中国科学: 数学　2019 年　第 49 卷　第 6 期: 859～878
SCIENTIA SINICA　Mathematica
论　文

有偏无穷 Laplace 方程解的若干估计和性质

蒋飞达[1], 刘芳[2*], 杨孝平[3]

1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044;
2. 南京理工大学理学院, 南京 210094;
3. 南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: jfd2001@163.com, sdqdlf78@126.com, xpyang@nju.edu.cn

收稿日期: 2016-12-27; 接受日期: 2018-03-27; 网络出版日期: 2018-08-30; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771214, 11501292 和 11531005) 资助项目

摘要　本文研究一类有偏无穷 Laplace 方程, 它来源于随机博弈论中的有偏二人零和博弈. 本文建立该方程解的各种性质, 包括解的梯度估计、非负解 u 及其梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式. 最后, 本文证明非常数的 C^2 光滑解没有内部临界点.

关键词　有偏无穷 Laplace 方程　梯度估计　Harnack 不等式

MSC (2010) 主题分类　35J60, 35J70, 35D40

1　引言

在有偏二人零和博弈的研究 [1] 中, 出现了如下形式的有偏无穷 Laplace 方程:

$$\Delta_\infty^N u = \beta |Du|, \tag{1.1}$$

其中 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是未知函数 (Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集), $\beta\in\mathbb{R}$ 是一个固定的常数, $\Delta_\infty^N u = \Delta_\infty u/|Du|^2$ 表示规范化的无穷 Laplace 算子, 这里的 $\Delta_\infty u$ 为无穷 Laplace 算子, 其定义如下:

$$\Delta_\infty u = (D^2uDu)\cdot Du = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j}. \tag{1.2}$$

对于有界区域上有偏无穷 Laplace 方程预定 Lipschitz 连续边值的 Dirichlet 问题, 文献 [1] 证明了其黏性解的存在唯一性定理. 形如 (1.1) 的方程可以从有偏版本的二人零和博弈中推导得到, 这里所谓的 "有偏" 指的是投掷硬币时得到正面和反面的概率是带有适当偏差的, 即得到正面的概率不是 1/2. 关于方程 (1.1) 更多的介绍和背景信息, 参见文献 [1, 2].

英文引用格式: Jiang F D, Liu F, Yang X P. Some estimates and properties of solutions to the biased infinity Laplacian equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 859–878, doi: 10.1360/SCM-2016-0799

　

本文的目标是建立有偏无穷 Laplace 方程 (1.1) 光滑解的各种估计和性质, 这些结果将是文献 [3,4] 中关于无穷调和函数相应结果的推广. 事实上, 对于要建立的各种性质, 我们可以允许方程 (1.1) 中的 β 是一个函数. 因此, 我们将对于以下更一般的方程建立这些性质:

$$\Delta_\infty^N u=\beta(x)|Du|,\quad x\in\Omega, \tag{1.3}$$

这包含当 β 为常数时的方程 (1.1) 作为特殊情形. 称方程 (1.3) 为广义的有偏无穷 Laplace 方程. 我们可将方程 (1.3) 写为 $\Delta_\infty u/|Du|^3=\beta(x)$, 其中算子 $\Delta_\infty u/|Du|^3$ 是零次齐次的.

现在建立本文的主要结果. 第一个主要结果是方程 (1.3) 解的内部梯度估计.

定理 1.1 设 u 是方程 (1.3) 在区域 Ω 上的 C^2 光滑解, 其中 β 是 Ω 上的有界连续函数, 则对任意点 $x_0\in\Omega$, 有如下估计成立:

$$|Du(x_0)|\leqslant \mathrm{e}^{3|u|_{0;\Omega}}(|\beta|_{0;\Omega}+(\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega))^{-1}). \tag{1.4}$$

定理 1.1 给出了方程 (1.3) 的 C^2 光滑解的内部梯度估计. 在与定理 1.1 相同的假设条件下, 有如下整体梯度估计:

$$\sup_\Omega|Du|\leqslant C\Big(1+\sup_{\partial\Omega}|Du|\Big), \tag{1.5}$$

其中常数 C 依赖于 $|\beta|_{0;\Omega}$ 和 $|u|_{0;\Omega}$. 有了整体估计 (1.5), 我们将更进一步地研究 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题的全局梯度估计. 事实上, 我们能够对一类更广泛的无穷 Laplace 方程建立梯度估计, 即方程

$$\Delta_\infty^N u=f(x,Du),\quad x\in\Omega, \tag{1.6}$$

其中 $f:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个给定函数, 且假设右端项 f 关于 Du 满足一个自然的结构性条件. 第 2 节将详细讨论这些梯度估计.

将方程 (1.3) 两边同时乘以 $|Du|^2$, 得到如下方程:

$$\Delta_\infty u=\beta(x)|Du|^3,\quad x\in\Omega. \tag{1.7}$$

上面的梯度估计 (1.4) 对于此方程 (1.7) 同样成立.

对方程 (1.7) (或方程 (1.3)), 我们将推广文献 [3] 中齐次的情形推导出解和梯度模的 Harnack 不等式. 我们还将证明广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.7) 的非常数 C^2 光滑解没有内部临界点. 当 $\beta\equiv0$ 时, 文献 [5] 和 [4] 分别得到了这个有趣结果的二维情形和高维情形. 本文将在 Ω 上满足方程 $\Delta_\infty u=0$ 的函数 u 称为无穷调和函数.

下面介绍第二个主要结果, 即方程 (1.7) 非负解的 Harnack 不等式.

定理 1.2 设 u 是方程 (1.7) 的 C^2 光滑非负解, 其中 β 是 Ω 上的有界连续函数, 则对任意的连通开集 $\Omega'\subset\subset\Omega$, 存在一个常数 $C=C(\Omega',|\beta|_{0;\Omega})$, 使得下式成立:

$$\sup_{\Omega'}u\leqslant C\inf_{\Omega'}u. \tag{1.8}$$

由定理 1.2 可知, 如果 Ω 是连通的且在 Ω 某点处有 $u>0$, 则 $u>0$ 在 Ω 上处处成立.

定理 1.1 中的梯度估计 (1.4) 和定理 1.2 中的 Harnack 不等式 (1.8) 对于退化方程 (1.7) 的光滑解成立. 这些带平均效果的估计通常情形下是对一致椭圆方程成立的. 这里, 虽然方程 (1.7) 的椭圆性是退化的, 但是无穷 Laplace 算子 Δ_∞ 的特殊结构可以保证这些估计成立.

接下来介绍第三个主要结果, 即方程 (1.7) 解的梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式.

定理 1.3 设 u 是方程 (1.7) 的 C^4 光滑解, 其中 $\beta \in C^2(\Omega)$ 是一个给定的函数. 对任意一个光滑连通的集合 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 存在一个常数 $C = C(\Omega', |\beta|_{2;\Omega})$, 使得下式成立:

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leqslant C \inf_{\Omega'} |Du|. \tag{1.9}$$

由定理 1.3 可知, 如果 Ω 是连通的且在 Ω 的某点处有 $|Du| > 0$, 则 $|Du| > 0$ 在 Ω 上处处成立.

定理 1.2 和 1.3 分别建立了非负解 u 和解的梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式. 为了得到非负解 u 和解的梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式, 我们需要建立 $|D(\log u)|$ 和 $|D(\log |Du|^2)|$ 的能量界. 由于 u 和 $|Du|$ 都可能在某些点处等于零, 因此首先需要得到 $|D(\log(u+\delta))|$ 和 $|D(\log(|Du|^2+\delta))|$ 的能量界 (其中 δ 为固定的正常数), 然后让 δ 趋向于零. 这些能量界将在第 3 节中利用极值原理讨论得到.

定理 1.3 的一个显著推论是方程 (1.7) 的 C^4 光滑非常数解在区域 Ω 内没有内部临界点. 定理 1.3 的另一个推论是带有常数 Dirichlet 边界条件的方程 (1.7) 的 C^4 光滑解必定为常数. 第四个主要结果说明, 这些在 C^4 光滑假设下成立的性质可以在仅仅假设 C^2 光滑时成立.

定理 1.4 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的连通开子集, u 为方程 (1.7) 的 C^2 光滑解, 其中 $\beta \in C^1(\bar{\Omega})$ 是一个给定的函数. 如果对某个点 $x_0 \in \Omega$ 有 $Du(x_0) = 0$ 成立, 那么 $u \equiv u(x_0)$.

定理 1.2–1.4 是对广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.7) 建立的. 事实上, 若将方程 (1.7) 替换为方程 (1.3), 则定理 1.2 和 1.3 仍然成立, 但由于 $|Du|$ 出现在方程 (1.3) 中算子 $\Delta_\infty^N u$ 的分母上, 定理 1.4 将不再成立.

总的来说, 本文的结果可以视为将文献 [3–5] 中关于无穷调和函数的结果推广到了更一般的无穷 Laplace 方程. 事实上, 我们成功地推广到了有偏无穷 Laplace 方程、广义的有偏 Laplace 方程, 其关键的技巧是依赖于算子 $\Delta_\infty u/|Du|^3$ 的零次齐次性. 算子 $\Delta_\infty u/|Du|^3$ 的这种结构使得我们能够得到 $|D(\log(u+\delta))|$ 和 $|D(\log(|Du|^2+\delta))|$ 的不依赖于 δ 的一致的界. 需要指出的是, 当 β 为函数时, 广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3) 黏性解的存在唯一性也是很有意思的问题, 我们将在后续中继续研究.

注 1.1 当 $\beta \equiv 0$ 时, 定理 1.4 的结果即为文献 [4] 中的结果, 即一个 C^2 光滑的无穷调和函数 u, 要么是常数, 要么有 $|Du| > 0$ 恒成立. 关于正则性, 文献 [6] 和 [7] 分别证明了二维情形时无穷调和函数是属于 C^1 的和 $C^{1,\alpha}$ 的. 对于高维情形, 文献 [8] 证明了无穷调和函数在 $\mathbb{R}^n$ 中的区域上处处可微. 无穷调和函数在高维情形时是否具有更高的正则性目前还是个公开问题.

注 1.2 容易验证函数 $u = \frac{1}{2}|x|^2$ 是方程

$$\Delta_\infty^N u = \beta(x)|Du|, \quad \beta(x) = \frac{1}{|x|} \tag{1.10}$$

的解, 且当 Ω 不包含 0 点时, 这个解 u 满足 Harnack 不等式 (1.8) 和 (1.9).

注 1.3 注意到无穷调和函数具有很好的不变性质, 即如果 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中是无穷调和的, 则对任意常数 ϵ, 函数

$$u_\epsilon = u + \epsilon x_{n+1} \tag{1.11}$$

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中也是无穷调和的, 参见文献 [3,4]. 对于方程 (1.7), 尽管公式 $\Delta_\infty u_\epsilon = \Delta_\infty u$ 仍然成立, 但在变换 (1.11) 下, 方程 (1.7) 的形式会发生变化. 函数 u_ϵ 满足

$$\Delta_\infty u_\epsilon = \beta(x)(\sqrt{|Du_\epsilon|^2 - \epsilon^2})^3, \tag{1.12}$$

这与方程 (1.7) 的形式不同. 如果不使用变换 (1.11), 适当地修改证明中的辅助函数, 我们仍可以得到定理 1.2 和 1.3 的结果. 对于定理 1.4, 我们采用文献 [4] 中的办法来证明. 但为了处理方程 (1.7) 的右端项, 与文献 [4] 中的区别在于, 我们需要在定理 1.4 的证明中选择适当小的球, 其半径的选取依赖于 $|\beta|_{1;\Omega}$.

注 1.4 本文的主要结果都是基于光滑解的框架下建立的, 即假设解 u 至少是 C^2 光滑的. 事实上, 对于无穷 Laplace 方程来说, 解 u 的 C^2 光滑性是一个较强的假设条件, 因此这些定理的应用是较为局限的. 由此可知, 在降低解 u 的光滑性时, 讨论与本文主要定理相同的性质也是十分有意思的问题. 例如, 可运用脚注[1)] 中类似的正则化逼近方法, 将定理 1.1 中假设的 C^2 光滑解减弱为连续的黏性解.

本文余下部分的结构如下: 第 2 节给出定理 1.1 的证明, 并进一步讨论方程 (1.6) 边值问题的全局梯度估计; 第 3 节分别证明两个 Harnack 不等式, 即定理 1.2 和 1.3; 第 4 节给出定理 1.4 的证明, 并说明方程 (1.7) 的一个 C^2 光滑的非常数解没有内部临界点.

2 梯度估计

本节将给出定理 1.1 中的内部梯度估计 (1.4) 的证明. 我们还将讨论相应 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题的全局梯度估计. 本节中梯度估计的想法来源于文献 [3, 9, 10]. 在一个自然的结构性条件的假设下, 这些梯度估计都能对更一般形式的方程 (1.6) 成立. 这种一般方程的梯度估计可应用于齐次无穷 Laplace 方程、有偏无穷 Laplace 方程 (1.1)、广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3) 和修正的有偏无穷 Laplace 方程 (2.25) (见注 2.2).

首先讨论一般形式的方程 (1.6) 的内部梯度估计, 此时需要假设右端项 f 关于 Du 满足一个单侧的平方结构性条件. 由于广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3) 满足这样的结构性条件, 因此, 方程 (1.3) 的梯度估计也就可以直接得到.

定理 2.1 设 u 是方程 (1.6) 在 Ω 上的 C^2 光滑解. 假设 f 满足结构性条件

$$f(x, Du) \geqslant -\mu_0(1 + |Du|^2), \tag{2.1}$$

其中 μ_0 为非负常数, 那么对于任意的点 $x_0 \in \Omega$, 有如下估计成立:

$$|Du(x_0)| \leqslant \mathrm{e}^{2(\mu_0+1)|u|_{0;\Omega}}(\sqrt{2\mu_0} + (\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega))^{-1}). \tag{2.2}$$

事实上, 这里的结构性条件 (2.1) 可以写成一个稍强的版本, 即 $|f(x, Du)| \leqslant \mu_0(1+|Du|^2)$, 其中 μ_0 为非负常数. 但对于梯度估计来说, 仅假设单侧条件 (2.1) 成立已经足够. 如果方程 (1.6) 中的 f 是非负的, 那么就不需要对 f 假设关于 Du 的幂次限制, 因为条件 (2.1) 自然就满足了. 但如果 f 是负的, 则 f 关于 Du 的平方增长性是需要满足的.

我们介绍无穷 Laplace 算子的一个等价表示, 即

$$\Delta_\infty u = \frac{1}{2} Du \cdot Dv, \tag{2.3}$$

其中 $v = |Du|^2$. (2.3) 可以从 (1.2) 的第一个等式直接得到. 在后续的证明中, 函数 $v = |Du|^2$ 将出现在辅助函数构造中, 因此, (2.3) 中无穷 Laplace 算子的表示形式 $\frac{1}{2}Du \cdot Dv$ 将给我们的讨论带来方便.

1) Jiang F, Liu F, Yang X P. Lipschitz estimates for solutions to a porous medium problem involving the infinity Laplacian. Preprint, 2017

定理 2.1 的证明 构造辅助函数

$$w=\zeta^2\mathrm{e}^{\kappa u}v, \tag{2.4}$$

其中 $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$ $(0\leqslant\zeta\leqslant 1)$, $v=|Du|^2$, κ 是一个待定的正常数. 假设函数 w 在点 $y_0\in\Omega$ 处取得它在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值, 则在点 y_0 处, 有 $Dw=0$ 和 $Du\cdot Dw=0$ 成立. 经过计算, 在点 y_0 处, 有

$$\begin{aligned}0&=Du\cdot Dw\\&=Du\cdot(2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}vD\zeta+\kappa\zeta^2\mathrm{e}^{\kappa u}vDu+\zeta^2\mathrm{e}^{\kappa u}Dv)\\&=2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}\left[(Du\cdot D\zeta)|Du|^2+\frac{\kappa\zeta|Du|^4}{2}+\zeta\Delta_\infty u\right]\\&=2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}|Du|^2\left[\frac{\kappa\zeta|Du|^2}{2}+\zeta f(x,Du)+Du\cdot D\zeta\right],\end{aligned} \tag{2.5}$$

这里用到了等式 (2.3) 和方程 (1.6). 由 (2.5), 在点 y_0 处, 有 $\kappa\zeta|Du|^2/2+\zeta f(x,Du)+Du\cdot D\zeta=0$ 成立, 或者 $|Du(y_0)|=0$ 成立. 当 $|Du(y_0)|=0$ 时, 算子 $\Delta_\infty^N u$ 没有定义, 因此, $|Du(y_0)|=0$ 这种情形不会出现. 我们仅需要考虑在点 y_0 处 $\kappa\zeta|Du|^2/2+\zeta f(x,Du)+Du\cdot D\zeta=0$ 的情形. 利用结构性条件 (2.1) 和 Cauchy 不等式, 在点 y_0 处可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\kappa\zeta|Du|^2&=-\zeta f(x,Du)-Du\cdot D\zeta\\&\leqslant\left(\mu_0+\frac{1}{2}\right)\zeta|Du|^2+\zeta\mu_0+\frac{|D\zeta|^2}{2\zeta}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

在 (2.6) 两边同时乘以 2ζ, 在点 y_0 处, 有

$$(\kappa-2\mu_0-1)\zeta^2|Du|^2\leqslant 2\zeta^2\mu_0+|D\zeta|^2\leqslant(\zeta\sqrt{2\mu_0}+|D\zeta|)^2. \tag{2.7}$$

选取 $\kappa>2\mu_0+1$, 在点 y_0 处, 有

$$\zeta|Du|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\kappa-2\mu_0-1}}(\zeta\sqrt{2\mu_0}+|D\zeta|). \tag{2.8}$$

固定 $x_0\in\Omega$, 选取 $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$ 使得 $\zeta(x_0)=1$ 和 $|D\zeta|\leqslant\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)^{-1}$ 成立. 由于 w 在点 y_0 处达到最大值, 因此有 $w(x_0)\leqslant w(y_0)$, 即

$$\zeta^2(x_0)\mathrm{e}^{\kappa u(x_0)}v(x_0)\leqslant\zeta^2(y_0)\mathrm{e}^{\kappa u(y_0)}v(y_0). \tag{2.9}$$

结合 (2.8) 和 (2.9) 可得

$$|Du(x_0)|\leqslant\mathrm{e}^{\kappa|u|_{0;\Omega}}\zeta(y_0)|Du(y_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\kappa-2\mu_0-1}}\mathrm{e}^{\kappa|u|_{0;\Omega}}(\zeta\sqrt{2\mu_0}+|D\zeta|). \tag{2.10}$$

选取 $\kappa=2(\mu_0+1)$, 即可得到不等式 (2.2). 定理 2.1 证毕. □

对于广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3), 右端项 $\beta(x)|Du|$ 满足

$$\beta(x)|Du|\geqslant-\frac{1}{2}|\beta|_{0;\Omega}(1+|Du|^2). \tag{2.11}$$

这说明 $\beta(x)|Du|$ 满足当 $\mu_0=|\beta|_{0;\Omega}/2$ 时的结构性条件 (2.1). 由估计 (2.2), 可得方程 (1.3) 的内部梯度估计

$$|Du(x_0)|\leqslant\mathrm{e}^{(|\beta|_{0;\Omega}+2)|u|_{0;\Omega}}(\sqrt{|\beta|_{0;\Omega}}+(\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega))^{-1}). \tag{2.12}$$

为了得到定理 1.1 中更简洁的估计 (1.4), 我们需要对定理 2.1 的证明做适当改动.

定理 1.1 的证明 我们选取与 (2.4) 中相同的辅助函数 w. 在 w 的最大值点 $y_0 \in \Omega$ 处, 由 (2.6) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\kappa\zeta|Du|^2}{2} &= -\zeta\beta|Du| - Du\cdot D\zeta \\ &\leqslant \zeta|Du|^2 + \frac{\zeta\beta^2}{2} + \frac{|D\zeta|^2}{2\zeta}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

在 (2.13) 两边同时乘以 2ζ, 在点 y_0 处, 有

$$(\kappa-2)\zeta^2|Du|^2 \leqslant \zeta^2\beta^2 + |D\zeta|^2 \leqslant (\zeta|\beta| + |D\zeta|)^2. \tag{2.14}$$

选取 $\kappa > 2$, 在点 y_0 处可得

$$\zeta|Du| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\kappa-2}}(\zeta|\beta| + |D\zeta|). \tag{2.15}$$

固定点 $x_0 \in \Omega$ 并选取 $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ 使得 $\zeta(x_0) = 1$ 和 $|D\zeta| \leqslant \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)^{-1}$ 成立. 由 $w(x_0) \leqslant w(y_0)$ 和 (2.15), 取 $\kappa = 3$ 便可得到想要证明的内部梯度估计 (1.4). 定理 1.1 证毕. □

虽然估计 (1.4) 在形式上比估计 (2.12) 更简洁, 但是需要注意的是, 当 $\beta(x) \equiv 0$ 时估计 (2.12) 比估计 (1.4) 更优.

在定理 2.1 中, 如果方程 (1.6) 被替换为 $\Delta_\infty u = f(x, Du)|Du|^2$, 其中 f 满足相同的结构性条件 (2.1), 则梯度估计 (2.2) 仍然成立. 对于证明中两种可能的情形, 在点 y_0 处 $\kappa\zeta|Du|^2/2 + \zeta f(x, Du) + Du\cdot D\zeta = 0$ 和 $|Du(y_0)| = 0$, 前者可以用定理 2.1 证明中相同的办法处理, 后者也可以很容易被处理. 事实上, 如果 $|Du(y_0)| = 0$, 由于 w 在点 y_0 处达到最大值, 我们可知在 Ω 中 $|Du| \equiv 0$. 因此, 不等式 (2.2) 在这种情形下也成立. 同样的注释对于定理 1.1 也成立, 即梯度估计 (1.4) 对于方程 (1.7) 也成立.

在 (2.4) 中取 $\zeta \equiv 1$, 并按照定理 1.1 和 2.1 的证明, 我们可以得到整体的梯度估计 (1.5). 这里的整体估计是指将 $\bar{\Omega}$ 上的全局梯度估计约化为 $\partial\Omega$ 上的边界梯度估计. 若考虑边值问题, 全局梯度估计 $\sup_\Omega |Du|$ 可以由边界上的梯度估计得到.

接下来讨论 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题的全局梯度估计. 为了避免太多重复, 我们仅仅考虑一般形式的方程 (1.6). 将结果应用到广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3) 时, 我们只需要选取 $f(x, Du) = \beta(x)|Du|$.

对于在 $\partial\Omega$ 上满足 $u = \varphi$ 的 Dirichlet 问题, 假设方程 (1.6) 存在下解 $\underline{u} \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 和上解 $\bar{u} \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 在 $\partial\Omega$ 上满足 $\underline{u} = \bar{u} = \varphi$. 由比较原理, 在 $\bar{\Omega}$ 上有 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$ 成立, 且有 $\sup_{\partial\Omega}|Du| \leqslant C$, 其中常数 C 依赖于 $|\underline{u}|_{1;\Omega}$ 和 $|\bar{u}|_{1;\Omega}$. 将此边界估计和 (1.5) 结合, 我们得到方程 (1.6) 对应的 Dirichlet 问题解 u 的全局梯度估计

$$\sup_\Omega |Du| \leqslant C(\mu_0, |u|_{0;\Omega}, |\underline{u}|_{1;\Omega}, |\bar{u}|_{1;\Omega}).$$

现在考虑如下 Neumann 问题的梯度估计:

$$\begin{cases}\Delta_\infty^N u = f(x, Du), & x \in \Omega, \\ D_\nu u \geqslant 0, & x \in \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.16}$$

其中 ν 表示边界 $\partial\Omega$ 上的单位内法向量场. 假设 f 满足相同的结构性条件 (2.1), 则可推导出 Neumann 问题 (2.16) 的梯度估计.

定理 2.2 假设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 是 Neumann 问题 (2.16) 的解, $f:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足条件 (2.1), 则有如下估计成立:

$$\sup_{\Omega}|Du|\leqslant \mathrm{e}^{2(\mu_0+1)|u|_{0;\Omega}}\sqrt{\mu_0}. \tag{2.17}$$

证明 在 (2.4) 中, 取 $\zeta\equiv 1$, 考虑辅助函数

$$w=\mathrm{e}^{\kappa u}v, \tag{2.18}$$

其中 $v=|Du|^2$, κ 是一个待定的正常数. 若 w 在点 $x_0\in\Omega$ 处取得最大值, 则在点 x_0 处, 有

$$Du\cdot Dw=0. \tag{2.19}$$

若 w 在点 $x_0\in\partial\Omega$ 处取得最大值, 在点 x_0 处有 $D_\nu w\leqslant 0$ 和 $\delta w=0$ 成立, 其中 $\delta=D-(D\cdot\nu)\nu$ 表示切向梯度算子, 则在点 x_0 处, 有下式成立:

$$Dw=\delta w+(D_\nu w)\nu=(D_\nu w)\nu. \tag{2.20}$$

从 Neumann 边界条件可知, 在 $x_0\in\partial\Omega$ 处有 $D_\nu u\geqslant 0$ 成立. 从而, 由 (2.20)、$D_\nu w(x_0)\leqslant 0$ 和 $D_\nu u(x_0)\geqslant 0$ 可以推导出, 在点 x_0 处, 有

$$Du\cdot Dw=Du\cdot[(D_\nu w)\nu]=(D_\nu u)(D_\nu w)\leqslant 0. \tag{2.21}$$

由 (2.19) 和 (2.21) 可知, 在点 x_0 处, 即 w 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值点处, 有不等式 $Du\cdot Dw\leqslant 0$ 成立. 注意这里的点 x_0 可以是在 Ω 内部, 也可以是在边界 $\partial\Omega$ 上. 我们可假设在点 x_0 处, $Du\neq 0$ 成立, 否则我们已经证得梯度估计 (2.17). 通过计算, 在点 x_0 处, 有

$$\begin{aligned}0\geqslant Du\cdot Dw&=\mathrm{e}^{\kappa u}Du\cdot(\kappa vDu+Dv)\\&=2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}|Du|^2\left[\frac{\kappa\zeta|Du|^2}{2}+\Delta_\infty^N u\right]\\&=2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}|Du|^2\left[\frac{\kappa\zeta|Du|^2}{2}+f(x,Du)\right]\\&\geqslant 2\zeta\mathrm{e}^{\kappa u}|Du|^2\left[\left(\frac{\kappa}{2}-\mu_0\right)|Du|^2-\mu_0\right].\end{aligned} \tag{2.22}$$

选取 $\kappa=2(\mu_0+1)$, 从 (2.22) 可得

$$|Du(x_0)|\leqslant\sqrt{\mu_0}. \tag{2.23}$$

由于 $w(x)\leqslant w(x_0)$ 对所有的 $x\in\bar{\Omega}$ 成立, 因此有

$$|Du(x)|\leqslant \mathrm{e}^{2(\mu_0+1)|u|_{0;\Omega}}\sqrt{\mu_0},\quad \forall\, x\in\Omega. \tag{2.24}$$

对 (2.24) 在 Ω 上取上确界, 得到所需的梯度估计 (2.17). 定理 2.2 证毕. □

显然, 定理 2.2 能够应用于齐次 Neumann 边界条件, 即在 $\partial\Omega$ 上, $D_\nu u=0$, 或者更一般的半线性 Neumann 边界条件, 即在 $\partial\Omega$ 上, $D_\nu u=\varphi(x,u)$, 其中 $\varphi\geqslant 0$. 如果 (2.16) 中的方程被替换为 $\Delta_\infty u=f(x,Du)|Du|^2$, 其中 f 满足 (2.1), 则定理 2.2 仍然成立.

注 2.1 当在 Ω 上 $f \geqslant 0$ 时, 我们可以在结构性条件 (2.1) 中取 $\mu_0 = 0$. 在这种情形下, 定理 2.2 中的估计 (2.17) 意味着在 $\bar{\Omega}$ 上 $|Du| \equiv 0$ 且 u 在 $\bar{\Omega}$ 必为常数. 因此, 该 Neumann 问题 (2.16) 只可能有常数解.

注 2.2 文献 [2, 11–13] 考虑了如下修正的有偏无穷 Laplace 方程:

$$\Delta_\infty^N u = \beta|Du| + g(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.25}$$

其中 β 是常数, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个有界函数. 若 $g \equiv 0$, 相应地, 方程 (2.25) 为文献 [1] 中的有偏无穷 Laplace 方程. 当 (2.25) 中 $\beta = 0$ 时, 相应的方程为文献 [14] 中的无偏无穷 Laplace 方程. 当 (2.25) 中的 β 是一个函数时, 我们称方程 (2.25) 为修正的广义有偏无穷 Laplace 方程. 由于 $f \equiv 0$, $f = \beta|Du|$ 和 $f = \beta|Du| + g$ 都满足结构性条件 (2.1), 因此, 定理 2.1 和 2.2 中的梯度估计 (2.2) 和 (2.17) 可以被应用到无穷调和函数、广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.3) 以及它的修正形式 (2.25). 特别地, 当 $f \geqslant 0$ 时我们可在结构性条件 (2.1) 中选取 $\mu_0 = 0$, 此时梯度估计 (2.2) 就变为文献 [3, 定理 2.1] 中的梯度估计 (11).

注 2.3 文献 [3] 讨论了无穷调和函数的内部梯度估计. 文献 [9, 10] 讨论了一类 Monge-Ampère 型方程 Dirichlet 边值问题和 Neumann 边值问题的全局梯度估计, 这些估计是在假设低阶矩阵函数满足一个平方下界的条件下得到的. 而本文的梯度估计需要假设右端项 f 这个标量函数具有一个平方下界. 对于 $w = \mathrm{e}^{\kappa u}|Du|^2$, 在计算 $Du \cdot Dw$ 时自然会碰到 $\Delta_\infty u$ 这一项, 这与文献 [3, 9, 10] 中的情形是一样的.

注 2.4 无穷 Laplace 算子 $\Delta_\infty^N u$ 和 $\Delta_\infty u$ 来源于许多应用, 如随机博弈论 [1,2,14,15]、最优质量运输 [16,17] 和图像处理 [18–21]. 关于无穷 Laplace 方程 (1.6) 有许多方面的研究, 当 $f \equiv 0$ 时可以参见文献 [3, 5, 22–25], 当 f 与 u 的梯度无关时可参见文献 [14, 26–30]. 当方程 (1.6) 中 $f = \beta(x)|Du|^h$ 时 (其中 $h \in [-2, 0]$, β 是一个连续函数), 文献 [27] 讨论了 Dirichlet 问题黏性解的存在性、唯一性以及渐近行为. 当方程 (1.6) 中 $f = Du \cdot \zeta$ 时 (其中 ζ 是一个连续梯度向量场), 文献 [31] 讨论了 Dirichlet 问题黏性解的存在性和唯一性.

3 Harnack 不等式

本节将讨论方程 (1.7) 关于其非负解 u 和解的梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式. 之所以能够得到这些 Harnack 不等式, 是由于算子 $\Delta_\infty u/|Du|^3$ 的零次齐次性. 若不满足零次齐次性, 则这些 Harnack 不等式可能会不成立, 见注 1.2. 我们将定理 1.2 和 1.3 中 Harnack 不等式的证明分为两个小节来讨论.

3.1 非负解的 Harnack 不等式

考虑方程 (1.7) 的非负解 u, 为了证明定理 1.2, 需要先建立 $|D(\log(u+\delta))|$ 关于正常数 δ 的一致能量界, 最后再令 $\delta \to 0$.

定理 1.2 的证明 构造如下辅助函数:

$$w = \frac{\zeta^2 v}{u_\delta^2}, \tag{3.1}$$

其中 $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant 1)$, $v = |Du|^2$, $u_\delta = u + \delta$, δ 为非负常数. 由于 u 是非负的, 若 $\delta > 0$, 则 $u_\delta > 0$ 成立. 因此, (3.1) 中定义的函数 w 是有意义的. 若函数 w 在内部点 $y_0 \in \Omega$ 处取得它在 $\bar{\Omega}$ 的

最大值, 则在点 y_0 处有 $Dw=0$ 和 $Du\cdot Dw=0$ 成立. 经计算, 在点 y_0 处, 有

$$\begin{aligned}0&=Du\cdot Dw\\&=Du\cdot\left(\frac{2\zeta vD\zeta}{u_\delta^2}+\frac{\zeta^2Dv}{u_\delta^2}-\frac{2\zeta^2vDu}{u_\delta^3}\right)\\&=\frac{2\zeta|Du|^2}{u_\delta^2}(Du\cdot D\zeta)+\frac{2\zeta^2}{u_\delta^2}\Delta_\infty u-\frac{2\zeta^2|Du|^4}{u_\delta^3}\\&=\frac{2\zeta|Du|^2}{u_\delta^2}\left(Du\cdot D\zeta+\zeta\beta|Du|-\frac{\zeta|Du|^2}{u_\delta}\right),\end{aligned}\tag{3.2}$$

这里使用了 (2.3) 和方程 (1.7). 从 (3.2) 可知, 在点 y_0 处,

$$Du\cdot D\zeta+\zeta\beta|Du|-\frac{\zeta|Du|^2}{u_\delta}=0\quad\text{或}\quad|Du(y_0)|=0$$

成立. 我们先考虑前面这种非平凡的情形. 在点 y_0 处, 有

$$\frac{\zeta|Du|^2}{u_\delta}=\zeta\beta|Du|+Du\cdot D\zeta\leqslant\zeta|\beta||Du|+|D\zeta||Du|.\tag{3.3}$$

在 (3.3) 中, 我们也将推迟讨论 $|Du(y_0)|=0$ 这种情形. 因此, 当 $|Du(y_0)|\neq0$ 时, 从 (3.3) 可推得

$$\frac{\zeta|Du|}{u_\delta}\leqslant\zeta|\beta|+|D\zeta|,\tag{3.4}$$

在点 y_0 处成立. 这意味着

$$\sqrt{w(y_0)}\leqslant\zeta(y_0)|\beta|_{0;\Omega}+|D\zeta(y_0)|.\tag{3.5}$$

对任意的球 $B\subset\subset\Omega$, 我们选择 ζ 使得 $\zeta\equiv1$ 在球 B 上成立, 且满足 $|D\zeta|\leqslant C(\mathrm{dist}(B,\partial\Omega))^{-1}$. 因为 w 在点 y_0 达到最大值, 我们可从 (3.5) 中得到

$$\sup_B\left(\frac{|Du|}{u_\delta}\right)\leqslant C,\tag{3.6}$$

其中常数 C 依赖于 $\mathrm{dist}(B,\partial\Omega)$ 和 $|\beta|_{0;\Omega}$. 因此, 我们得到如下的一致估计:

$$\|D(\log(u_\delta))\|_{L^\infty(B)}\leqslant C,\tag{3.7}$$

其中常数 C 与 δ 无关. 现在选取两个点 $y_1,y_2\in B$, 并让 P 表示路径

$$\{ty_2+(1-t)y_1\mid0\leqslant t\leqslant1\}.\tag{3.8}$$

根据估计 (3.7), 有

$$\begin{aligned}\log u_\delta(y_2)-\log u_\delta(y_1)&=\int_0^1\frac{d}{dt}[\log(u_\delta(ty_2+(1-t)y_1))]dt\\&=\int_0^1D(\log(u_\delta(ty_2+(1-t)y_1)))\cdot(y_2-y_1)dt\\&\leqslant C\ \mathrm{diam}(B).\end{aligned}\tag{3.9}$$

于是,

$$u_\delta(y_2) \leqslant u_\delta(y_1)\mathrm{e}^{C\mathrm{diam}(B)}. \tag{3.10}$$

在 (3.10) 中令 $\delta \to 0$, 我们得到

$$u(y_2) \leqslant Cu(y_1), \tag{3.11}$$

对某个常数 C 和任意的 $y_1, y_2 \in B$ 成立. 如果 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 是连通的, 我们用小球 B 覆盖 Ω' 并在每个小球 B 上迭代使用 (3.11), 最终可得到

$$u(y_2) \leqslant Cu(y_1), \tag{3.12}$$

对任意的 $y_1, y_2 \in \Omega'$ 成立, 其中常数 C 仅依赖于 Ω' 和 $|\beta|_{0;\Omega}$. 因此, 便证得结论 (1.8). 对于 $|Du(y_0)| = 0$ 的情形, 由于 w 在点 y_0 处取得最大值, 因此, $|Du| \equiv 0$ 在 Ω 上成立, 这意味着 u 是一个非负常数. 因此, 不等式 (1.8) 在这种情形下也成立. 因此, 我们就得到了非负解的 Harnack 不等式 (1.8). 定理 1.2 证毕. □

设 Ω 是连通的且 $u > 0$ 在 Ω 的某个点处成立, 不妨假设对某个点 $y_2 \in \Omega$ 处有 $u(y_2) > 0$, 那么对任意的紧子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 使得 $y_2 \in \Omega'$, 从 (3.12) 可知, $u(y_1) \geqslant u(y_2)/C$ 对任意的 $y_1 \in \Omega'$ 成立, 其中常数 C 与 δ 无关. 我们便有 $u > 0$ 在 Ω' 恒成立. 由于 Ω' 的任意性, 我们得到在 Ω 上 $u > 0$ 处处成立. 因此, 在估计 (3.6) 中假设 $\delta = 0$, 得到估计

$$\sup_{\Omega'}\left(\frac{|Du|}{u}\right) \leqslant C, \tag{3.13}$$

其中常数 C 依赖于 n、$\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 和 $|\beta|_{0;\Omega}$.

在定理 1.2 中, 如果方程 (1.7) 被替换为方程 (1.3), Harnack 不等式 (1.8) 仍然成立. 对于证明中在点 y_0 处两种可能的情形 $Du \cdot D\zeta + \zeta\beta|Du| - \frac{\zeta|Du|^2}{u_\delta} = 0$ 和 $|Du(y_0)| = 0$, 前者可以用定理 1.2 的证明中相同的方式处理, 而由于算子 $\Delta_\infty^N u$ 在 $|Du(y_0)| = 0$ 时没有意义, 因此后一种情形不会出现.

注 3.1 如果 u 是方程 (1.7) 的一个解, 显然 $u + C$ 也是方程 (1.7) 的一个解, 其中 C 是一个常数. 因此, 如果方程 (1.7) 的解 u 有正下界的话, 可以通过加上一个足够大常数的方式使得解 u 成为非负的. 因此, 定理 1.2 中非负解的假设是合理的.

注 3.2 我们回顾在球 $B := B_{2R}(y) \subset \Omega$ 上的非齐次一致椭圆方程 $Lu := a_{ij}D_{ij}u = f$ 的非负解 $u \geqslant 0$ 的 Harnack 不等式, 即存在一个常数 $C = C(n, \Lambda/\lambda)$, 使得

$$\sup_{B_R} u \leqslant C\left(\inf_{B_R} u + \frac{R}{\lambda}\|f\|_{L^n(B)}\right) \tag{3.14}$$

成立, 其中 λ 和 Λ 是一致椭圆算子 L 的椭圆形常数, 参见文献 [32]. 注意到在定理 1.2 中关于广义的有偏无穷 Laplace 方程 (1.7) 的 Harnack 不等式 (1.8) 与上述 Harnack 不等式 (3.14) 的形式是不同的. 在 (3.14) 中, 右端项的 L^n 范数是加上去的, 但在估计 (1.8) 中, 右端项仅仅出现在 $\inf_{\Omega'} u$ 的系数中, 因此, Harnack 不等式 (1.8) 形式上更接近文献 [3] 中关于无穷调和函数的 Harnack 不等式 (12). 原因是, 尽管方程 (1.7) 有右端项, 但本质上方程 (1.7) 是齐次的, 即如果 u 满足方程 (1.7), 那么对任意的常数 c, cu 仍然满足方程 (1.7).

注 3.3 定理 1.2 中 Harnack 不等式 (1.8) 的一个直接推论是方程 (1.7) 的 C^2 光滑解的零点集要么是空集, 要么是整个区域 Ω.

注 3.4　对于无穷调和函数而言, 其非负 C^2 光滑解的 Harnack 不等式是在文献 [3] 中建立的, 而对于非负黏性解的 Harnack 不等式是在文献 [25] 中建立的. 本小节所建立的是方程 (1.7) 的非负 C^2 光滑解的 Harnack 不等式.

3.2　梯度模的 Harnack 不等式

本小节给出定理 1.3 的证明. 事实上, 为了得到方程 (1.7) 的梯度模 $|Du|$ 的 Harnack 不等式, 我们先建立 $|D(\log(|Du|^2+\delta))|$ 关于正常数 δ 的一致能量界, 最后再令 $\delta \to 0$.

为了方便讨论, 这里先介绍一些记号和初步的计算. 对函数 $u \in C^2(\Omega)$, 定义函数

$$v := |Du|^2, \quad v_\delta := v + \delta = |Du|^2 + \delta, \tag{3.15}$$

其中 δ 是一个正常数. 对应于 (2.3), 有

$$Du \cdot Dv_\delta = Du \cdot Dv = 2\Delta_\infty u. \tag{3.16}$$

将 Ω 上函数的偏导数用下标表示, 即 $u_i = D_i u$, $u_{ij} = D_{ij} u$ 等. 记

$$\nu^i := \frac{u_i}{\sqrt{v_\delta}}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.17}$$

$$\tau_{ij} := \delta_{ij} - \nu^i \nu^j, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{3.18}$$

其中 δ_{ij} 是通常意义下的 Kronecker 符号. 由于 $v_\delta > 0$, 因此, ν^i 和 τ_{ij} 的定义显然是有意义的. 显然, 当 $\delta > 0$ 时, 向量 $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ 满足 $|\nu| < 1$, 矩阵 $\{\tau_{ij}\}$ 是正定的, 并且有下式成立:

$$D_\nu v = \frac{2}{\sqrt{v_\delta}} \Delta_\infty u. \tag{3.19}$$

对 ν^i 关于 x_j 求导数, 我们得到

$$\nu^i_j = \frac{1}{\sqrt{v_\delta}} \tau_{ik} u_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.20}$$

注意, 这里和后文中都使用 Einstein 求和约定. 设

$$w := \log(v_\delta), \quad s := \frac{v}{v_\delta} \quad (D_\nu u = \sqrt{v_\delta} s), \tag{3.21}$$

经计算, 可得

$$Dw = \frac{Dv}{v_\delta}, \quad Du \cdot Dw = \frac{2}{v_\delta} \Delta_\infty u \quad \left(D_\nu w = \frac{2}{(v_\delta)^{\frac{3}{2}}} \Delta_\infty u \right), \tag{3.22}$$

$$|s| < 1, \quad Ds = \frac{\delta}{v_\delta} Dw, \quad |Ds| < |Dw|. \tag{3.23}$$

运用 (3.17) 和 (3.20), 可以很容易得到下面的公式:

$$\nu^l \nu^l_m = \frac{\delta}{2v_\delta} w_m, \tag{3.24}$$

$$\nu^m \nu^l_m = \frac{1}{2} w_l - \frac{1}{2} \nu^l D_\nu w = \frac{1}{2} w_l - \frac{1}{(v_\delta)^{\frac{3}{2}}} \nu^l \Delta_\infty u \tag{3.25}$$

和

$$\begin{aligned}\nu_i^j\nu_k^i &= \frac{1}{v_\delta}\tau_{jm}u_{mi}\tau_{il}u_{lk} = \frac{1}{\sqrt{v_\delta}}\tau_{jm}\nu_m^l u_{lk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{v_\delta}}\tau_{jm}\nu_m^l\tau_{lp}u_{pk} + \frac{1}{\sqrt{v_\delta}}\tau_{jm}\nu_m^l\nu^l\nu^p u_{pk} \\ &= \tau_{jm}\left(\nu_m^l\nu_k^l + \frac{1}{4}\frac{\delta}{v_\delta}w_m w_k\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

设

$$z := |Dw|^2 = |D\log(v_\delta)|^2 = \left(\frac{|Dv|}{v_\delta}\right)^2, \tag{3.27}$$

则证明定理 1.3 最关键的要素在于得到 z 的与 δ 无关的上界. 有了这些准备工作, 我们现在来证明定理 1.3.

定理 1.3 的证明 因为在证明中需要用到关于 u 的四阶导数, 假设 $u\in C^4$. 由方程 (1.7) 和 (3.16), 可得

$$Du\cdot Dv = 2\beta v^{\frac{3}{2}}. \tag{3.28}$$

对 (3.28) 关于 x_j 求导数, 可得

$$u_i v_{ij} + v_i u_{ij} = 2\beta_j v^{\frac{3}{2}} + 3\beta v^{\frac{1}{2}} v_j, \quad j=1,\dots,n. \tag{3.29}$$

在 (3.29) 的两边乘以 u_j 并求和, 可以得到

$$u_i u_j v_{ij} = -\frac{1}{2}|Dv|^2 + 2\beta_j u_j v^{\frac{3}{2}} + 6\beta^2 v^2. \tag{3.30}$$

结合 (3.30) 和 $w_{ij} = \frac{1}{v_\delta}v_{ij} - \frac{1}{v_\delta^2}v_i v_j$, 我们得到

$$\nu^i\nu^j w_{ij} = -\frac{1}{2}z + S, \tag{3.31}$$

其中 $S := S_{(1)} + S_{(2)}$, 这里 $S_{(1)} = 2\beta_j\nu^j s^{\frac{3}{2}}$, $S_{(2)} = 6\beta^2 s^2 - 4\beta^2 s^3$. 对 (3.31) 关于 x_k 求导数, 得到

$$\nu^i\nu^j w_{kij} = -2\nu_k^i\nu^j w_{ij} - \frac{1}{2}z_k + S_k, \quad k=1,\dots,n. \tag{3.32}$$

由于 $z_{ij} = 2w_{ki}w_{kj} + 2w_k w_{kij}$, 于是可得

$$\nu_i\nu_j z_{ij} = 2\nu^i\nu^j w_{ki}w_{kj} + 2\nu^i\nu^j w_k w_{kij} \geqslant 2(\nu^i\nu^j w_{ij})^2 + 2\nu^i\nu^j w_k w_{kij}. \tag{3.33}$$

事实上, 当 $\delta>0$ 时, $|\nu|<1$, 因此, 不等式 (3.33) 应该是一个严格不等式. 这里将 (3.33) 写成非严格的不等式并不影响我们下面的证明. 将 (3.31) 和 (3.32) 代入 (3.33) 中, 可得

$$\begin{aligned}\nu_i\nu_j z_{ij} &\geqslant \frac{1}{2}z^2 - 2Sz + 2S^2 - 4\nu_k^i\nu^j w_{ij}w_k - w_k z_k + 2w_k S_k \\ &\geqslant \frac{1}{4}z^2 - z - 2S^2 - |DS_{(2)}|^2 - w_k z_k - 4\nu_k^i\nu^j w_{ij}w_k + 2w_k S_{(1)k}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

其中在第二个不等式中运用了 Cauchy 不等式. 下面将分别估计 $2S^2$、$|DS|^2$、$2w_kS_{(1)k}$ 和 $4\nu_k^i\nu^jw_{ij}w_k$. 由于 $|s|<1$ 和 $|\nu|<1$, 运用 Cauchy 不等式, 得到

$$2S^2 \leqslant 24(|D\beta|^2+13\beta^4). \tag{3.35}$$

由于 $DS_{(2)}=4\beta s(1-s)(3\beta Ds+sD\beta)$, 利用 $|\nu|<1$、(3.23) 和 Cauchy 不等式, 有

$$|DS_{(2)}|^2 \leqslant 128\beta^2(|D\beta|^2+9\beta^2 z). \tag{3.36}$$

经过类似计算可得

$$\begin{aligned}
2w_kS_{(1)k} &= 4w_k\left(\beta_{jk}\nu^js^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\beta_j\nu^js^{\frac{1}{2}}s_k\right)+4\beta_jw_k\nu_k^j\\
&\geqslant -2z-2\left(\beta_{jk}\nu^js^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\beta_j\nu^js^{\frac{1}{2}}s_k\right)^2+4\beta_jw_k\nu_k^j\\
&\geqslant -(2+9|D\beta|^2)z-4|D^2\beta|^2+4\beta_jw_k\nu_k^j.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

这里 (3.37) 右端的最后一项 $4\beta_jw_k\nu_k^j$ 经过分析之后可以被 $4\nu_k^i\nu^jw_{ij}w_k$ 这一项控制住. 因此, 我们开始分析这个关键的项 $4\nu_k^i\nu^jw_{ij}w_k$. 由 (1.7) 和 (3.22), 得到

$$Dw\cdot\nu = 2\beta s^{\frac{3}{2}}. \tag{3.38}$$

对 (3.38) 再求一次导数, 可得

$$\nu^jw_{ij} = -\nu_i^jw_j+2\beta_is^{\frac{3}{2}}+3\beta s^{\frac{1}{2}}s_i. \tag{3.39}$$

将 (3.39) 代入到 $4\nu_k^i\nu^jw_{ij}w_k$ 中, 运用 (3.25)、(3.26) 和 (3.38), 得到

$$\begin{aligned}
4\nu_k^i\nu^jw_{ij}w_k &= -4\nu_i^j\nu_k^iw_jw_k+4(2\beta_is^{\frac{3}{2}}+3\beta s^{\frac{1}{2}}s_i)(w_k\nu_k^i)\\
&= -4\tau_{jm}\left(\nu_m^l\nu_k^lw_jw_k+\frac{1}{4}\frac{\delta}{v_\delta}w_mw_k\right)w_jw_k+4(2\beta_is^{\frac{3}{2}}+3\beta s^{\frac{1}{2}}s_i)(w_k\nu_k^i)\\
&= -4\sum_l(w_k\nu_k^l)^2+4\beta s^{\frac{3}{2}}(w_l-2\nu^lgs^{\frac{3}{2}})(w_k\nu_k^l)-\frac{\delta}{v_\delta}(z^2-4\beta^2s^3z)\\
&\quad +4(2\beta_ls^{\frac{3}{2}}+3\beta s^{\frac{1}{2}}s_l)(w_k\nu_k^l)\\
&\leqslant -2\sum_l(w_k\nu_k^l)^2+84\beta^2z+32(\beta^4+|D\beta|^2).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

利用 (3.35)–(3.37) 和 (3.40), 不等式 (3.34) 变为

$$\begin{aligned}
\nu^i\nu^jz_{ij} &\geqslant \frac{1}{4}z^2-w_kz_k-\theta_1z-\theta_2+2\sum_l(w_k\nu_k^l)^2+4\beta_lw_k\nu_k^l\\
&\geqslant \frac{1}{4}z^2-w_kz_k-\theta_1z-\theta_2',
\end{aligned} \tag{3.41}$$

其中

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 3(3|D\beta|^2+384\beta^4+28\beta^2+1),\\
\theta_2 &= 4(|D^2\beta|^2+14|D\beta|^2+32\beta^2|D\beta|^2+86\beta^4),
\end{aligned}$$

$$\theta_2' = \theta_2 + 2|D\beta|^2.$$

现在我们已经得到了一个关于 z 的微分不等式 (3.41). 接下来将从微分不等式 (3.41) 推导出 z 的内部估计. 注意到微分不等式 (3.41) 右端的平方项 $\frac{1}{4}z^2$ 保证了 z 的这个内部估计. 为了完整起见, 这里将写出此内估计的详细推导过程. 事实上, 设 $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, 并记 $r = \zeta^4 z$, 那么,

$$r_i = \zeta^4 z_i + 4\zeta^3 \zeta_i z, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.42}$$

$$r_{ij} = \zeta^4 z_{ij} + 4\zeta^3(\zeta_j z_i + \zeta_i z_j) + 4(\zeta^3\zeta_i)_j z, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.43}$$

假设 r 在内部点 $x_0 \in \Omega$ 处取得它在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值, 则在点 x_0 处, 有

$$Dr = 0, \quad D^2 r \leqslant 0. \tag{3.44}$$

由 (3.41) 和 (3.44) 知, 在点 x_0 处, 有

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \nu^i\nu^j r_{ij} = \zeta^4\nu^i\nu^j z_{ij} + 8\zeta^3\nu^i\nu^j\zeta_i z_j + 4\nu^i\nu^j(\zeta^3\zeta_i)_j z \\
&\geqslant \zeta^4\left(\frac{1}{4}z^2 - w_k z_k - \theta_1 z - \theta_2'\right) + 8\zeta^3\nu^i\nu^j\zeta_i z_j + 4\nu^i\nu^j(\zeta^3\zeta_i)_j z \\
&\geqslant \frac{1}{4}\zeta^4 z^2 - C\zeta^3 z^{\frac{3}{2}} - C\zeta^2 z - C \\
&\geqslant \frac{1}{8}\zeta^4 z^2 - C,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

其中第一个不等式是利用了矩阵 $\{\nu^i\nu^j\}$ 的正定性, 最后一个不等式是运用了 Cauchy 不等式, 常数 C 依赖于 n、$|\zeta|_{2;\Omega}$ 和 $|\beta|_{2;\Omega}$, 注意常数 C 将逐行变化. 由 (3.45), 有

$$\zeta^4 z^2(x_0) \leqslant C. \tag{3.46}$$

由 (3.46), 再一次运用 Cauchy 不等式可得

$$\max_{\bar{\Omega}} r = \zeta^4 z(x_0) \leqslant C, \tag{3.47}$$

其中常数 C 依赖于相同的量. 给定任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们在 Ω' 上选取 $\zeta \equiv 1$, 因此便有

$$\max_{\Omega'} z \leqslant C, \tag{3.48}$$

其中常数 C 依赖于 n、$\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 和 $|\beta|_{2;\Omega}$. 由于 $z = |Dw|^2 = |D\log(v_\delta)|^2$, 因此, 从 (3.48) 得到

$$\|D(\log(v_\delta))\|_{L^\infty(\Omega')} \leqslant C, \tag{3.49}$$

其中常数 C 与 δ 无关. 现在选取任意两点 $y_1, y_2 \in \Omega'$, 并设 P 是路径

$$\{ty_2 + (1-t)y_1 \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}. \tag{3.50}$$

根据估计 (3.49), 有

$$\log v_\delta(y_2) - \log v_\delta(y_1) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[\log(v_\delta(ty_2 + (1-t)y_1))]dt$$

$$= \int_0^1 D(\log(v_\delta(ty_2 + (1-t)y_1))) \cdot (y_2 - y_1) dt$$
$$\leqslant C \ \mathrm{diam}(\Omega'). \tag{3.51}$$

于是,

$$v_\delta(y_2) \leqslant v_\delta(y_1) \mathrm{e}^{C \mathrm{diam}(\Omega')}. \tag{3.52}$$

在 (3.52) 中令 $\delta \to 0$, 得到

$$|Du(y_2)| \leqslant |Du(y_1)| \mathrm{e}^{\frac{1}{2} C \mathrm{diam}(\Omega')}, \tag{3.53}$$

对任意的 $y_1, y_2 \in \Omega'$ 成立. 因此便得到了梯度模的 Harnack 不等式 (1.9). 定理 1.3 证毕. □

注意到, 如果 Ω 是连通的且 $|Du| > 0$ 在 Ω 上的某个点处成立, 那么 $|Du| > 0$ 在 Ω 上处处成立. 在估计 (3.49) 中设 $\delta = 0$, 我们得到估计

$$\sup_{\Omega'} \left(\frac{|D|Du||}{|Du|} \right) \leqslant C, \tag{3.54}$$

其中常数 C 依赖于 n、$\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 和 $|\beta|_{2;\Omega}$.

在定理 1.3 中, 如果方程 (1.7) 被替换为方程 (1.3), 那么 Harnack 不等式 (1.9) 仍然成立, 其证明也会变得简单一些. 事实上, 对于方程 (1.3) 而言, 为了使算子 $\Delta_\infty^N u$ 有意义, $|Du|^2$ 本身就是非零的. 因此, 我们可以直接在上述证明中选取 $\delta = 0$.

注 3.5　正如在引言中提到的, 定理 1.3 的直接推论是方程 (1.7) 的 C^4 光滑的非常数解没有内部临界点. 本小节中的方法将在下节中用黏性解的语言来推导, 因此相应的推论可以被改进到只要求假设解 u 的 C^2 光滑性.

4　定理 1.4 的证明

本节通过引入黏性解, 给出定理 1.4 的证明. 证明的关键在于通过 (1.11) 来研究更高维空间中的函数 u.

对函数 $u \in C^2(\Omega)$ 和正数 ϵ, 记

$$u_\epsilon(x, x_{n+1}) := u(x) + \epsilon x_{n+1}, \tag{4.1}$$
$$v := |Du_\epsilon|^2 = |Du|^2 + \epsilon^2, \tag{4.2}$$
$$\nu := \frac{Du_\epsilon}{\sqrt{v}}, \quad Du_\epsilon = (u_1, \dots, u_n, \epsilon). \tag{4.3}$$

因为 $v > 0$, 向量 ν 的定义是有意义的, 所以有

$$\nu^i = \frac{u_{\epsilon i}}{\sqrt{v}}, \quad i = 1, \dots, n+1, \tag{4.4}$$
$$\nu^i_j = \frac{1}{\sqrt{v}} \tau_{ik} u_{\epsilon ij}, \quad i, j = 1, \dots, n+1, \tag{4.5}$$

其中 $u_{\epsilon i}=D_iu_\epsilon$, $u_{\epsilon ij}=D_{ij}u_\epsilon$, $\tau_{ik}:=\delta_{ik}-\nu^i\nu^k$, $i,j,k=1,\ldots,n+1$. 我们将引入下面方程的黏性解的定义:

$$\nu^i\nu^jv_{ij}=-\frac{|Dv|^2}{2v}+\frac{6}{v}\beta^2(v-\epsilon^2)^2+\frac{2}{\sqrt{v}}(D_\nu\beta)(v-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}},\quad x\in\tilde{\Omega}:=\Omega\times\mathcal{I},\tag{4.6}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集, $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界开区间. 注意本节中对 i 和 j 的求和是从 1 到 $n+1$. 我们将用 $\tilde{x}$ 表示 $\tilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 中的点.

定义 4.1 设 $u\in C^2(\Omega)$ 是方程 (1.7) 的解, $v=|Du|^2+\epsilon^2$, $\epsilon>0$, (4.6) 中的 $\tilde{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个连通开集. 如果对任意的 $\tilde{x}_0\in\tilde{\Omega}$ 和测试函数 $\varphi\in C^2(\tilde{\Omega})$, 若 $v-\varphi$ 在点 $\tilde{x}_0$ 处取得极大值, 即 $u(\tilde{x}_0)=\varphi(\tilde{x}_0)$, $u(\tilde{x})<\varphi(\tilde{x})$ 在 $\tilde{x}_0$ 的邻域内成立, 则在点 $\tilde{x}_0$ 处一定有

$$\nu^i\nu^j\varphi_{ij}\geqslant-\frac{|D\varphi|^2}{2\varphi}+\frac{6}{\varphi}\beta^2(\varphi-\epsilon^2)^2+\frac{2}{\sqrt{\varphi}}(D_\nu\beta)(\varphi-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}\tag{4.7}$$

成立, 那么称 v 是方程 (4.6) 的黏性下解.

如果 $-v$ 是方程 (4.6) 的黏性下解, 那么称 v 是方程 (4.6) 的黏性上解.

如果 $v\in C(\tilde{\Omega})$ 既是方程 (4.6) 的黏性下解, 又是方程 (4.6) 的黏性上解, 那么称 v 是方程 (4.6) 的黏性解.

首先用黏性解的定义来证明下面的引理.

引理 4.1 设 $u\in C^2(\Omega)$ 是方程 (1.7) 的解, $v=|Du|^2+\epsilon^2$, $\epsilon>0$, 那么 v 是方程 (4.6) 在 $\tilde{\Omega}$ 上的黏性解.

证明 因为 $u\in C^2(\Omega)$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\nu^iv_i=\sum_{i=1}^{n}\nu^iv_i=\frac{2}{\sqrt{v}}\beta(v-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}.\tag{4.8}$$

假设对 $\tilde{x}_0\in\tilde{\Omega}$ 和 $\varphi\in C^2(\tilde{\Omega})$,

$$v(\tilde{x})-\varphi(\tilde{x})<v(\tilde{x}_0)-\varphi(\tilde{x}_0)=0$$

在 $\tilde{x}\in\tilde{\Omega}\backslash\{\tilde{x}_0\}$ 上成立. 经过标准的分析可知在点 $\tilde{x}_0$ 处, 有下式成立:

$$(\nu^i\nu^j\varphi_i)_j\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\varphi}}\beta(\varphi-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}\nu^j\right)_j.\tag{4.9}$$

结合 $v(\tilde{x}_0)=\varphi(\tilde{x}_0)$ 和 $Dv(\tilde{x}_0)=D\varphi(\tilde{x}_0)$, (4.9) 经直接计算可知, 在点 $\tilde{x}_0$ 处, 有

$$\begin{aligned}\nu^i\nu^j\varphi_{ij}&\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{\varphi}}\beta(\varphi-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}\nu^j\right)_j-\nu^i_j\nu^j\varphi_i-\nu^i\nu^j_j\varphi_i\\&=-\frac{|D\varphi|^2}{2\varphi}+\frac{6}{\varphi}\beta^2(\varphi-\epsilon^2)^2+\frac{2}{\sqrt{\varphi}}(D_\nu\beta)(\varphi-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

因此, v 是方程 (4.6) 的黏性下解. 类似地, 我们可以证明 v 是方程 (4.6) 的黏性上解. 从而, v 是方程 (4.6) 的黏性解. 引理 4.1 证毕. □

有了这些准备工作, 下面就运用反证法证明定理 1.4. 我们将利用 (4.1) 中的函数 u_ϵ 以及建立类似文献 [4] 中的弱 Hopf 型结果来推导矛盾.

定理 1.4 的证明 我们将运用反证法. 如果 u 不是常数, 那么必存在点 $x_0 \in \Omega$ 和 $r > 0$ 使得在 $B_r(x_0)$ 中 $|Du| > 0$, 并且有

$$\partial B_r(x_0) \cap \{x \in \Omega : |Du(x)| = 0\} \neq \emptyset. \tag{4.11}$$

这里选取 r 足够小使得

$$r \leqslant \frac{2}{\sqrt{\max_\Omega(5\beta^2 + |D\beta|)}}.$$

由 (4.11), 显然有 $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. 对于 $\epsilon > 0$, 我们可以与 (4.1)–(4.3) 中一样分别定义 u_ϵ、v 和 ν, 并定义球

$$B_r(x_0, 0) := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0|^2 + x_{n+1}^2 \leqslant r^2\}, \tag{4.12}$$

则对于任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\min_{\partial B_r(x_0,0)} v = \epsilon^2 = \inf_{\Omega\times\mathbb{R}} v, \tag{4.13}$$

$$\min_{\bar{B}_{r/2}(x_0,0)} v > \min_{\bar{B}_{r/2}(x_0,0)} |Du|^2 > 0. \tag{4.14}$$

通过选取 $\tilde{x}_\epsilon \in \partial B_r(x_0, 0)$, 我们有

$$v(x_\epsilon) = \epsilon^2 = \min_{\partial B_r(x_0,0)} v. \tag{4.15}$$

定义下面两个函数:

$$w := \log v, \quad s := \frac{v - \epsilon^2}{v}. \tag{4.16}$$

类似 (3.31), 通过引理 4.1 可以验证

$$\nu^i \nu^j w_{ij} = -\frac{1}{2}|Dw|^2 + 6\beta^2 s^2 - 4\beta^2 s^3 + 2(D_\nu\beta)s^{\frac{3}{2}} \tag{4.17}$$

在黏性意义下成立. 注意到 $w_\delta := w + \delta$ 也是方程 (4.17) 的黏性解, 其中 δ 是任意常数. 对于 $k > 0$, 定义

$$f_k(\tilde{x}) := k(r^2 - |x - x_0|^2 - x_{n+1}^2). \tag{4.18}$$

由于 ν 是一个单位向量, 因此有

$$\nu^i \nu^j f_{k,ij} = -2k, \tag{4.19}$$

其中 $f_{k,ij} = D_{ij} f_k$. 对于 $r \leqslant \frac{2}{\sqrt{\max_\Omega(5\beta^2+|D\beta|)}}$, 通过选取 $k = \frac{4}{r^2}$, 我们有

$$\begin{aligned}\nu^i \nu^j f_{k,ij} = -2k &\geqslant -4k^2(|x - x_0|^2 + x_{n+1}^2) + 2\max_\Omega(5\beta^2 + |D\beta|) \\ &\geqslant -|Df_k|^2 + 6\beta^2 s^2 - 4\beta^2 s^3 + 2(D_\nu\beta)s^{\frac{3}{2}},\end{aligned} \tag{4.20}$$

对 $\tilde{x}\in B_r(x_0,0)\backslash B_{r/2}(x_0,0)$ 成立, 即 f_k 是方程 (4.17) 在 $B_r(x_0,0)\backslash B_{r/2}(x_0,0)$ 上的下解. 接下来将比较 $w_{-2\log\epsilon}$ 和 $f_{\frac{4}{r^2}}$ 这两个函数. 由 (4.14), 可假设

$$\min_{\bar{B}_{r/2}(x_0,0)}|Du|^2=\lambda^2>0, \tag{4.21}$$

对某个 $\lambda>0$ 成立. 固定 ϵ 充分小, 有

$$\begin{aligned}w_{-2\log\epsilon}&=w-2\log\epsilon=\log v-2\log\epsilon\geqslant\log|Du|^2-2\log\epsilon\\&\geqslant 2(\log\lambda-\log\epsilon)\geqslant f_{\frac{4}{r^2}},\end{aligned} \tag{4.22}$$

在 $\partial B_{r/2}(x_0,0)$ 上成立. 另外, 显然有

$$w_{-2\log\epsilon}\geqslant 0=f_{\frac{4}{r^2}}, \tag{4.23}$$

在 $\partial B_r(x_0,0)$ 上成立. 结合 (4.17)、(4.20)、(4.22) 和 (4.23), 并注意到当 δ 为常数时 w_δ 同样满足 (4.17), 我们可由比较原理得到

$$w_{-2\log\epsilon}\geqslant f_{\frac{4}{r^2}}, \tag{4.24}$$

在 $B_r(x_0,0)\backslash B_{r/2}(x_0,0)$ 上成立. 由于 $w_{-2\log\epsilon}(\tilde{x}_\epsilon)=f_{\frac{4}{r^2}}(\tilde{x}_\epsilon)=0$, 因此, 在点 $\tilde{x}_\epsilon$ 处, 有

$$D_\gamma w_{-2\log\epsilon}(\tilde{x}_\epsilon)\leqslant D_\gamma f_{\frac{4}{r^2}}(\tilde{x}_\epsilon)=-\frac{8}{r}<0, \tag{4.25}$$

其中 γ 是 $\partial B_r(x_0,0)$ 在点 x_ϵ 处的单位外法向量. 由 (4.25) 可得

$$D_\gamma w(\tilde{x}_\epsilon)\leqslant-\frac{8}{r}<0. \tag{4.26}$$

因此, 从 $v=\mathrm{e}^w$ 和 (4.26) 可得

$$D_\gamma v(\tilde{x}_\epsilon)=v(\tilde{x}_\epsilon)D_\gamma w(\tilde{x}_\epsilon)\leqslant-\frac{8v(\tilde{x}_\epsilon)}{r}<0, \tag{4.27}$$

则 $B_r(x_0)\subset\subset\Omega$ 和 (4.27) 意味着

$$\epsilon^2=\min_{\partial B_r(x_0,0)}v>\inf_{\Omega\times\mathbb{R}}v. \tag{4.28}$$

那么 (4.13) 和 (4.28) 导致了矛盾. 因此, 定理 1.4 的结论成立. 证毕. □

注 4.1 定理 1.4 有意思的地方在于方程 (1.7) 的经典解没有临界点除非它是常数, 这对于高度退化的方程来说并不是一个平凡的结果. 另外, 定理 1.4 中的性质也与受限制的唯一延拓性有关, 参见文献 [33].

致谢 本文的部分工作是第一作者在清华大学丘成桐数学科学中心做博士后期间完成的, 他非常感谢清华大学简怀玉教授给予的帮助和支持.

参考文献

1 Peres Y, Pete G, Somersille S. Biased tug-of-war, the biased infinity Laplacian, and comparison with exponential cones. Calc Var Partial Differential Equations, 2010, 38: 541–564

2 Barron E N, Evans L C, Jensen R. The infinity Laplacian, Aronsson's equation and their generalizations. Trans Amer Math Soc, 2008, 360: 77–101
3 Evans L C. Estimates for smooth absolutely minimizing Lipschitz extensions. Electron J Differential Equations, 1993, 3: 1–10
4 Yu Y. A remark on C^2 infinity-harmonic functions. Electron J Differential Equations, 2006, 122: 1–4
5 Aronsson G. On the partial differential equation $u_x^2u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{yy}=0$. Ark Mat, 1968, 7: 395–425
6 Savin O. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. Arch Ration Mech Anal, 2005, 176: 351–361
7 Evans L C, Savin O. $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions. Calc Var Partial Differential Equations, 2008, 32: 325–347
8 Evans L C, Smart C K. Everywhere differentiability of infinity harmonic functions. Calc Var Partial Differential Equations, 2011, 42: 289–299
9 Jiang F, Trudinger N S, Yang X P. On the Dirichlet problem for Monge-Ampére type equations. Calc Var Partial Differential Equations, 2014, 49: 1223–1236
10 Jiang F, Trudinger N S, Xiang N. On the Neumann problem for Monge-Ampére type equations. Canad J Math, 2016, 68: 1334–1361
11 Armstrong S N, Smart C K, Somersille S J. An infinity Laplace equation with gradient term and mixed boundary conditions. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 1763–1776
12 Barles G, Busca J. Existence and comparison results for fully nonlinear degenerate elliptic equations without zeroth-order term. Comm Partial Differential Equations, 2001, 26: 2323–2337
13 Liu Q, Schikorra A. General existence of solutions to dynamic programming equations. Commun Pure Appl Anal, 2015, 14: 167–184
14 Peres Y, Schramm O, Sheffield S, et al. Tug-of-war and the infinity Laplacian. J Amer Math Soc, 2009, 22: 167–210
15 Charro F, García Azorero J, Rossi J D. A mixed problem for the infinity Laplacian via tug-of-war games. Calc Var Partial Differential Equations, 2009, 34: 307–320
16 Evans L C, Gangbo W. Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem. Mem Amer Math Soc, 1999, 137: 66pp
17 García Azorero J, Manfredi J J, Peral I, et al. The Neumann problem for the ∞-Laplacian and the Monge-Kantorovich mass transfer problem. Nonlinear Anal, 2007, 66: 349–366
18 Bonamy C, Le Guyader C. Split Bregman iteration and infinity Laplacian for image decomposition. J Comput Appl Math, 2013, 240: 99–110
19 Caselles V, Morel J M, Sbert C. An axiomatic approach to image interpolation. IEEE Trans Image Process, 1998, 7: 376–386
20 Elion C, Vese L A. An image decomposition model using the total variation and the infinity Laplacian. In: Proceedings of Electronic Imaging 2007. Bellingham: SPIE, 2007, 64980W
21 Guillot L, Le Guyader C. Extrapolation of vector fields using the infinity Laplacian and with applications to image segmentation. In: International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. Heidelberg-Berlin: Springer, 2009, 87–99
22 Bhattacharya T. An elementary proof of the Harnack inequality for non-negative infinity-superharmonic functions. Electron J Differential Equations, 2001, 44: 1–8
23 Bhattacharya T. A note on non-negative singular infinity-harmonic functions in the half-space. Rev Mat Complut, 2005, 18: 377–385
24 Jensen R. Uniqueness of Lipschitz extensions: Minimizing the sup norm of the gradient. Arch Ration Mech Anal, 1993, 123: 51–74
25 Lindqvist P, Manfredi J J. The Harnack inequality for ∞-harmonic functions. Electron J Differential Equations, 1995, 4: 1–5
26 Bhataacharya T, Mohammed A. On solutions to Dirichlet problems involving the infinity-Laplacian. Adv Calc Var, 2011, 4: 445–487
27 Liu F, Yang X P. Solutions to an inhomogeneous equation involving infinity Laplacian. Nonlinear Anal, 2012, 75: 5693–5701
28 Lu G, Wang P. A PDE perspective of the normalized infinity Laplacian. Comm Partial Differential Equations, 2008, 33: 1788–1817
29 Lu G, Wang P. Inhomogeneous infinity Laplace equation. Adv Math, 2008, 217: 1838–1868
30 Lu G, Wang P. Infinity Laplace equation with non-trivial right-hand side. Electron J Differential Equations, 2010, 77: 1–12
31 López-Soriano R, Navarro-Climent J C, Rossi J D. The infinity Laplacian with a transport term. J Math Anal Appl,

2013, 398: 752–765
32 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2001
33 Llorente J G. Mean value properties and unique continuation. Commun Pure Appl Anal, 2015, 14: 185–199

Some estimates and properties of solutions to the biased infinity Laplacian equations

Feida Jiang, Fang Liu & Xiaoping Yang

Abstract In this paper, we study a kind of infinity Laplacian equations arising from biased tug-of-war in random games. Various properties of the solutions for such equations, including the gradient estimates, the Harnack inequalities for both nonnegative u and the gradient $|Du|$, are established. Finally, we prove that there are no interior critical points for non-constant C^2 solutions.

Keywords biased infinity Laplacian equation, gradient estimate, Harnack inequality

MSC(2010) 35J60, 35J70, 35D40

doi: 10.1360/SCM-2016-0799