,它具有整体对称群 G 和相应守恒流 $\mathcal{J}_{\mu} = \mathcal{J}_{\mu}^a t_a$,手征与反手征场论分别通过 $A_{\bar{w}} \mathcal{J}, A_w \bar{\mathcal{J}}$ 与四维陈-西蒙斯理论相耦合.若整体对称群 G 对应的李代数 $\mathfrak{g}$ 具有生成元 $\{t^a\}$ 且满足对易关系 $[t^a, t^b] = f_{abc} t^c$,则流与流之间满足对易关系:

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b] = f_{abc} \mathcal{J}^c \quad (39)$$

以手征自由费米子为例,用 $\rho(t^a)$ 来代表 t^a 在表示 ρ 下的表示矩阵,其守恒流为:

$$\mathcal{J}^a = \psi^* \rho(t^a) \psi = \psi_i^* \rho(t^a)^i_j \psi^j \quad (40)$$

其中, ψ 与 ψ^* 满足反对易关系 $\{\psi^i, \psi_j^*\} = \delta_j^i$.对于有 n_+ 个手征缺陷和 n_- 个反手征缺陷的系统,对应的二维-四维作用量为:

$$S_{4d-2d} = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times C} \omega \wedge \text{CS}(A) + \sum_{\alpha=1}^{n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^2 \times \{z_{\alpha}^+\}} \mathfrak{L}_{\alpha}(\phi_{\alpha}) + A_{\bar{w}} \mathcal{J}_w \right) + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{n_-} \left(\int_{\mathbb{R}^2 \times \{z_{\bar{\alpha}}^-\}} \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}}(\phi_{\bar{\alpha}}) + A_w \bar{\mathcal{J}}_{\bar{w}} \right) \quad (41)$$

为得到规范场传播子,可选取全纯规范 $\partial_{\bar{z}} A_{\bar{z}} = 0$.对于 $C = \mathbb{C}$,若规范场在无穷远处取狄利克雷边界条件(Dirichlet boundary condition),则此规范固定条件成为 $A_{\bar{z}} = 0$.此时传播子为:

$$\int_{\Sigma} d^2 w \langle A_{a\bar{w}}(z) A_{bw}(z') \rangle = r^{ab}(z, z') \quad (42)$$

其中, $r^{ab}(z, z')$ 为经典 r -矩阵的分量,即 $r(z, z') = r^{ab}(z, z') t_a \otimes t_b$.对于有 n_+ 个手征缺陷和 n_- 个反手征缺陷的系统,相应的拉克斯算子为:

$$\mathcal{L}^{2d}(z) = \sum_{\alpha=1}^{n_+} \mathcal{J}_b^{\alpha}(w) r^{ab}(z, z_{\alpha}) t_a dw - \sum_{\bar{\alpha}=1}^{n_-} \bar{\mathcal{J}}_b^{\bar{\alpha}}(w) r^{ab}(z, z_{\bar{\alpha}}) t_a d\bar{w} \quad (43)$$

沿黎曼面 C 积掉规范场后, 可得到 Σ 上的有效理论, 其作用量为

$$S_{2d}^{\text{eff}} = \int_{\Sigma} d^2w \left[\sum_{\alpha=1}^{n_+} \mathfrak{L}_{\alpha}(\phi^{\alpha}) + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{n_-} \bar{\mathfrak{L}}_{\bar{\alpha}}(\bar{\phi}^{\bar{\alpha}}) + \sum_{\alpha=1}^{n_+} \sum_{\bar{\alpha}=1}^{n_-} r^{ab}(z_{\alpha} - z'_{\bar{\alpha}}) \mathcal{J}_{\alpha}^a \bar{\mathcal{J}}_{\bar{\alpha}}^b \right]. \quad (44)$$

对于这里考虑的 $(C, \omega) = (\mathbb{C}, dz)$ 情形, $r^{ab}(z_{\alpha} - z'_{\bar{\alpha}})$ 的表达式为

$$r^{ab}(z, z') = \frac{\delta_{ab}}{z - z'} \quad (45)$$

这个二维场论的拉克斯联络同样可以从四维陈-西蒙斯理论出发得到.

通过选取不同的黎曼面 C 和1-形式 ω , 以上讨论可以被推广到椭圆和三角的情形, 此处不再赘述.有序缺陷也可以既非手征也非反手征, 自由波色子就是一个典型的例子.在这类情形下, 由于此缺陷既会和 A_w 耦合也会和 $A_{\bar{w}}$ 耦合, 微扰计算会变得更加复杂.此外, 通过将二维 $\beta - \gamma$ 系统作为有序缺陷, 也可以得到靶空间为凯勒流形 (Kähler manifold) 的 σ -模型[9].

4.2 无序缺陷

考虑黎曼面 C 为 $\mathbb{CP}^1$ 的情形, 引入无序缺陷意味着对规范场 A 在 $\mathbb{CP}^1$ 上引入极点, 后文用符号 $\mathcal{Z} \subset \mathbb{CP}^1$ 指代极点的集合, 此时在相应位置处, 1-形式 ω 应存在零点.本小节将先介绍带有无序缺陷的四维陈-西蒙斯理论与二维可积场论的拉克斯联络之间的联系, 随后给出得到具体二维可积场论的方式.

当 ω 存在零点时, 对四维陈-西蒙斯理论的作用量 $S_{CS_4}[A]$ 做变分可得:

$$\delta S[A] = \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma \times \mathbb{CP}^1} \text{Tr}(\omega \wedge F(A) \wedge \delta A) - \frac{i}{4\pi} \int_{\Sigma \times \mathbb{CP}^1} d\omega \wedge \text{Tr}(A \wedge \delta A). \quad (46)$$

方程(46)右边的第一项为“体项 (bulk term)”.在方程(46)右边的第二项中, $d\omega = \partial_{\bar{z}}\varphi(z)d\bar{z} \wedge dz$, 由于 $\varphi(z)$ 是亚纯函数, $\partial_{\bar{z}}\varphi(z)$ 会给出局域在 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 处的分布.因此这一项会给出 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 上的“边界项 (boundary term)”.为了让变分是良好定义的, 需

要在 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 处对规范场 A 选取适当的边界条件.选定边界条件以后, 方程(46)右边的第一项会给出如下体运动方程 (bulk equation of motion):

$$\omega \wedge F(A) \equiv \omega \wedge (dA + A \wedge A) = 0 \quad (47)$$

此方程在如下“形式”上的规范变换 (“formal” gauge transformation) 下不变:

$$A^u = uAu^{-1} - (du)u^{-1} \quad (48)$$

其中 $u: \Sigma \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ 为光滑函数, $G^{\mathbb{C}}$ 为李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 所对应的李群.这里“形式”二字所强调的是此变换并非是真的规范变换, 因为它不一定保持规范场 A 的边界条件.

4.2.1 从规范场到拉克斯联络

对于体运动方程(47), 考虑那些可以通过形式规范变换 $A \mapsto A^{\widehat{g}^{-1}}$ ($\widehat{g}: \Sigma \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$) 变为如下形式的解:

$$A^{\widehat{g}^{-1}} = \mathcal{L}_t dt + \mathcal{L}_x dx \equiv \mathcal{L} \quad (49)$$

即变换后的规范场 $\bar{z}$ 分量为零, 而 $\mathcal{L}$ 即为后面得到的可积场论的Lax联络.这意味着考虑 $A_{\bar{z}}$ 为如下分量的解:

$$A_{\bar{z}} = -(\partial_{\bar{z}}\widehat{g})\widehat{g}^{-1} \quad (50)$$

与此同时, 规范场 A 的另外两个分量可写为:

$$A_{\mu} = \widehat{g}\mathcal{L}_{\mu}\widehat{g}^{-1} - (\partial_{\mu}\widehat{g})\widehat{g}^{-1}, \quad \mu = t, x \quad (51)$$

在这种考虑下, 形式规范变换所引入的 $\widehat{g}$ 和 $\mathcal{L}$ 可以被视为是规范场 A 的一种参数化.

下面从四维陈-西蒙斯理论出发推导拉克斯对的一些性质.由于形式规范变换并不改变体运动方程(47), 因此拉克斯对满足如下方程:

$$\omega \partial_{\bar{z}} \mathcal{L}_{t,x} = 0, \quad (52)$$

$$\omega (\partial_t \mathcal{L}_x - \partial_x \mathcal{L}_t + [\mathcal{L}_t, \mathcal{L}_x]) = 0 \quad (53)$$

方程(52)意味着 $\mathcal{L}$ 是亚纯的, 且极点只存在于 ω 的零点处.由于 $\mathcal{L}$ 亚纯, 方程(53)意味着拉克斯联络的平坦条件

$$\partial_t \mathcal{L}_x - \partial_x \mathcal{L}_t + [\mathcal{L}_t, \mathcal{L}_x] = 0 \quad (54)$$

在 $z \in \mathbb{CP}^1$ 上处处成立, 且 z 即为谱参数.

需要强调的是, 在四维陈-西蒙斯理论给出 $\widehat{g}$ 和拉克斯联络 $\mathcal{L}$ 的时候存在额外的自由度. 这些自由度主要来自两方面, 一方面来自于 $\widehat{g}$ 的选取可以相差一个 $\mathbb{CP}^1$ 上全局的变换 $v: \Sigma \rightarrow G^{\mathbb{C}}$, 即在变换 $\widehat{g} \mapsto \widehat{g}v$ 下, 拉克斯联络的改变为:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^v \equiv v^{-1} \mathcal{L} v + v^{-1} d_{\Sigma} v \quad (55)$$

在四维陈-西蒙斯理论层面, 这个自由度是对给定规范场 A 做参数化的自由度, 在二维可积场论层面, 这体现的是可积场论中拉克斯联络选取的自由度, 因为这个变换不改变拉克斯联络的平坦条件; 另一方面来自于四维陈-西蒙斯理论的规范场 A 本身所具有的规范对称性, 由规范变换的定义知这些对称变换不改变 A 在 ω 的极点处的边界条件, 在规范变换 $u: \Sigma \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ 下, $\widehat{g}$ 会变为 $u\widehat{g}$, 而 $\mathcal{L}$ 并不发生改变. 结合这两种变换, $\widehat{g}$ 和 $\mathcal{L}$ 的变换如下:

$$(\widehat{g}, \mathcal{L}) \mapsto (u\widehat{g}v, \mathcal{L}^v) \quad (56)$$

在给出二维可积场论的时候, 需要对这两种自由度进行一定程度的固定.

由于在四维陈-西蒙斯理论的作用量(1)中, ω 与 $CS(A)$ 都取值在复数域, 因此作用量(1)并不一定是实的, 从它出发给出的二维可积场论的作用量也不一定是实的. 为了得到实的作用量, 需要给 ω 与规范场 A 以额外的约束. 对 $\omega = \varphi(z)dz$ 的约束为:

$$\overline{\varphi(z)} = \varphi(\bar{z}) \quad (57)$$

这意味着 ω 的极点和零点只能是实的或者成复共轭对出现. 对于规范场 A 而言, 考虑其规范代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的实形式 $\mathfrak{g}$, 即存在对合反线性自同构 (involutive antilinear automorphism) $\tau: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 使得 $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \tau(X) = X\}$, 则对 A 的约束为:

$$\tau(A_{\mu}(t, x, z)) = A_{\mu}(t, x, \bar{z}), \quad \mu = t, x, \bar{z} \quad (58)$$

在这两个约束下, 四维陈-西蒙斯理论的作用量为实. 为了使规范场在规范变换 $A \mapsto A^u$ 下保持此约束, 规范变换 u 应满足 $\tau(u(t, x, z)) = u(t, x, \bar{z})$, τ 为 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上的自同构在 $G^{\mathbb{C}}$ 上诱导的自同构. 在利用形式规范变

换将 A 表示为 $\widehat{g}$ 与 $\mathcal{L}$ 后, $\widehat{g}$ 与 $\mathcal{L}$ 也应满足相应约束, 即:

$$\tau(\widehat{g}(t, x, z)) = \widehat{g}(t, x, \bar{z}), \quad (59)$$

$$\tau(\mathcal{L}_{\mu}(t, x, z)) = \mathcal{L}_{\mu}(t, x, \bar{z}) \quad (60)$$

不失一般性, 若假设 1-形式 ω 没有位于 ∞ 处的零点, 且这些零点都是一阶的, 将其零点集记为 ζ , 则 ω 可写为:

$$\omega = -K \frac{\prod_{y \in \zeta} (z - y)}{\prod_{r=1}^N (z - z_r)^{m_r}} \quad (61)$$

其中 K 为常数, m_r 为极点 z_r 的阶数 ($r = 1, \dots, N$). 数学上, 对亚纯函数在极点附近求导的结果可以利用如下公式得到:

$$\partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z - y} \right) = -2i\pi \delta^{(2)}(z - y), \quad (62)$$

$$\partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{(z - y)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^{p+1} 2i\pi}{p!} \partial_z^p \delta^{(2)}(z - y), \quad p \geq 1 \quad (63)$$

方程(62), (63)的右边是 $\mathbb{CP}^1$ 上的狄拉克分布 (Dirac distribution), 对任意函数 $f(z, \bar{z})$ 满足:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} f(z, \bar{z}) \delta^{(2)}(z - y) dz \wedge d\bar{z} = f(y, \bar{y}) \quad (64)$$

由方程(52)知, 拉克斯联络应为如下形式:

$$\mathcal{L} = \sum_{y \in \zeta} \frac{\mathcal{L}^{(y)}}{z - y} + V \quad (65)$$

其中 $\mathcal{L}^{(y)}$ 和 V 是 Σ 上不依赖 z 的 1-形式. $\mathcal{L}$ 中的极点即为无序缺陷. 为了使得 $\mathcal{L}$ 在其极点处满足拉克斯联络的平坦条件(54), 在任意极点 $y \in \zeta$ 处 1-形式 $\mathcal{L}^{(y)}$ 应沿着 Σ 中固定的方向[9, 18]. 对于这些方向的不同选择将给出不同的可积模型, 这种选取会破坏 Σ 方向的拓扑性质. 为了得到相对论性的模型, 可以选取如下方向:

$$x^{\pm} = \frac{t \pm x}{2} \quad (66)$$

此时拉克斯联络(65)可写为:

$$\mathcal{L} = \left(\sum_{y \in \zeta_+} \frac{U_+^{(y)}}{z - y} + V_+ \right) dx^+ + \left(\sum_{y \in \zeta_-} \frac{U_-^{(y)}}{z - y} + V_- \right) dx^- \quad (67)$$

其中 ζ_+ 与 ζ_- 互不重合且有 $\zeta_+ \cup \zeta_- = \zeta$, $U_+^{(v)}$ 、 $U_-^{(v)}$ 和 $V_\pm$ 都是 Σ 上不依赖 z 的 1-形式, 它们可以从方程(65)中的 $\mathcal{L}^{(v)}$ 和 V 中得到. x^+ 和 x^- 方向的缺陷分别被称为手征 (chiral) 和反手征 (anti-chiral) 缺陷.

4.2.2 边界条件

为了使得作用量 $S[A]$ 的变分(46)在 ω 的极点处 (即所谓 “边界” 处) 是良定义的, 需要对规范场 A 选取适当的边界条件. 一般来说, ω 可写为:

$$\omega = \left(\sum_{r=1}^N \sum_{p=0}^{m_r-1} \frac{\ell_{r,p}}{(z-z_r)^{p+1}} - \sum_{p=1}^{m_\infty-1} \ell_{\infty,p} z^{p-1} \right) dz \quad (68)$$

其中, $\ell_{r,p}$ ($r \in \{1, \dots, N\}$, $p \in \{0, \dots, m_r-1\}$) 与 $\ell_{\infty,p}$ ($p \in \{1, \dots, m_\infty-1\}$) 为理论的可调参数, $z_r \in \mathcal{Z}'$ 为 ω 的有限极点, 后文用 $\mathcal{Z}'$ 来指代 ω 的有限极点构成的集合.

由公式(46)右边的第二项可知, 在对四维陈-西蒙斯理论的作用量做变分时, 会在 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 处出现边界项. 为了使得变分是良定义的, 这一项应该在选取合适的边界条件之后为零. 下文中将把这一项中由 $d\omega$ 给出的分布函数在 $\mathbb{CP}^1$ 上积掉, 并对由此得到的定义在 Σ 上的二维项进行分析.

若 $z_r \in \mathcal{Z}'$ 是 ω 的一阶极点, 在 $z = z_r$ 附近有

$$\omega \stackrel{z \rightarrow z_r}{\simeq} \frac{\ell_{r,0}}{z-z_r} dz, \quad (69)$$

则利用公式(62)可知 $d\omega$ 给出的分布在 z_r 处会给出一个狄拉克函数, 即:

$$d\omega \stackrel{z \rightarrow z_r}{\simeq} 2i\pi \ell_{r,0} \delta^{(2)}(z-z_r) dz \wedge d\bar{z} \quad (70)$$

将其代入变分公式(46)的边界项并积掉底流形的 $\mathbb{CP}^1$ 方向后会给出:

$$\mathcal{D}_r \equiv \frac{\ell_{r,0}}{2} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A \wedge \delta A)|_{z=z_r} = \frac{\ell_{r,0}}{2} \int_{\Sigma} dt dx \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr}(A_\mu \delta A_\nu)|_{z=z_r} \quad (71)$$

若 $z_r \in \mathcal{Z}'$ 是 ω 的 $m_r \geq 1$ 阶极点, 在 $z = z_r$ 附近有:

$$\omega \stackrel{z \rightarrow z_r}{\simeq} \sum_{p=0}^{m_r-1} \frac{\ell_{r,p}}{(z-z_r)^{p+1}} dz \quad (72)$$

则利用公式(63)可知 $d\omega$ 给出的分布在 z_r 处会给出狄拉克函数的导数, 即

$$d\omega \stackrel{z \rightarrow z_r}{\simeq} 2i\pi \sum_{p=0}^{m_r-1} \frac{(-1)^p \ell_{r,p}}{p!} \partial_z^p \delta^{(2)}(z-z_r) dz \wedge d\bar{z} \quad (73)$$

将其代入(46)的边界项并做分部积分后可得:

$$\mathcal{D}_r \equiv \sum_{p=0}^{m_r-1} \frac{\ell_{r,p}}{2 p!} \int_{\Sigma} dt dx \epsilon^{\mu\nu} \partial_z^p \text{Tr}(A_\mu \delta A_\nu)|_{z=z_r} \quad (74)$$

对于 $z = \infty$ 也为 ω 极点的情况, 分析过程与以上类似.

使变分(46)良定义的一个要求是变分在边界 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 上给出的总贡献为零, 即:

$$\sum_{z_r \in \mathcal{Z}} \mathcal{D}_r = 0 \quad (75)$$

通过对规范场 A 选取合适的边界条件, 可以得到(75)被满足. 和 ω 的选取类似, 这种边界条件的选取也是四维陈-西蒙斯理论给出不同二维可积场论的决定性因素之一, 并且是四维陈-西蒙斯理论定义的一部分. 目前为止人们尚没有做到对所有可能的边界条件进行分类, 但已经对 ω 只有一阶和二阶极点时可以选取的几种边界条件有了一些讨论[18]. 下文主要介绍两类边界条件:

1. 若 $z_r \in \mathcal{Z}$ 为 ω 的二阶极点, 则在 z_r 处选取边界条件使得如下约束被满足:

$$\ell_{r,0} \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr}(A_\mu|_{z=z_r} \delta A_\nu|_{z=z_r}) + \ell_{r,1} \epsilon^{\mu\nu} \partial_z \text{Tr}(A_\mu \delta A_\nu)|_{z=z_r} = 0 \quad (76)$$

为了使得实条件(57)被满足, 这里假设 z_r 为实数;

2. 若 z_+ 与 z_- 为 ω 的一对单极点, 则选取边界条件使得如下约束被满足:

$$\ell_{+,0} \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr}(A_\mu|_{z=z_+} \delta A_\nu|_{z=z_+}) + \ell_{-,0} \epsilon^{\mu\nu} \text{Tr}(A_\mu|_{z=z_-} \delta A_\nu|_{z=z_-}) = 0 \quad (77)$$

为了使得实条件(57)被满足, 这里假设 z_+ 与 z_- 都为实数或互为复共轭.

在继续讨论具体的边界条件前, 此处先简单介绍一些基本的数学概念. 对于李代数 $\mathfrak{a}$ 上的对称双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathfrak{a}$ 的拉格朗日子代数 (Lagrangian subalgebra) $\mathfrak{t}$ 定义为满足 $\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{a}} = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{t}$ 的最大子代数, 称 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{t})$ 为一个 Manin 对 (Manin pair). 在有些情况下, 存在 Manin 三元组 (Manin triple) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{t}, \mathfrak{p})$, 此时 $\mathfrak{t}$ 和 $\mathfrak{p}$ 都是 $\mathfrak{a}$ 的拉格朗日子代数且二者之间互为补, 即 $\mathfrak{a} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$, 其中 $\oplus$ 表示向量空间直和.

使得约束(76)或(77)得以满足的边界条件有以下几种基本情况:

1. 若 $z_r \in \mathcal{Z}$ 为 ω 的实二阶极点, 则边界条件为:

$$A_{\mu}|_{z=z_r} = 0, \quad \mu = t, x \quad (78)$$

此时变分被限制为:

$$\delta A_{\mu}|_{z=z_r} = 0, \quad \mu = t, x \quad (79)$$

2. 若 z_+ 与 z_- 为 ω 的一对实单极点, 定义代数 $\mathfrak{d}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的直和 $\mathfrak{d} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, 其上的对称不变双线性形式可以定义为:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{\mathfrak{d}, x_{\pm}} := \ell_{+,0} \text{Tr}(xx') + \ell_{-,0} \text{Tr}(yy') \quad (80)$$

其中 $x, x', y, y' \in \mathfrak{g}$. 由定义可知, 若 $(\mathfrak{d}, \mathfrak{t})$ 为一个 Manin 对, 即 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{d}$ 的拉格朗日子代数, 则边界条件可写为:

$$(A_{\mu}|_{x_+}, A_{\mu}|_{x_-}) \in \mathfrak{t}, \quad \mu = t, x \quad (81)$$

此时变分被限制为:

$$\delta(A_{\mu}|_{x_+}, A_{\mu}|_{x_-}) \in \mathfrak{t}, \quad \mu = t, x \quad (82)$$

3. 若 z_+ 与 z_- 为 ω 的一对互为复共轭的单极点, 此时 $z_- = \overline{z_+}$, 且 $\text{res}_{x_-} \omega = \overline{\text{res}_{x_+} \omega}$, 则实条件也要要求 $\tau(A_{t,x}|_{x_+}) = A_{t,x}|_{x_-}$. 在复化李代数上定义对称不变双线性形式为:

$$\langle x, x' \rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, x_{\pm}} := 2\Re(\ell_{+,0} \text{Tr}(xx')) \quad (83)$$

其中 $x, x' \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\Re$ 代表取实部. 若 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})$ 为一个 Manin 对, 则边界条件可取为:

$$A_{\mu}|_{x_+} \in \mathfrak{t}, \quad \mu = t, x \quad (84)$$

与之前类似, 此时变分也有限制:

$$\delta A_{\mu}|_{x_+} \in \mathfrak{t}, \quad \mu = t, x \quad (85)$$

对于后两种情况, 在满足 $\ell_{+,0} = -\ell_{-,0}$ 时存在 Manin 三元组, 进而给出多个边界条件. 为了定义这两个 Manin 三元组, 引入修改的经典杨-巴克斯特方程的解 $R \in \text{End } \mathfrak{g}$, 它满足如下方程:

$$[Rx, Ry] - R([Rx, y] + [x, Ry]) = -c^2[x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (86)$$

其中 c 的取值为 1 或 i . 此时 Manin 三元组的定义如下:

1. 对于李代数 $\mathfrak{d} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, 取 $c = 1$, 则如下定义的两个代数为其李子代数:

$$\mathfrak{g}_R := \{((R-1)x, (R+1)x) | x \in \mathfrak{g}\} \quad (87)$$

$$\mathfrak{g}^{\delta} := \{(x, x) | x \in \mathfrak{g}\} \quad (88)$$

若 $\mathfrak{d}$ 上的双线性形式为

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{\mathfrak{d}} := \text{Tr}(xx') - \text{Tr}(yy') \quad (89)$$

则 $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}_R, \mathfrak{g}^{\delta})$ 为一个 Manin 三元组. 将李代数 $\mathfrak{g}_R$ 与 $\mathfrak{g}^{\delta}$ 所对应的李群分别记作 G_R 和 G^{δ} , 则分解 $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_R \oplus \mathfrak{g}^{\delta}$ 可以提升至李群, 即 $D = G_R G^{\delta}$.

2. 对于李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, 取 $c = i$, 则如下代数为其李子代数

$$\mathfrak{g}_R := \{(R-i)x | x \in \mathfrak{g}\} \quad (90)$$

若 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上的双线性形式为

$$\langle x, x' \rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} = \Im \text{Tr}(xx') \quad (91)$$

其中, $\Im$ 代表取虚部, 此时取 $\ell_{+,0}, \ell_{-,0} \in i\mathbb{R}$, 则 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_R, \mathfrak{g})$ 构成一个 Manin 三元组. 与上一种情况类似, 将李代数 $\mathfrak{g}_R$ 与 $\mathfrak{g}$ 所对应的李群分别记作 G_R 与 G , 则分解 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_R \oplus \mathfrak{g}$ 提升到李群为 $G^{\mathbb{C}} = G_R G$.

边界条件(81)中的拉格朗日子代数 $\mathfrak{t}$ 此时可选为 $\mathfrak{g}_R$ 或 $\mathfrak{g}^\partial$, 类似地, 边界条件(84)中的拉格朗日子代数 $\mathfrak{t}$ 可选为 $\mathfrak{g}_R$ 或 $\mathfrak{g}$. 对于同一个Manin三元组中的两个拉格朗日子代数, 存在两种边界条件的选取方式, 在四维陈-西蒙斯理论的其它部分相同的情况下, 由经验可知这两种选取方式给出的二维可积场论往往互为泊松-李T对偶 (Poisson-Lie T-dual) [18, 35, 36], 例如杨-巴克斯特 σ 模型 (Yang-Baxter σ -model) 与主手征模型的 λ 形变 (λ -deformation of the principal chiral model) .

4.2.3 从四维陈-西蒙斯场论到二维可积场论

在选定1-形式 ω 和规范场 A 的边界条件后, 四维陈-西蒙斯理论作用量中 $\mathbb{CP}^1$ 上的积分可以被积掉, 进而给出 Σ 上的二维可积模型. 在通过形式规范变换 $A = \mathcal{L}^{\widehat{g}}$ 将规范场 A 表示为二维可积场论的拉克斯联络 $\mathcal{L}$ 与场 $\widehat{g}$ 后, 将其代回到作用量中可得:

$$S[\mathcal{L}, \widehat{g}] = \frac{i}{4\pi} \int_{\Sigma \times \mathbb{CP}^1} d\omega \wedge \text{Tr}(\widehat{g}^{-1} d\widehat{g} \wedge \mathcal{L}) + \frac{i}{12\pi} \int_{\Sigma \times \mathbb{CP}^1} \omega \wedge \text{Tr}(\widehat{g}^{-1} d\widehat{g} \wedge \widehat{g}^{-1} d\widehat{g} \wedge \widehat{g}^{-1} d\widehat{g}) \quad (92)$$

为了将作用量(92)中 $\mathbb{CP}^1$ 部分的积分积掉, 需要通过真实的规范变换 $\widehat{g} \mapsto u\widehat{g}$ 对 $\widehat{g}$ 进行调整, 使其满足如下条件:

- 用 U_x 指代 ω 的极点 $x \in \mathcal{Z}$ 周围互不相交的开圆盘, 则在 $\Sigma \times \sqcup_{x \in \mathcal{Z}} U_x$ 外有 $\widehat{g} = 1$;
- 对任意 $x \in \mathcal{Z}$, $\widehat{g}_x := \widehat{g}|_{\Sigma \times U_x}$ 只依赖于 Σ 上的坐标 t, x 与 $\mathbb{CP}^1$ 上的径向坐标 $r_x := |z - z_x|$;
- 对任意 $x \in \mathcal{Z}$, 存在开圆盘 $V_x \subset U_x$ 使得 $g_x := \widehat{g}|_{\Sigma \times V_x}$ 只依赖于 Σ 上的坐标 t, x .

这些条件被称作“群岛条件 (archipelago conditions)”. 可以构造规范变换 $u : \Sigma \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ 使得在 $\Sigma \times \sqcup_{x \in \mathcal{Z}} U_x$ 外有 $u = \widehat{g}^{-1}$ 且在 $\Sigma \times \mathcal{Z}$ 的某开邻域内有 $u = 1$, 此时第一个条件可以被满足. 第二、三个条件是否可以被满足取决于规范场 A 的边界条件的选取, 可以证明, 在上一小节中列举过的几种边界条件下第二、三个条件都可以被满足[18].

在通过规范变换使得 $\widehat{g}$ 满足群岛条件之后, 可以对作用量(92)中的 $\mathbb{CP}^1$ 方向进行积分, 得到如下二维作用量:

$$S[\{g_x\}_{x \in \mathcal{Z}}] = \frac{1}{2} \sum_{z_r \in \mathcal{Z}} \int_{\Sigma} \text{Tr}(\text{res}_{z_r}(\omega \wedge \mathcal{L}) \wedge g_{z_r}^{-1} dg_{z_r}) - \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{Z}} (\text{res}_x \omega) I_W \quad (93)$$

上式中, 实际上只有 $\{g_x : \Sigma \rightarrow G\}_{x \in \mathcal{Z}}$ 是独立的场变量, 因为规范场 A 的边界条件会在 $\mathcal{L}$ 与 $\{g_x : \Sigma \rightarrow G\}_{x \in \mathcal{Z}}$ 之间给出约束, 使得 $\mathcal{L}$ 可以用 $\{g_x : \Sigma \rightarrow G\}_{x \in \mathcal{Z}}$ 来表示. 由 $\varphi(z)$ 与 $\mathcal{L}$ 、 $\widehat{g}$ 的实条件(57)、(60)、(59)可知

$$\overline{\text{res}_x \omega \wedge \mathcal{L}} = \text{res}_{\bar{x}} \omega \wedge \mathcal{L}, \quad \overline{\text{res}_x \omega} = \text{res}_{\bar{x}} \omega \quad (94)$$

又由于 ω 的极点按复共轭对出现, 因此二维作用量(94)为实的.

下面以主手征模型[9]为例来进一步说明从四维陈-西蒙斯理论出发构造二维可积场论及其拉克斯联络的过程. 选取1-形式 ω 为

$$\omega = K \frac{1 - z^2}{(z - k)^2} dz \quad (95)$$

其中 $K, k \in \mathbb{R}$. ω 的极点集为 $\mathcal{Z} = \{k, \infty\}$, 二者都是二阶极点. ω 的零点集为 $\zeta = \{+1, -1\}$. 由前文中的讨论可知, 在 $\{k, \infty\}$ 处规范场 A 可以选取如下边界条件:

$$A_{\pm}|_{z=k} = A_{\pm}|_{z=\infty} = 0 \quad (96)$$

这里采取了光锥坐标, 即 $A_{\pm} = A_t \pm A_x$. 这个理论真正的规范变换 u 满足

$$u|_{z=k} = u|_{z=\infty} = \text{Id} \quad (97)$$

因而不改变规范场 A 的边界条件. 在规范变换 u 下, $\widehat{g}$ 的改变为 $\widehat{g} \mapsto u\widehat{g}$, 因而 $\widehat{g}$ 在 $z \in \{k, \infty\}$ 以外的自由度可以被 u 完全固定下来. 另一方面, 在将规范场 A “参数化”为 $\widehat{g}$ 和 $\mathcal{L}$ 的过程中还有一个自由度 $(\widehat{g}, \mathcal{L}) \mapsto (\widehat{g}^v, \mathcal{L}^v)$, 由于此变换仅仅是参数化过程中的自由度, 并不对 A 造成影响, 因此总是保持 A 的边界条件. 这个变换整体作用于 $\mathbb{CP}^1$, 因而可以被用来固定 $\widehat{g}$ 在 $\mathbb{CP}^1$ 上任意一点的值. 在固定 $\widehat{g}$ 的这些自由度之后, 剩下的自由度构成了二维场论的基本自由度. 固定 $g_{\infty} := \widehat{g}|_{z=\infty}$ 为 Id , 并引入如下记号:

$$g_k = g, \quad g_{\infty} = 1 \quad (98)$$

则边界条件(96)给出:

$$A|_k = -dg g^{-1} + \text{Ad}_g \mathcal{L}|_k = 0, \quad A|_\infty = \mathcal{L}|_\infty = 0 \quad (99)$$

由于 ω 的零点集为 $\zeta = \{+1, -1\}$, 可对拉克斯联络做如下拟设:

$$\mathcal{L} = \frac{V^1}{z-1} dx^+ + \frac{V^{-1}}{z+1} dx^- \quad (100)$$

其中 $V^{\pm 1} : \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$ 只依赖于 g . 求解边界条件(96)可知:

$$V^{\pm 1} = (k \mp 1)g^{-1}\partial_{\pm}g \quad (101)$$

直接计算可知:

$$\text{res}_k \omega = -2Kk \quad (102)$$

$$\text{res}_k \omega \wedge \mathcal{L} = -K((k-1)j_+ dx^+ + (k+1)j_- dx^-) \quad (103)$$

其中 $j_{\pm} := g^{-1}\partial_{\pm}g$. 利用公式(93)可知, 最终得到的作用量为:

$$S[g] = K \int \text{Tr}(j_+ j_-) dx^+ \wedge dx^- + Kk I_{\text{WZ}}[g] \quad (104)$$

主手征模型有着 $G_L \times G_R$ 的对称性, 对称变换按如下方式作用于场量

$$g \mapsto g_L g g_R, \quad g_L, g_R \in G \quad (105)$$

事实上, 此对称性可以从四维陈-西蒙斯理论的层面上看到. 简而言之, 理论的整体对称性来自于场 $\widehat{g}$ 中那些无法被真正的规范变换“规范掉”的自由度. 在主手征模型这个例子中, 真正的规范变换满足 $u|_{z=k} = u|_{z=\infty} = \text{Id}$, 因此违反此边界条件的变换刻画了整体对称性. 在 $z = k$ 处, 这样的变换 $u_k := u|_{z=k}$ 对场 g 的作用为 $g \mapsto u_k g$, 这对应于主手征模型的 G_L 对称性; 在 $z = \infty$ 处, 变换 $u_\infty := u|_{z=\infty}$ 会使得 $g_\infty = 1$ 变为 $g_\infty = u_\infty$, 为保持 $g_\infty = 1$ 不变, 需要利用 $\widehat{g}$ 的自由度 $\widehat{g} \mapsto \widehat{g}v$ 来重新固定 $g_\infty = 1$, 即取 $v = u_\infty^{-1}$, 在此变换下, g 会成为 $g \mapsto g u_\infty^{-1}$, 这对应于主手征模型的 G_R 对称性.

在以上推导过程中, 自由度 $\widehat{g} \mapsto \widehat{g}v$ 被用于固定 g_∞ . 如果不做这一步固定而是引入新的场 $\widetilde{g} := g_\infty$, 则四维陈-西蒙斯理论会给出主手征模型的规范

形式. 它有两个取值在 G 的场 $(g, \widetilde{g})$ 和一个来自于变换 $\widehat{g} \mapsto \widehat{g}v$ 的局域对称性 $(g, \widetilde{g}) \mapsto (gv, \widetilde{g}v)$.

在通过无序缺陷构造二维可积场论的过程中, 黎曼面 C 、1-形式 ω 、边界条件以及规范选取共同决定了所得的二维可积场论. 通过调整这些元素, 可以得到很多种不同的可积场论, 如可积场论的 λ 形变和杨-巴克斯特形变、靶空间为陪集空间的可积 σ 模型, 通过将规范代数取为李超代数, 四维陈-西蒙斯理论也可以给出含有费米自由度的 σ 模型, 这其中就包含了 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上的格林-施瓦茨超弦 (Green-Schwarz superstring), 其微分同胚不变性和 κ -对称性也可以通过四维陈-西蒙斯理论来讨论[27].

5 总结与展望

本文回顾了四维陈-西蒙斯理论与可积模型之间的关系, 包括四维陈-西蒙斯理论与杨-巴克斯特方程之间的联系, 以及可积格点模型与可积场论的构造方式. 特别地, 对于二维可积场论, 本文介绍了有序缺陷与无序缺陷两种构造方式. 除了本文中提到的例子, 尽管还有很多广为人知的可积模型可以从四维陈-西蒙斯理论出发得到, 但由于篇幅所限, 本文难以对其构造进行深入讨论. 以下是四维陈-西蒙斯理论相关后续研究的展望:

可积场论的量子化 对于给定的经典可积场论, 一个重要问题是它是否能在量子化后维持可积性. 量子可积结构与杨-巴克斯特方程之间存在着深刻的联系, 而人们对于四维陈-西蒙斯理论与杨-巴克斯特方程、经典可积场论之间的联系都有着较为充分的研究, 因此, 四维陈-西蒙斯理论可以为这个问题提供新的视角. 受早些时候有关可积场论离散化的研究启发[37–40], 对于四维陈-西蒙斯理论中的有序缺陷, 尤其是手征和反手征缺陷, 可以对其在特定方向上进行离散化, 使之成为由一维缺陷组成的网络, 而很多情况下这些一维缺陷等价于威尔逊线[9, 29]. 如前文中所讨论的, 这些威尔逊线与四维陈-西蒙斯理论的耦合会给出可积格点模型. 借助这个过程, 可以将格点模型与可积场论的量子可

积结构联系在一起.然而,对四维陈-西蒙斯理论的无序缺陷,离散化该如何做还是个有待研究的问题.特别地,对于无序缺陷的情形,二维可积模型的拉克斯联络的空间分量之间的泊松括号包含 δ -函数的导数,这为其量子化带来了困难[32].通过对四维陈-西蒙斯理论中无序缺陷的离散化研究,有望解决这个问题.

可积场论的对偶网络 在四维陈-西蒙斯理论的层面,多种一维缺陷相互之间存在着等价关系.在对相互等价的不同一维缺陷网络取连续化极限之后,会给出不同的二维缺陷,通过这些二维缺陷得到的可积场论相互之间是对偶的[29].对于由多个手征或反手征缺陷给出的可积场论,可以分别对每一个缺陷做离散化后取其对偶,再取连续化极限来得到与这个可积场论对偶的场论.这会给出可积场论之间的庞大对偶网络.目前这方面的研究主要还是集中在手征或反手征的有序缺陷的情形,对于考虑更一般的缺陷时二维可积场论之间的对偶网络,还有待进一步研究.

可积 σ -模型的重整化 可积模型的重整化也可以借助四维陈-西蒙斯理论来讨论.通常认为,可积的 σ 模型是可重整的,且其重整化与靶空间的几何特性相关[41–45].对于可以由四维陈-西蒙斯理论构造的可积 σ -模型,其连续参数来源于四维陈-西蒙斯理论的作用量中1-形式 ω -中的参数[44].因而在四维陈-西蒙斯理论的层面做微扰计算有助于我们更好地理解可积 σ 模型重整化群流的一般性质[46].

六维陈-西蒙斯理论 在更早的时候,人们曾提出过另外一种生成可积模型的方式,其出发点是四维的反自对偶杨-米尔斯方程,通过对这个方程做各种对称性约化,可以得到各种可积模型的运动方程[47–49].人们发现,四维陈-西蒙斯理论与四维反自对偶杨-米尔斯方程存在着一个共同的根源,即定义在扭量空间(twistor space)上的所谓六维全纯陈-西蒙斯理论(six-dimensional holomorphic Chern-Simons theory)[50–54].这个理论的作用

量如下

$$S_{\text{hCS}_6}[\mathcal{A}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{PT}} \Omega \wedge \text{Tr} \left(\mathcal{A} \wedge \bar{\partial} \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right) \quad (106)$$

其中, Ω 为扭量空间上亚纯的(3,0)-形式.扭量空间在局部可以视为 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{R}^4$.若在 $\mathbb{R}^4$ 中的两个方向上对六维全纯陈-西蒙斯理论做对称性约化,可以得到四维陈-西蒙斯理论;若将作用量中的 $\mathbb{CP}^1$ 方向积掉,可以得到特定规范下的反自对偶杨-米尔斯方程,而这两种四维理论又可以进一步成为构造二维可积场论的出发点.可以用“钻石”图5来总结这个构造过程.在近期的研究中,人们还发现可以通过六维陈-西蒙斯理论去理解双曲单极子与广义的手征波茨模型(chiral Potts model)之间的对应关系[55].对这个理论的深入探索是个有趣的方向.

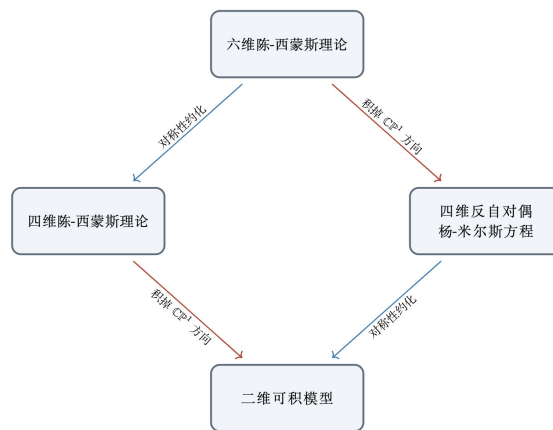


图5 六维陈-西蒙斯理论的“钻石图”

Figure 5 The ‘diamond diagram’ of six-dimensional Chern-Simons theory.

超弦模型构造 正如前文中提到过的,超弦理论也可以通过四维陈-西蒙斯理论构造出来[27,28].与通常的 σ 模型不同,超弦理论的世界面度规是动力学的,存在微分同胚不变性,且超弦理论中还存在 κ -对称性.人们发现,对于 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 上的格林-施瓦茨超弦,这些特性可以通过在四维陈-西蒙斯理论中添加Beltrami微分项来得到[27].如何借助四维陈-西蒙斯理论加深对超弦理论中的可积结构的理解,以及如何将这个关系推广到更一般的超弦理论中,这些都是未来值得研究的方向.

带边可积场论的构造 对于带边的可积模型, 边界处发生的散射由 K -矩阵或边界 S -矩阵所描述, 它们满足边界杨-巴克斯特方程[56, 57] (boundary Yang-Baxter equation). 从四维陈-西蒙斯理论出发, 通过考虑特定的轨形 (orbifold) 背景, 可以给出满足

边界杨-巴克斯特方程的 K -矩阵, 因而可以构造带边界的可积格点模型[10, 11]. 但如何通过四维陈-西蒙斯理论构造带边的可积场论, 目前还是个有待研究的问题.

致谢 贺一珺感谢江苏省卓越博士后计划的支持. 陈斌的工作得到了国家自然科学基金委项目 (项目号: No. 11735001, 12275004) 的支持.

参考文献

- 1 Witten E. Gauge theories and integrable lattice models. Nucl Phys B, 1989, 322: 629 – 697
- 2 Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial. Commun Math Phys, 1989, 121: 351 – 399
- 3 Costello K. Supersymmetric gauge theory and the Yangian. 2013. arXiv:1303.2632
- 4 Costello K. Integrable lattice models from four-dimensional field theories. In: Donagi R, Douglas M R, Kamenova L, et al., eds. String-Math 2013. Providence: American Mathematical Society, 2014. 3 – 24
- 5 Nekrasov N A. Four-Dimensional Holomorphic Theories. Princeton: Princeton University, 1996
- 6 Witten E. Integral lattice models from gauge theory. ICCM Not, 2018, 06: 35 – 45
- 7 Costello K, Witten E, Yamazaki M. Gauge theory and integrability, I. ICCM Not, 2018, 06: 46 – 119
- 8 Costello K, Witten E, Yamazaki M. Gauge theory and integrability, II. ICCM Not, 2018, 06: 120 – 146
- 9 Costello K, Yamazaki M. Gauge theory and integrability, III. 2019. arXiv:1908.02289
- 10 Bittleston R, Skinner D. Gauge theory and boundary integrability. JHEP, 2019, 05: 195
- 11 Bittleston R, Skinner D. Gauge theory and boundary integrability. Part II. Elliptic and trigonometric cases. JHEP, 2020, 06: 080
- 12 Costello K, Gaiotto D, Yagi J. Q-operators are 't Hooft lines. 2021. arXiv:2103.01835
- 13 Ashwinkumar M, Tan M C, Zhao Q. Branes and categorifying integrable lattice models. Adv Theor Math Phys, 2020, 24: 1 – 24
- 14 Costello K, Yagi J. Unification of integrability in supersymmetric gauge theories. Adv Theor Math Phys, 2020, 24: 1931 – 2041
- 15 Ishtiaque N, Moosavian S F, Raghavendran S, et al. Superspin chains from superstring theory. SciPost Phys, 2022, 13: 083
- 16 Caudrelier V, Stoppato M, Vicedo B. On the Zakharov – Mikhailov action: 4D Chern – Simons origin and covariant Poisson algebra of the Lax connection. Lett Math Phys, 2021, 111: 82
- 17 Fukushima O, Sakamoto J, Yoshida K. Faddeev-Reshetikhin model from a 4D Chern-Simons theory. JHEP, 2021, 02: 115
- 18 Delduc F, Lacroix S, Magro M, et al. A unifying 2D action for integrable σ -models from 4D Chern – Simons theory. Lett Math Phys, 2020, 110: 1645 – 1687
- 19 Bassi C, Lacroix S. Integrable deformations of coupled σ -models. JHEP, 2020, 05: 059
- 20 Schmidt D M. Holomorphic Chern-Simons theory and lambda models: PCM case. JHEP, 2020, 04: 060
- 21 Fukushima O, Sakamoto J, Yoshida K. Comments on η -deformed principal chiral model from 4D Chern-Simons theory. Nucl Phys B, 2020, 957: 115080
- 22 Hoare B, Lacroix S. Yang – Baxter deformations of the principal chiral model plus Wess – Zumino term. J Phys A, 2020, 53: 505401
- 23 Schmidt D M. Symmetric space λ -model exchange algebra from 4d holomorphic Chern-Simons theory. JHEP, 2020, 21: 004
- 24 Fukushima O, Sakamoto J, Yoshida K. Yang-Baxter deformations of the $AdS_5 \times S^5$ supercoset sigma model from 4D Chern-Simons theory. JHEP, 2020, 09: 100
- 25 Tian J. Comments on λ -deformed models from 4D Chern-Simons theory. 2020. arXiv:2005.14554
- 26 Tian J, He Y J, Chen B. λ -Deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring from 4D Chern-Simons theory. Nucl Phys B, 2021, 972: 115545
- 27 Costello K, Stefański B. Chern-Simons origin of superstring integrability. Phys Rev Lett, 2020, 125: 121602
- 28 Berkovits N, Pitombo R S. 4D Chern-Simons and the pure spinor $AdS_5 \times S^5$ superstring. Phys Rev D, 2024, 109: 106015
- 29 Ashwinkumar M, Sakamoto J, Yamazaki M. Dualities and discretizations of integrable quantum field theories from 4d Chern-Simons theory. 2023. arXiv:2309.14412
- 30 Sklyanin E K. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Funct Anal Appl, 1982, 16: 263 – 270

- 31 Maillet J M. Kac-moody algebra and extended Yang-Baxter relations in the $O(N)$ nonlinear σ model. *Phys Lett B*, 1985, 162: 137 – 142
- 32 Maillet J M. New integrable canonical structures in two-dimensional models. *Nucl Phys B*, 1986, 269: 54 – 76
- 33 Lacroix S. Integrable models with twist function and affine Gaudin models. PhD Thesis. Lyon: Ecole Normale Supérieure, 2018. arXiv:1809.06811
- 34 Drinfeld V G. Quantum groups (in Russian). *Zap Nauchn Semin*, 1986, 155: 18 – 49
- 35 Lacroix S, Vicedo B. Integrable E-Models, 4d Chern-Simons theory and affine Gaudin models. I. Lagrangian aspects. *SIGMA*, 2021, 17: 058
- 36 Lacroix S. Four-dimensional Chern – Simons theory and integrable field theories. *J Phys A*, 2022, 55: 083001
- 37 Destri C, de Vega H J. Light cone lattice approach to fermionic theories in 2-D: The massive Thirring model. *Nucl Phys B*, 1987, 290: 363 – 391
- 38 Destri C, de Vega H J. Integrable quantum field theories and conformal field theories from lattice models in the light cone approach. *Phys Lett B*, 1988, 201: 261 – 268
- 39 Destri C, de Vega H J. Bethe-Ansatz and quantum groups: The light cone lattice approach. 1. Six vertex and SOS models. *Nucl Phys B*, 1992, 374: 692 – 719
- 40 Destri C, de Vega H J. Bethe ansatz and quantum groups: The light cone approach. 2. From RSOS(p+1) models to p restricted Sine-Gordon field theories. *Nucl Phys B*, 1992, 385: 361 – 391
- 41 Fateev V A, Onofri E, Zamolodchikov A B. Integrable deformations of the $O(3)$ sigma model. The sausage model. *Nucl Phys B*, 1993, 406: 521 – 565
- 42 Squellari R. Yang-Baxter σ model: Quantum aspects. *Nucl Phys B*, 2014, 881: 502 – 513
- 43 Itsios G, Sfetsos K, Siampos K. The all-loop non-Abelian Thirring model and its RG flow. *Phys Lett B*, 2014, 733: 265 – 269
- 44 Delduc F, Lacroix S, Sfetsos K, et al. RG flows of integrable σ -models and the twist function. *JHEP*, 2021, 02: 065
- 45 Levine N. Universal 1-loop divergences for integrable sigma models. *JHEP*, 2023, 03: 003
- 46 Levine N. Equivalence of 1-loop RG flows in 4d Chern-Simons and integrable 2d sigma-models. 2023. arXiv:2309.16753
- 47 Ward R S. Integrable and solvable systems, and relations among them. *Philos Trans R Soc Lond A*, 1985, 315: 451 – 457
- 48 Ward R S. Integrable systems in twistor theory. In: *Twistors in Mathematics and Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 246 – 259
- 49 Mason L J, Woodhouse N M J. Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory. Oxford: Oxford University Press, 1996
- 50 Bittleston R, Skinner D. Twistors, the ASD Yang-Mills equations and 4d Chern-Simons theory. *JHEP*, 2023, 02: 227
- 51 Penna R F. Twistor actions for integrable systems. *JHEP*, 2021, 09: 140
- 52 He Y J, Tian J, Chen B. Deformed integrable models from holomorphic Chern-Simons theory. *Sci China Phys Mech Astron*, 2022, 65: 100413
- 53 Cole L T, Cullinan R A, Hoare B, et al. Integrable deformations from twistor space. *SciPost Phys*, 2024, 17: 008
- 54 Cole L T, Cullinan R A, Hoare B, et al. Gauging the diamond: Integrable coset models from twistor space. 2024. arXiv:2407.09479
- 55 Moosavian S F, Yamazaki M, Zhou Y. Hyperbolic monopoles, (semi-)holomorphic Chern-Simons theories, and generalized chiral Potts models. 2025. arXiv:2502.17545
- 56 Cherednik I V. Factorizing particles on a half line and root systems. *Theor Math Phys*, 1984, 61: 977 – 983
- 57 Sklyanin E K. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J Phys A*, 1988, 21: 2375 – 2389

Four-dimensional Chern-Simons Theory and Integrable Models

Yi-Jun He¹ & Bin Chen^{2,3*}

1. School of physics & Shing-Tung Yau Center, Southeast University, Nanjing 211189, China;;

2. Institute of Fundamental Physics and Quantum Technology & School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China;;

3. School of Physics & Center for High Energy Physics, Peking University, Beijing 100871, China

In this review, we introduce the connections between the four-dimensional Chern-Simons theory and integrable models, including the relationship with integrable lattice models and integrable field theories. Due to the connection between the four-dimensional Chern-Simons theory and the Yang-Baxter equation, the partition function of integrable lattice model can be naturally obtained from the four-dimensional Chern-Simons theory. By introducing the two-dimensional surface defects into the four-dimensional Chern-Simons theory, two-dimensional classical integrable field theories can also be constructed. We review two ways to construct integrable field theories using either ordered or disordered defects, and provide a detailed exposition on extracting the Lax connection and the action of the two-dimensional integrable field theories from the four-dimensional Chern-Simons theory. Finally, we discuss the subsequent research developments related to the four-dimensional Chern-Simons theory and offer an outlook on future directions.

Integrable Systems, Chern-Simons Theory, Yang-Baxter Equation

PACS: 02.30.Ik, 11.15.-q, 05.50.+q, 03.50.-z

doi: ??