



斜冲击动荷系数的能量法推导

张建伟, 赵思伟, 苗同臣, 王利霞

(郑州大学 力学与安全工程学院, 郑州 450001)

摘要: 冲击问题是工程中常见的问题, 也是材料力学授课的重要组成部分。然而一般授课中只讲竖直冲击和水平冲击问题, 对于工程中可能遇到的斜冲击问题暂无涉及。该文针对斜冲击问题, 采用能量方法对动荷系数进行了推导。结果表明: 对于斜冲击动荷系数, 水平杆的水平冲击问题取极大值, 竖直梁的水平冲击问题取极小值, 得到的斜冲击动荷系数可以退化到水平冲击和竖直冲击。并用有限元数值模拟进行了验证, 数值解与理论解相对差不超过 1.5%。该结果有助于深入了解冲击问题, 对材料力学的教学和工程应用问题的分析具有重要意义。

关键词: 斜冲击; 动荷系数; 能量法; 水平冲击; 竖直冲击

中图分类号: O341

文献标志码: A

DOI: 10.12179/1672-4550.20210586

Derivation of Dynamic Factor for Oblique Impact Using Energy Method

ZHANG Jianwei, ZHAO Siwei, MIAO Tongchen, WANG Lixia

(School of Mechanics and Safety Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Impact problem is a common problem in engineering, and it is also an important part of mechanics of material. In general teaching process of mechanics of material teaching, only vertical impact and horizontal impact problems are taught. However, oblique impact problems are not involved. In this paper, the dynamic load coefficient is derived by energy method for oblique impact problem. The results show that for the dynamic load coefficient of oblique impact, the horizontal impact problem of horizontal bar is the maximum, and the horizontal impact problem of vertical beam is the minimum. The obtained oblique impact dynamic load coefficient can be degenerated to horizontal and vertical impact. It is verified by finite element numerical simulation, and the relative difference between numerical solution and theoretical solution is not more than 1.5%. This result helps to understand the impact problem in depth, which is of great significance for materials mechanics teaching and analysis of engineering application problems.

Key words: oblique impact; dynamic load coefficient; energy method; horizontal impact; vertical impact

冲击问题是常见的工程现象之一, 也是材料力学授课的重要组成部分^[1-4]。材料力学通常使用能量法分析冲击系统的动荷系数^[5-6], 文献[7]采用能量法推导了冲击动荷系数的一般形式, 但目前分析较多的情况是竖直冲击^[8-9]。此外, 文献[10]通过振动计算方法得到了冲击动荷系数的一般形式; 文献[11]和文献[12]分别对竖直冲击动荷系数进行了有限元方法和理论值的印证。然而, 斜冲击的动荷系数尚未给出。斜冲击在日常生活中十分常见, 有必要进行相应分析。本文通过能量法推导得到悬臂梁在有倾斜角的情况下, 受到斜冲击的动荷系数公式, 并通过有限元数值模拟对

理论模型进行对比。

1 理论推导

如图1所示的冲击系统, 悬臂梁长为 l , 水平面夹角为 θ_1 , 梁的抗拉刚度为 EA , 抗弯刚度为 EI 。质量 m 的重物初始时刻与悬臂梁无缝贴合, 且此时重物有与梁轴线方向夹角为 θ_2 的初速度 v , 重力加速度为 g 。其中 α 为梁的铅垂线与变形间的夹角。

根据材料力学关于冲击问题的假设^[5], 采用能量法对该系统进行分析。根据能量守恒定律, 冲击物动能和势能的变化应等于梁的应变能, 即:

收稿日期: 2021-11-21; 修回日期: 2022-05-09

基金项目: 河南省教改项目(2019SJGLX192); 郑州大学教改项目(2020ZZUJXLX025, 2021ZZUJGLX048)。

作者简介: 张建伟(1989-), 男, 博士, 副教授, 主要从事表面变质层力学性能表征方法方面的研究。E-mail: zhangjianwei@

zzu.edu.cn.

$$\Delta T + \Delta V = U \quad (1)$$

式中, ΔT 为动能变化量, ΔV 为势能变化量, U 为梁的应变能。载荷与变形在线弹性范围内成正比^[5], 即:

$$\frac{F_d}{P} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = K_d \quad (2)$$

式中, F_d 为动载荷, $P=mg$, Δ_d 为动变形, Δ_{st} 为静变形, K_d 为动荷系数。

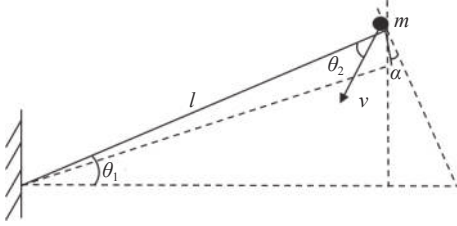


图 1 斜冲击问题示意图

图 1 所示的系统可视为组合变形的冲击问题。

1) 当 $\theta_1=0^\circ$ 、 $\theta_2=90^\circ$, 即为悬臂梁的竖直冲击问题, 相应静变形为:

$$\Delta_{st1} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (3)$$

2) 当 $\theta_1=0^\circ$ 、 $\theta_2=0^\circ$, 即为受压杆的水平冲击问题, 相应静变形为:

$$K_d = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{g}(\omega_{st} \sin \theta_2 + l_{st} \cos \theta_2) + (\omega_{st}^2 + l_{st}^2) \cos^2(\theta_1 - \alpha)}}{\omega_{st} \sin \theta_2 + l_{st} \cos \theta_2} + \frac{\sqrt{\omega_{st}^2 + l_{st}^2} \cos(\theta_1 - \alpha)}{\omega_{st} \sin \theta_2 + l_{st} \cos \theta_2} \quad (9)$$

式中, $\tan \alpha = \omega_{st}/l_{st}$, 即 $\alpha = \arctan(\cot \theta_2 \cdot l/(Al^2))$ 。

当 $\theta_1=0^\circ$ 、 $\theta_2=0^\circ$ 时, $\alpha=90^\circ$, 有:

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st2}}} \quad (10)$$

退化为水平冲击动荷系数。

当 $\theta_1=0^\circ$ 、 $\theta_2=90^\circ$ 时, $\alpha=0^\circ$, 有:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{st1}}} \quad (11)$$

退化为竖直冲击动荷系数。

2 有限元模型

为验证理论推导结果, 用 ABAQUS 软件对图 1 所示系统的冲击过程在斜梁竖直冲击情况下 ($\theta_1 \neq 0^\circ$ 、 $\theta_2 = 90^\circ$) 进行了模拟。悬臂梁长 $l=25$ mm, 截面为宽 $b=1$ mm, 高 $h=1$ mm 的矩形。边长 $a=$

$$\Delta_{st2} = \frac{Pl}{EA} \quad (4)$$

3) $\theta_1 \neq 0^\circ$ 时, 相应的弯曲和压缩静变形为:

$$\omega_{st} = \Delta_{st1} \sin \theta_2 \quad (5)$$

$$l_{st} = \Delta_{st2} \cos \theta_2 \quad (6)$$

根据能量法, 初、末时刻能量变化如表 1 所示。

表 1 初、末时刻能量

	动能 T	势能 V	变形能 U
初时刻	$\frac{1}{2}mv^2$	0	0
末时刻	0	$-mg\Delta_d \cos(\theta_1 - \alpha)$	$\frac{F_N^2 l}{2EA} + \int_l \frac{F_S^2 x^2}{2EI} dx$

根据式(1)得:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta_d \cos(\theta_1 - \alpha) = \frac{F_N^2 l}{2EA} + \int_l \frac{F_S^2 x^2}{2EI} dx \quad (7)$$

根据式(2)得:

$$\begin{cases} \Delta_d = K_d \sqrt{\omega_{st}^2 + l_{st}^2} \\ F_N = K_d P \cos \theta_2 \\ F_S = K_d P \sin \theta_2 \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)可求得动荷系数表达式为:

0.1 mm 的立方体重物具有垂直于悬臂梁方向的初速度 $v=100$ mm/s, 且位于悬臂梁的自由端。对 θ_1 为 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 共 5 种不同角度进行模拟, 图 2 为悬臂梁倾斜角 $\theta_1=30^\circ$ 时的模型。悬臂梁的弹性模量为 200 GPa, 泊松比为 0.3, 密度为 7900 kg/m³; 重物的弹性模量为 200 000 GPa, 泊松比为 0.3, 密度为 10¹¹ kg/m³。悬臂梁为 beam 单元(单元编号 B31), 重物为 solid 单元(单元编号 C3D8R)的刚体。悬臂梁左端固支, 右端自由。

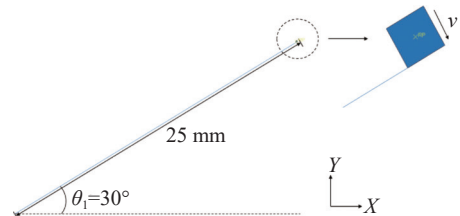


图 2 有限元模型

3 结果与讨论

3.1 动荷系数的讨论

考虑一般情况, 采用有限元模型部分给出的参数, 可以得到任意 θ_1 、 θ_2 时的 K_d 数值, 如图 3 所示。可以发现随着 θ_1 和 θ_2 的减小, K_d 增大, 且 θ_2 的影响更为显著。极小值出现在 $\theta_1=90^\circ$ 、 $\theta_2=90^\circ$, 此时为竖直梁的水平冲击问题; 极大值出现在 $\theta_1=0^\circ$ 、 $\theta_2=0^\circ$, 此时为水平杆的水平冲击问题。

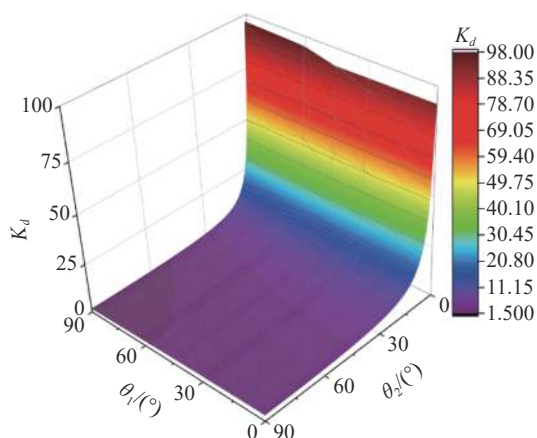


图3 动荷系数

3.2 有限元结果

图 4 给出了重物在初速度和重力作用下从初始位置与悬臂梁共同运动并达到最大变形位置这一过程的几幅动画截图。由图 4 可见, 左侧固定端变形较小, 右侧自由端受冲击作用变形较大。

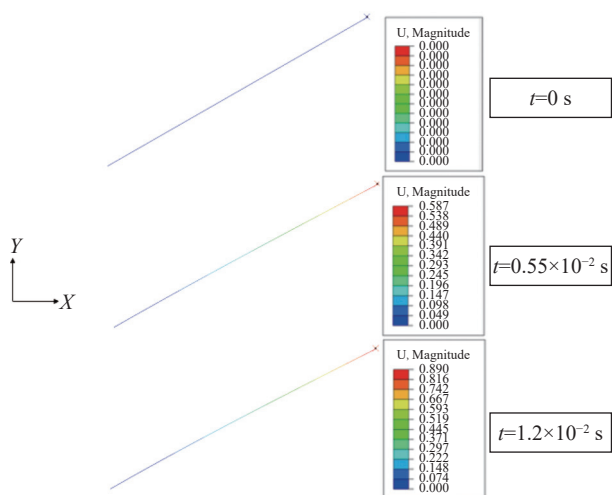


图4 冲击过程有限元结果(图例单位: mm)

图 5 为梁的最大挠度 Δ_{st1}^1 所在位置(右自由端)的挠度时间历程曲线, 可以清楚地观察到挠度随

时间的变化情况。因为重物与梁初始时刻接触, 所以从 0 时间点开始发生变形。曲线经历一个波峰和波谷回到起始位置, 此为冲击过程, 波峰值为该过程的最大挠度值。通过图 5 可以发现整个冲击过程只有 3.6×10^{-2} s, 十分短暂。

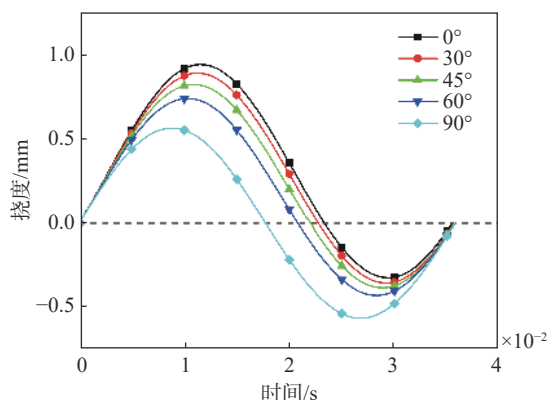


图5 冲击过程中最大挠度时程曲线

3.3 有限元结果与解析结果的对比

悬臂梁惯性矩 $I = bh^3/12$, b 、 h 分别为梁的宽和高^[5]。将第 2 节中数值模型的相关参数带入式(3), 可以得到理论值 $\Delta_{st1} = 0.307$ mm。数值模拟结果为 $\Delta_{st1}^1 = 0.306$ mm。图 5 中可见随着 θ_1 的增加, 动荷系数的理论解和数值解均呈减小趋势, 且二者较为吻合。图 6 表明对于同一系统的斜冲击问题, 竖直冲击是动荷系数的上界, 水平冲击是动荷系数的下界。这是由于重力在不同倾斜角度时做功不同所导致的。

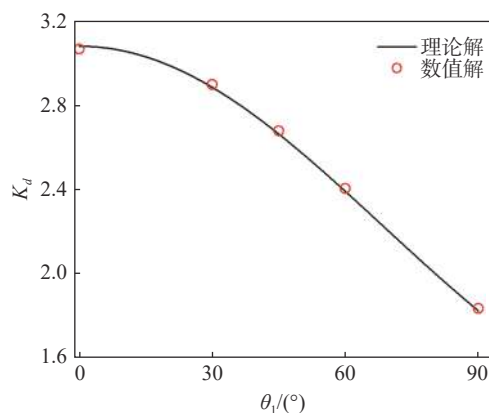


图6 斜冲击动荷系数理论解与有限元结果的对比

表 2 给出了式(9)得到的动荷系数理论解 K_d 与模拟的数值解 K_d^1 的对比, 结果显示二者间误差小于 1%。同时对 θ_1 为 0° 、 θ_2 为 0° 、 75° 、 90° 进行了有限元计算, 理论解与数值解的对比误差分别为

1.2%、1.5% 和 1.0%。以上结果说明推导得到的斜冲击动荷系数是准确的。

表 2 误差分析

θ_1	Δ_d	Δ_d^1	K_d	K_d^1	误差/%
0°	0.944	0.941	3.08	3.07	0.32
30°	0.884	0.890	2.89	2.90	0.35
45°	0.816	0.822	2.66	2.68	0.75
60°	0.733	0.738	2.39	2.41	0.84
90°	0.559	0.564	1.83	1.84	0.55

4 结束语

本文用能量法推导了斜冲击的动荷系数公式，并用数值模拟进行分析，两者结果相互验证，误差不超过 1.5%。该公式不仅有助于材料力学的深入教学，也对实际工程应用有一定的参考价值 and 指导意义。

参考文献

[1] LIN Z C, HO C Y. An investigation of elastic impact problems on beams and plates[J]. Journal of Sound & Vibration, 1991, 148(2): 293–306.

[2] PETERSEN P G, SMITH L V, NEVINS D. The effect of surface roughness on oblique bicycle helmet impact

tests[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part P Journal of Sports Engineering and Technology, 2020, 234(4): 320–327.

[3] XIE Q J, ZHU Z W, KANG G Z. Thermal activation based constitutive model for high temperature dynamic deformation of AZ31B magnesium alloy[J]. Materials Science & Engineering A, 2019, 743: 24–31.

[4] 张岱宇, 蒲传金, 郝高宇, 等. 冲击导致材料弹塑性激光干涉测量[J]. 实验科学与教学, 2019, 17(5): 51–54.

[5] 孙训方, 方孝淑, 关来泰, 等. 材料力学 II [M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[6] 刘鸿文. 材料力学 I [M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[7] 冯贤桂. 一般冲击动荷系数的能量法推导[J]. 力学与实践, 2000, 22(1): 60–61.

[8] 王开福. 垂直冲击问题[J]. 力学与实践, 2019, 41(2): 233.

[9] 周润玉. 考虑受冲击杆质量的动荷系数的讨论[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 60–61.

[10] 王华杰. 冲击动载荷系数的一般形式[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 58–60.

[11] 徐耀玲, 谭文锋. 用 LS-DYNA 辅助《材料力学》冲击问题的教学[J]. 力学与实践, 2008, 30(6): 87–88.

[12] 陈超, 侯振德, 王忠宝, 等. 一种冲击动应力的实验系统与结果分析[J]. 力学与实践, 2014, 36(2): 222–225.

编辑 张俊