文章编号：1002-0268（2001）05-0055-04

收费公路交通量分担模型建立与分析

康彦民
（河北省高速公路管理局，河北 石家庄，050051）

摘要：在系统效用最大化前提下，建立了收费道路交通量分担模型，提出模型中参数的标定方法和模型的数值解法，并结合实例对模型进行标定。利用所建立的模型可预测路网交通量在多条路线上的分配比率，并可利用弹性定义分析不同服务属性对道路用户选择路线的影响，亦可作为收费道路收费收入-费率关系模型的基础，计算其最大收费收入和相应的最优费率以及预测交通量水平下的费率标准。

关键词：收费道路；分担模型；广义行程费用；网络分配；效用函数
中图分类号：U491.113 文献标识码：A

Theory and Analysis of Traffic Volume Sharing Model of Toll Road

KANG Yan-min
（Hebei Provincial Expressway Administration Bureau，Hebei Shijiazhuang 050051，China）

Abstract：On the base of maximum system efficiency，traffic volume sharing model of toll road was developed，with an example provided，as well as the estimation of coefficient and arithmetic solution. This model can be used to forecast network traffic assignment，analyse the effect of service propriety on user choice with elastic theory，and as a base for the toll rate model. It also can calculate the maximum toll，the optimum toll rate.

Key words：Toll road；Sharing model；General travel cost；Network assignment；Effect function

0 引言

网络分配是运输系统规划的一个重要环节，作为设计交通量的一种研究方法，可为路网规划、决策提供依据。目前普遍采用的网络分配方法有平衡分配模型和非平衡分配模型。这两大类模型都不同程度地存在偏重某一方面而忽略其它因素的缺陷。基于此，本文引入了效用函数的概念[1]，在出行者对路线选择行为准则并遵循 Wandrop 第一分配准则基础上[2]，提出了一种新的平衡分配方法，其优点在于在出行者选择路线的概率与效用函数之间建立起直接的联系。效用函数主要由路线的广义行程费用决定，它由历史数据而非盲目按道路服务属性的重要性加权确定，与实际情况相符合的程度大大提高；此外，可以通过路线选择概率对道路服务属性的弹性的定义，来分析其对道路用户选择路线的影响。

1 问题的描述及模型的建立

路网中的某一个运输通道系统，通常由多条路线组成。不同的路线，由于道路技术等级、路面类型、交通管理和路况等条件的不同，因而其在时间、费用、安全、方便与舒适等方面具有不同的服务特性。出行者对出行路线的选择，主要考虑其广义费用的大小。不同的出行者由于其社会经济特征不同，因此在出行时会选择不同的出行路线。

假设某一运输通道系统由 M 条路线组成，每条路线有 K 种服务属性。任意一条出行路线 i（$i \in M$）可以用一个服务属性向量来表示

$$Z = (z_{i1}, \ z_{i2}, \ \cdots z_{ij}, \ \cdots z_{ik}) \tag{1}$$

其中，z_{ij} 为第 i 条路线的第 j 种服务属性（$j \in K$）。

当人们出行时，对出行路线的服务属性总是抱有这样或那样的愿望，由于不同的路线具有不同的服务

收稿日期：2000-11-29
作者简介：康彦民（1966—），男，河北石家庄人，河北省高速公路管理局副局长，高级工程师.

属性，出行者选择不同的出行路线时，其愿望获得满足的程度不同。出行者总是试图选择能够最大限度满足其愿望的路线出行。某条线路对出行者愿望满足的程度，即其效用（utility）。当出行者选择一条出行路线获得满足的程度大于另外一条路线时，我们说前者的效用大于后者；反之则小于后者[3]，在此我们假定：

1. 出行者是理性的，即出行者总是选择具有最大效用的路线出行，此即遵循效用最大的原则。

2. 出行者全面掌握交通信息。

假定出行路线对于出行者的效用与其服务属性之间有线性关系，则可以建立如下效用函数

$$u=\beta_1 z_{i1}+\beta_2 z_{i2}+\cdots+\beta_j z_{ij}+\cdots+\beta_k z_{ik}+e_i \qquad (2)$$

式中，u_i 为出行路线 i 对出行者的效用；β_i 为系数；e_i 为系统效用的随机部分。

由（2）式可以看出，系统的效用函数由两部分构成，即确定部分和随机部分。$\sum_{j=1}^{k}\beta_j z_{ij}$ 反映了出行路线 i 的服务属性（成本费用、行程时间、道路收费）对出行者选择路线的影响，对于某一具体出行者来说，是个确定值。而 e_i 是一个随机变量，是基于以下几点提出的：

1. 有些服务属性如安全性、舒适性等，尽管对选择路线有影响，但不易定量表达。

2. 我们在前面假定出行者能正确掌握各条路线的交通信息，这与现实有一定差距。

3. 出行者对路线的选择并非总是遵循效用最大原则，其选择行为往往带有某种程度的随机性。

由此可见，某一条路线 i 对出行者的效用并非确定值，而是一个按一定概率取不同数值的随机数。它反映了这样一种可能性，即同一条出行路线的某种服务属性或几种服务属性的组合，对于不同的出行者或同一出行者在不同条件下，其实际感受到的效用是不同的。

对于这种具有随机性质的效用，我们可以计算出行者选择第 i 条路线的概率[4]，即

$$p_i=P\{u_i>u_j,j\neq i,\ i,j\in M\} \qquad (3)$$

令 $v_i=\sum\beta_j z_{ij}$

根据式(2)、(3)可进一步表示为

$$\begin{aligned}p_i&=P[v_i+e_i>v_j+e_j,j\neq i,\ i,j\in M]\\&=P[e_j>v_i-v_j+e_i,j\neq i,\ i,j\in M]\\&=\int_{e_i}F[v_i-v_j+e_i,j\neq i,\ i,j\in M]\cdot f_i(\phi)\cdot \mathrm{d}\phi\end{aligned} \qquad (4)$$

式中：$F[*]$ 为随机变量（e_1，e_2，…，e_m）的联合分布函数；f_i（ϕ）为随机变量 e_i 的边际密度函数。

对于随机变量 e_i（$i\in M$），要确定其分布，必须具备对出行者在同样场合下的出行路线选择行为进行完全控制，而且可以进行反复观测实验的条件，这在实际中是不容易做到的。通常采取的处理办法是对随机变量 e_i（$i\in M$）进行假设。

在运输需求分析中，通常假定 e_i（$i\in M$）是相互独立的，而且具有双指数（Gumbl）函数分布[5]，即

$$Fe(x)=\mathrm{e}^{-\theta\mathrm{e}^{-x}},\ \theta>0,-\infty<x<\infty$$

把 Fe（x）代入（4）式可以得到如下结果

$$\begin{aligned}p_i&=\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j\neq i}\exp[-\theta\mathrm{e}^{-(v_i-v_j+x)}]\,\theta\mathrm{e}^{-\theta}\mathrm{e}^{-\theta\exp(-x)}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j\neq i}\exp[-\theta\mathrm{e}^{-(v_i-v_j+x)}]\,\theta\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big[-\theta\mathrm{e}^{-x}\sum_{j=1}\mathrm{e}^{-(v_i-v_j)}\Big]\,\theta\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sum_i\mathrm{e}^{-(v_i-v_j)}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{v_i}}{\sum_j\mathrm{e}^{v_j}}\end{aligned} \qquad (5)$$

式（5）称为多项式分对数模型，即本文所要建立的模型。

利用式（5）可以对一个出行者或出行者群体的路线选择行为进行模拟计算，其结果对单一出行者而言，可以表示其选择出行路线 i（$i\in M$）的概率；而对于出行者群体而言则可以表示出行者总数中选择出行路线、i（$i\in M$）的人所占比例。

2 模型的标定

式（5）中的系数 β_j，是出行者给予第 j 种服务属性的权重，它取决于出行者的社会经济特征，反映出行者对该种服务属性的重视程度，或者说反映了第 j 种服务属性对于出行者选择路线的影响程度，可以采用最大似然法来标定系数 β_j，（$j\in K$）。

当人们出行时，出行者选择路线的过程可看作是相互独立的，这样，N 个出行者选择出行路线，可以看作是 N 重贝努利实验。那么，假设 N 个出行者中选择 M 条路线的人数分别为 N_1、N_2、...、N_M，其联合分布函数（似然函数）可以表示为

$$\Lambda = P(N_1, N_2, \cdots, N_M|\beta) = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdots N_M!}\prod_j p_i^{N_i} \quad (6)$$

为了得到的最大似然估计值，把 Λ 取对数，（Λ 和 $ln\Lambda$ 在相同点取得极值），并舍去常数项，$\frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdots N_M!}$ 用 Λ^* 表示简化后的结果

$$\Lambda^* = \sum N_i \ln p_i \quad (7)$$

式中，N_i 为选择出行路线 i 的人数；p_i 为选择的概率；β 为系数向量，$\beta_j=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$。

然后，将 Λ^* 分别对 β_1，β_2，…，β_k 求偏导，并令导数为零，得到以下方程组

$$\frac{\partial\Lambda^*}{\partial\beta_1}=0,\quad \frac{\partial\Lambda^*}{\partial\beta_2}=0,\quad \frac{\partial\Lambda^*}{\partial\beta_k}=0 \quad (8)$$

上述方程组整理出来后是一个指数形式的非线性方程组，用数值方法解该方程组，即可确定系数 β_1，β_2，…，β_k)。

下面结合京石运输通道系统实例来对模型进行标定示例。

京石运输通道系统由京石高速公路和原 107 线构成，因此 $M=2$。

首先确定其中的服务属性变量。出行者在对路线进行选择时，对其选择行为影响最大，服务属性主要是运营成本 C_{pt}、行程时间 C_{ta} 和收费 $toll$。这样，效用函数的确定部分可作如下表示

$$v_i=\beta_1 C_{pt}+\beta_2 C_{ta}+\beta_k toll \quad (9)$$

通过调查得到的历史数据如表 1 所示。

表 1

出行路线	运营成本 C_{pt}（元/车）	时间费用 C_{ta}（元/车）	道路收费 $toll$（元/车）	交通量（辆/昼夜）
107 线	109.12	8.46	0	3159
京石高速	75.73	1.61	28.46	1367

根据上述最大似然法原理，把表中数据代入式(5)、(6)，得到如下似然函数($N=4526$，$M=2$)

$$\Lambda = \frac{N!}{N_1!\ N_2!}\prod_{i=1}^{2} p_i^{N_i} = \frac{4\,526!}{3\,159!\,1\,367!}p_1^{3159}p_2^{1367}$$

$$\Lambda^* = \sum_{i=1}^{2} N_i \ln p_i = 3\,159\ln p_1 1\,367\ln p_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2} N_i \frac{e^{\beta_i c_{pti}+\beta_2 C_{tai}+\beta_3 toll_i}}{\sum_{j=1}^{2} e^{\beta_i c_{pti}+\beta_2 C_{tai}+\beta_3 toll_j}}$$

将 Λ^* 分别对 β_1，β_2，β_3 求偏导，并经整理得到如下方程组：

基于牛顿迭代法编制专用程序解上述方程组，得到 $\beta_1=-0.1161$，$\beta_2=-0.315$，$\beta_3=0.24$ 代入式(5)，得到如下模型

$$p_i=\frac{e^{-0.1161C_{pti}-0.315C_{tai}-0.24toll_i}}{\sum_{j=1}^{2} e^{-0.1161C_{pti}-0.315C_{tai}-0.24toll_j}} \quad (10)$$

$$10.08e^{109.12\beta_1+8.46\beta_2}-23.31e^{75.73\beta_1+1.61\beta+28.46\beta_3}=0$$

$$2.07e^{109.12\beta_1+8.46\beta_2}-4.78e^{75.73\beta_1+1.61\beta+28.46\beta_3}=0$$

$$6.95e^{109.12\beta_1+8.46\beta_2}-19.87e^{75.73\beta_1+1.61\beta+28.46\beta_3}=0$$

利用上式可以计算出行者选择不同路线出行的概率，其计算值与实际调查数据的比较结果如表 2 所示。

表 2

出行路线	选择路线的人数比例		选择路线的人数		误差
	计算值 p_i	实际值 p_j	计算值 $p_i \cdot N$	实际值 $p_j \cdot N$	
107 线	69.73	69.80	3156	3159	−0.001
京石高速	30.27	30.20	1370	1367	+0.002

可以看出，计算值与实际值非常接近，说明所建立的模型具有很高的精度。

3　交通量分担模型的用途

3.1　根据不同服务属性对用户路线选择行为的影响

根据所建立的分对数模型，选择路线 i 的概率对其第 j 种服务属性的弹性可按下式确定

$$E(z_{ij}) = \frac{\partial p_i}{\partial z_{ij}}\frac{z_{ij}}{p_i} = \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{e^{v_i}}{\sum_{k=1}^{M} e^{v_k}}\right) \cdot \frac{z_{ij}\sum_{k=1}^{M} e^{v_k}}{e^{v_i}}$$

$$=\frac{\partial p_i}{\partial z_{ij}}(1-p_i)\cdot z_{ij}=\beta_i\cdot(1-p_i)\cdot z_{ij} \quad (11)$$

式中 $E(z_{ij})$ 为选择出行路线 i 的概率对该路线第 j 种服务属性的弹性，把表 1、表 2 中的数据代入式(11)，即可计算出行者选择不同路线的概率对不同服务属性的弹性值。路线选择概率对 3 种服务属性的弹性值如表 3 所示

表 3

出行路线	运营成本 C_{pt}	弹性 $E(C_{ta})$	时间价值 C_{ta}	弹性 $E(C_{ta})$	道路收费 $toll$	弹性 $E(toll)$
107 线	109.12	−3.83	8.46	−0.81	0	0
京石高速	75.73	−6.12	1.61	−0.04	28.46	−4.76

在表 3 中，概率 p_i 对 3 种服务属性的弹性均为负值，表明运营成本、时间价值和收费的变化趋势与概率的变化趋势是相反的。比较概率对三种服务属性值又可看出，收费的弹性明显大于行程时间价值的弹性，这说明对于一般道路用户来说，道路收费是影响其路线选择行为的主要因素，此外运营成本对路线选择也很敏感，这与实际情况也是相符的。

3.2　作为分车型收费收入-费率模型的基础

研究表明，收费道路的收费收入与费率具有一定的函数关系。一般说来，在交通运输通道系统交通量一定的情况下，收费道路的交通量在饱和交通量以下时，收费道路由于其优良的使用性能而吸引大量交通量，随着费率的增加收费收入增加；当收费费率超过一定程度时，交通量会大幅度降低，收费收入反而减少。三者之间存在如下关系

$$S = f \circ Q$$

$$Q = Q_{总} \circ p_{高速}$$

所以

$$S = f \circ Q_{总} \circ p_{高速} = f \circ Q_{总} \circ \frac{e^{v_i}}{\sum_j e^{v_j}}$$

$$= f \circ \frac{e^{v_i}}{\sum_j e^{v_j}} \circ Q_{总} = f \circ \frac{e^{\beta_i c_{pti} + \beta_2 C_{tai} + \beta_3 toll_i}}{\sum_{j=1} e^{\beta_i c_{pti} + \beta_2 C_{tai} + \beta_3 toll_i}} \circ Q_{总} \tag{12}$$

其中， $Q_{总}$ ——运输通道总交通量；

$p_{高速}$ ——高速公路对运输通道交通量的分担百分率。

目前，收费道路的收费标准主要由省、市级物价、交通主管部门根据公路等级、里程、投资规模和车辆类型审定，报省、市级人民政府批准。这样制定的收费标准不能充分反映车辆营运的成本和效益，而且高速公路的建设者和管理者的利益也得不到保证。因此，研究在系统效益最大前提下制定合理的收费标准具有十分重要的现实意义。

本文所提出的交通量分担模型，为解决这一问题提供了崭新的科学思路，并提供了切实可行的数值解法，因此，可作为一种新的收费收入-费率模型的核心予以采用，结合优化技术可得到问题的最优解。仍以京石运输通道为例。在以 Basic 语言编制专用程序求解服务属性系数向量的基础之上，以 Matlab 为平台开发出用于分析收费收入-费率关系的程序，该程序可模拟二者的动态关系绘出收费收入-费率关系曲线(图 1)，同时计算最大收费收入及与之相应的最优费率值。将上面已计算出的向量值 β_j 代入该程序并以计算精度控制循环次数，计算出最大收费收入 $S=31.52$ 万元/天，相应的最大优费率为 $f=63.74$ 元/车。

3.3　预测未来交通量水平下的收费费率

根据高速公路运输的特性，直接影响其经济效益和财务效益的最主要因素是交通流量的大小。而交通流量的大小又取决于高速公路相关地区经济水平、运输车辆的保有量、高速公路的行驶费用（包括车辆的行驶成本和通行费用）及用户对行驶费用的支付意愿。如果只考虑行驶费用对高速公路交通流量的影响，则行驶费用与交通量的关系如图 1 所示。

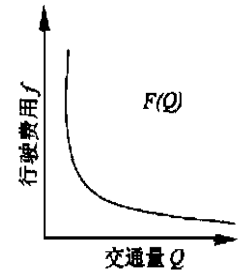

图 1　费用-流量关系示意图

因此，当交通量变化后，收费标准相应地也要进行调整，以适应变化后的交通量水平。以变化后的交通量重新计算分担率系数计算程序和求解最优费率的程序，即可得到新的交通量水平下的收费标准，其方法与过程与前面讲述的相同。采用预测交通量即可预测高速公路在规划年限的收费标准。

4　结语

本文提出了一种计算新的分担模型标定和计算方法，利用弹性理论分析了不同服务属性对道路用户路线选择行为的影响，是敏感性分析方法之又一种简便的方法。该方法建模和解题思路明晰，编程简洁，可操作性强，但要求相关的交通量及车辆行驶的技术经济指标观测和调查资料要翔实、客观、准确。在有完整历史资料及交通量预测资料的基础上，还可预测相应未来交通量变化收费水平，为高速公路的收费工作提供科学的参考和依据。

参考文献：

[1]　姜广峰，孙亚峰．现代西方经济学原理．东北财经大学出版社，1999-02.

[2]　黄海军．城市交通网络平衡分析原理与实践．人民交通出版社，1994-10.

[3]　张金水．数理经济学——理论与应用．清华大学出版社，1998-03.

[4]　盛骤，谢式千，潘承毅．概率论与数理统计．高等教育出版社，1979-03.

[5]　杨兆升．交通运输规划与模型．人民交通出版社，1995