中国科学 : 数学 2023 年 第 53 卷 第 8 期 : 1105 ～ 1124
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

非遍历 α-Brown 桥过程的偏差不等式与 Cramér 型中偏差

蒋辉[1], 潘雅娟[1], 韦晓[2,3]*

1. 南京航空航天大学数学学院, 南京 211106;
2. 中央财经大学中国精算研究院, 北京 102206;
3. 中央财经大学保险学院, 北京 102206

E-mail: huijiang@nuaa.edu.cn, panyajuan@nuaa.edu.cn, weixiao@cufe.edu.cn

收稿日期: 2021-11-25; 接受日期: 2023-01-31; 网络出版日期: 2023-04-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771209)、中央高校基本业务费 (批准号: NS2022069)、教育部人文社科基金 (批准号: 19YJC79150) 和高等学校学科创新引智计划 (批准号: B17050) 资助项目

摘要 考虑如下非遍历 α-Brown 桥过程:

$$dX_t = -\frac{\alpha}{T-t}X_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0, \quad t \in [0, T),$$

其中, $0 < \alpha < 1/2$, $T \in (0, \infty)$ 固定, $W = \{W_t : t \geqslant 0\}$ 是标准的 Brown 运动. 本文利用渐近分析的技巧以及多重 Wiener-Itô 积分的偏差性质, 研究二次泛函 $\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s$ 和 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds$ 的偏差不等式和 Cramér 型中偏差. 作为应用, 本文得到对数似然率过程和参数 α 极大似然估计量的 (自正则化) Cramér 型中偏差.

关键词 α-Brown 桥过程 Cramér 型中偏差 极大似然估计量 对数似然率过程 偏差不等式

MSC (2020) 主题分类 62N02, 60F10, 60G22

1 引言

考虑如下 α-Brown 桥过程:

$$dX_t = -\frac{\alpha}{T-t}X_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0, \quad t \in [0, T), \tag{1.1}$$

其中, $\alpha > 0$, $T \in (0, \infty)$ 固定, $W = \{W_t : t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 过程 X 为标准 Brown 桥过程. 作为随机金融领域的一类基本过程, α-Brown 桥过程可应用于探讨在给定期货合约交易成本情形下的套利问题 [3] 和到期价格固定的债券价格建模 [4] 等.

英文引用格式: Jiang H, Pan Y J, Wei X. Deviation inequalities and Cramér-type moderate deviations for non-ergodic α-Brownian bridge process (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1105–1124, doi: 10.1360/SSM-2021-0223

参数 α 的取值对过程的概率性质有重要的影响. 具体而言, Barczy 和 Pap [1,2] 指出, 当 $\alpha > 1/2$ 时, 过程是遍历的; 当 $\alpha = 1/2$ 时, 过程是零常返的; 当 $0 < \alpha < 1/2$ 时, 过程是非常返的. 因此, 在实际应用当中, 关于参数 α 的估计量及其渐近性质的研究尤为关键. 为了构造 α 的极大似然估计量, 由 Girsanov 公式可知, 对数似然率过程有以下表示:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(\alpha,\beta) &:= \log\left(\frac{dP_\alpha}{dP_\beta}\bigg|_{\mathcal{F}_t}\right)\\ &= (\beta-\alpha)\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dX_s - \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds\\ &= \begin{cases}(\beta-\alpha)\displaystyle\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds, & \text{在 } P_\alpha \text{下},\\ (\beta-\alpha)\displaystyle\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds, & \text{在 } P_\beta \text{下},\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leqslant t)$, P_α 为过程 (1.1) 对应的分布. 因此, 基于对 $X = \{X_t : 0 \leqslant t < T\}$ 的连续观测, α 的极大似然估计量可以表示为

$$\hat{\alpha}_t = -\frac{\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dX_s}{\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds} = \alpha - \frac{\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s}{\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds}. \tag{1.3}$$

在过程 X 遍历情形下 ($\alpha > 1/2$), 对于极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的研究已经相当成熟. 具体而言, Barczy 和 Pap [1,2] 及 Es-Sebaiy 和 Nourdin [7] 得到了如下渐近正态性: 当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$\sqrt{|\log(T-t)|}(\hat{\alpha}_t - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 2\alpha - 1),$$

其中 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 代表依分布收敛. 利用 Malliavin 分析中的技巧, Es-Sebaiy 和 Moustaaid [6] 考虑了最优一致 Berry-Esseen 界. 关于 $\hat{\alpha}_t$ 的大偏差和中偏差, 可参见文献 [12,16,22,23,25], 主要技巧为变测度方法.

在过程 X 非遍历情形下 ($\alpha \leqslant 1/2$), 极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的渐近性质发生了很大的变化. Barczy 和 Pap [1,2] 及 Es-Sebaiy 和 Nourdin [7] 得到了如下结论:

(1) 若 $\alpha = 1/2$, 当 $t \uparrow T$ 时,

$$|\log(T-t)|(\hat{\alpha}_t - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{\int_0^t W_s dW_s}{\int_0^t W_s^2 ds};$$

(2) 若 $0 < \alpha < 1/2$, 当 $t \uparrow T$ 时,

$$\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t - \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

其中随机变量 $\mathbb{C}$ 服从标准 Cauchy 分布. Zhao 等 [24] 利用变测度方法研究了 $\hat{\alpha}_t$ 在非遍历情形下的大偏差. 然而, 中偏差结果在目前文献中尚未涉及. 主要原因在于, 非遍历情形下估计量的渐近分布为非 Gauss 的, 处理中偏差的常用方法往往不再适用.

根据前面的分析, 本文考虑过程在非遍历情形下 ($0 < \alpha < 1/2$) 估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的 Cramér 型中偏差, 即找到尽可能大的 Ξ_t, 使得对于任意 $\rho > 0$, 当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \rho\Xi_t}\left|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\left(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t - \alpha) \geqslant x\right) - 1\right| \to 0,$$

其中 $F_{\mathbb{C}}(x)$ 是标准 Cauchy 随机变量 $\mathbb{C}$ 的分布函数. 可以看出, Cramér 型中偏差提供了估计量与其渐近分布尾概率的相对误差的一致估计, 其在统计推断上有广泛的应用 (参见文献 [5,10,18]). 通过 (1.2) 和 (1.3), 为了探讨 $\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)$ 和 $\hat{\alpha}_t$ 的 Cramér 型中偏差, 首先需要研究二次泛函

$$\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s, \quad \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds$$

的相关偏差性质. 本文的主要方法为渐近分析技巧 (参见文献 [11,13–15]) 以及多重 Wiener-Itô 积分的偏差性质 (参见文献 [19]).

2　主要结果

本文假定 C、C_1 和 C_2 为只依赖于 α 和 T 的正常数, 且 $0<\alpha<1/2$. 方便起见, 记

$$\xi_t=\int_0^t (T-u)^{\alpha-1}dW_u, \quad \eta_t=\int_0^t (T-u)^{-\alpha}dW_u. \tag{2.1}$$

容易得到如下性质:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\xi_t=\mathrm{E}\eta_t=0,\\
&\mathrm{E}\xi_t^2=\frac{(T-t)^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}-\frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}=:\psi_t,\\
&\mathrm{E}\eta_t^2=\frac{T^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}-\frac{(T-t)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}=:\phi_t.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1　二次泛函的偏差不等式与 Cramér 型中偏差

首先, 给出二次泛函 $\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s$ 和 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds$ 的偏差不等式.

定理 2.1　对于任意 $x>0$, 当 t 充分靠近 T 时, 有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\bigg(\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{1/2-\alpha}\bigg|\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s-\xi_t\eta_t\bigg|\geqslant x\bigg)\\
&\quad\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2x\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{\alpha-1/2}|\log(T-t)|^{-1/2}\bigg\}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

以及

$$\mathrm{P}\bigg(\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{1-2\alpha}\bigg|\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds-\psi_t\eta_t^2\bigg|\geqslant x\bigg)\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2x\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{\alpha-1/2}\bigg\}. \tag{2.4}$$

其次, 利用定理 2.1, 可以得到二次泛函 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds$ 和 $\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s$ 的 Cramér 型中偏差, 这在后续研究对数似然率过程 $\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)$ 及极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的 Cramér 型中偏差中起着非常重要的作用.

定理 2.2　假定正数 Ξ_t 满足当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\Xi_t\to\infty, \quad \frac{\Xi_t\log\Xi_t}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\to 0, \tag{2.5}$$

则对于任意 $\rho>0$, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\left|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}\left(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\geqslant x\right)-1\right|\to 0,$$

其中随机变量 χ^2 服从自由度为 1 的卡方分布, $F_{\chi^2}(x)$ 为其分布函数.

定理 2.3 假定正数 $\widetilde{\Xi}_t$ 满足当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\widetilde{\Xi}_t\to\infty,\quad \frac{\widetilde{\Xi}_t\log\widetilde{\Xi}_t}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}(-\log(T-t))^{-1}}\to 0, \tag{2.6}$$

则对于任意 $\rho>0$, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\widetilde{\Xi}_t}\left|\frac{1}{1-F_{\tau}(x)}\mathrm{P}\left(\frac{1-2\alpha}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s\geqslant x\right)-1\right|\to 0,$$

其中 $\tau=\zeta_1\zeta_2$, 且 ζ_1 与 ζ_2 是相互独立的标准正态随机变量.

2.2 对数似然率过程及极大似然估计量的 Cramér 型中偏差

利用定理 2.1 并结合渐近分析的技巧, 本小节将给出对数似然率过程 $\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)$ 和极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的 Cramér 型中偏差.

定理 2.4 设 $0<\alpha<1/2$, $0<\beta<1/2$ 且 $\alpha\neq\beta$. 假定正数 λ_t 满足当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\lambda_t\to\infty,\quad \frac{\lambda_t(\log\lambda_t)^2}{(1-\frac{t}{T})^{(\alpha\wedge\beta)-1/2}}\to 0, \tag{2.7}$$

则对于任意 $\rho>0$, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\lambda_t}\left|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}_\alpha\left(\frac{2(1-2\alpha)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)\geqslant x\right)-1\right|\to 0 \tag{2.8}$$

以及

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\lambda_t}\left|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}_\beta\left(-\frac{2(1-2\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\beta-1}}\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)\geqslant x\right)-1\right|\to 0. \tag{2.9}$$

定理 2.5 假定正数 β_t 满足当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\beta_t\to\infty,\quad \frac{\beta_t^3(\log\beta_t)^2}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\to 0, \tag{2.10}$$

则对于任意 $\rho>0$, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\left|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\left(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\right)-1\right|\to 0,$$

其中随机变量 $\mathbb{C}$ 服从标准 Cauchy 分布.

作为定理 2.5 的直接推论, 可以得到极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的中偏差. 可以看到, 这里的中偏差形式与遍历情形下的相关结果 (参见文献 [12]) 有着非常大的区别.

推论 2.1 假定正数 b_t 满足当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$b_t \to \infty, \quad \frac{b_t}{|\log(T-t)|} \to 0, \tag{2.11}$$

则

$$\left\{ \left| \frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t - \alpha) \right|^{\frac{1}{b_t}},\ 0 \leqslant t < T \right\}$$

满足大偏差, 其中速度为 b_t 且速率函数为

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \log x, & \text{若 } x \geqslant 1, \\ 0, & \text{若 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

在渐近分布 (1.4) 中, $\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}$ 含有未知参数 α. 因此, 在构造置信区间与拒绝域时, (1.4) 并不能直接应用. 为了解决这个问题, 考虑极大似然估计量 $\hat{\alpha}_t$ 的自正则化 Cramér 型中偏差.

定理 2.6 假定正数 γ_t 满足当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$\gamma_t \to \infty, \quad \frac{\gamma_t}{|\log(T-t)|} \to 0, \tag{2.12}$$

则对于任意 $\rho > 0$, 当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \rho \gamma_t^{1/2}} \left| \frac{1}{1-\Phi(x)} \mathrm{P}\left(\pm \left(\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds \right)^{1/2} (\hat{\alpha}_t - \alpha) \geqslant x \right) - 1 \right| \to 0. \tag{2.13}$$

注 2.1 通过 (1.3) 可知

$$\left\{ \hat{\alpha}_t - \alpha = -\frac{\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s}{\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds}, 0 \leqslant t < T \right\} \tag{2.14}$$

为连续时间自正则化鞅. Fan 等 [8] 和 Fan 等 [9] 得到了自正则化鞅的 Cramér 型中偏差. 需要注意到的是, 他们的假设条件为, 鞅的可料二次变差集中于其渐近期望附近. 但本文所研究的可料二次变差 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds$ 具有如下收敛性: 当 $t \uparrow T$ 时, 有

$$\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}} \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(1),$$

其中, $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 代表依分布收敛, $\chi^2(1)$ 是自由度为 1 的卡方分布. 自此明显可以看出, 本文不满足文献 [9] 中的有界性条件 (A1)–(A3).

3 二次泛函的偏差不等式和 Cramér 型中偏差

本节将给出主要结果定理 2.1 和 2.2 的证明.

3.1 多重 Wiener-Itô 积分表示与偏差不等式

过程 (1.1) 的强解为

$$X_s = (T-s)^{\alpha}\int_0^s (T-u)^{-\alpha} dW_u, \quad 0 \leqslant s < T. \tag{3.1}$$

据此, 可将二次泛函 $\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s$ 和 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds$ 用多重 Wiener-Itô 积分来表示, 这在本文的分析中起到关键性作用.

命题 3.1 令

$$\begin{aligned}
f_1(s,u) &= (T-(s\vee u))^{-\alpha}(T-(s\wedge u))^{\alpha-1},\\
f_2(s,u) &= (T-(s\vee u))^{-\alpha}(T-(s\wedge u))^{-\alpha},\\
f_3(s,u) &= (T-(s\vee u))^{\alpha-1}(T-(s\wedge u))^{-\alpha},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

则有如下分解:

$$\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s = \xi_t\eta_t + R_{1t}, \quad \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds = \psi_t\eta_t^2 + R_{2t}, \tag{3.3}$$

其中 ξ_t、η_t 和 ψ_t 的定义见 (2.1) 和 (2.2), 且

$$\begin{aligned}
R_{1t} &= -\frac{1}{2} I_2(f_1) + \log\left(1-\frac{t}{T}\right),\\
R_{2t} &= \frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha} I_2(f_2) - \frac{1}{1-2\alpha} I_2(f_3) - \frac{1}{(1-2\alpha)^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}\\
&\quad + \frac{1}{1-2\alpha}\log\left(1-\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{(1-2\alpha)^2},
\end{aligned}$$

这里 $I_2(f) = \int_0^t\int_0^t f(s,u) dW_u dW_s$ 是 $f(s,u)$ 关于 Brown 运动的二重 Wiener-Itô 积分 [21].

证明 由 (3.1) 可知,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s &= \int_0^t (T-s)^{\alpha-1}\int_0^s (T-u)^{-\alpha} dW_u dW_s,\\
\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds &= \int_0^t (T-s)^{2\alpha-2}\left(\int_0^s (T-u)^{-\alpha} dW_u\right)^2 ds.
\end{aligned}$$

利用分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s &= \int_0^t (T-u)^{\alpha-1} dW_u \int_0^t (T-u)^{-\alpha} dW_u\\
&\quad - \int_0^t\int_0^s (T-s)^{-\alpha}(T-u)^{\alpha-1} dW_u dW_s + \log\left(1-\frac{t}{T}\right)\\
&= \xi_t\eta_t - \frac{1}{2} I_2(f_1) + \log\left(1-\frac{t}{T}\right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

以及

$$\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds = \left(\frac{(T-t)^{2\alpha-1}}{1-2\alpha} - \frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}\right)\left(\int_0^t (T-u)^{-\alpha} dW_u\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}\int_0^t\int_0^s (T-s)^{-\alpha}(T-u)^{-\alpha}dW_udW_s\\
&-\frac{2}{1-2\alpha}\int_0^t\int_0^s (T-s)^{\alpha-1}(T-u)^{-\alpha}dW_udW_s\\
&-\frac{1}{(1-2\alpha)^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}+\frac{1}{1-2\alpha}\log\left(1-\frac{t}{T}\right)+\frac{1}{(1-2\alpha)^2}\\
=\;&\psi_t\eta_t^2+\frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}I_2(f_2)-\frac{1}{1-2\alpha}I_2(f_3)-\frac{1}{(1-2\alpha)^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}\\
&+\frac{1}{1-2\alpha}\log\left(1-\frac{t}{T}\right)+\frac{1}{(1-2\alpha)^2},
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

其中 f_1、f_2 和 f_3 如 (3.2) 定义. 结合 (3.4) 和 (3.5) 可以得到二次泛函的分解, 命题 3.1 成立. □

为了研究二次泛函 $\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s$ 与 $\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds$ 的偏差不等式和 Cramér 型中偏差, 需要用到如下多重 Wiener-Itô 积分的偏差不等式.

引理 3.1 (参见文献 [19, 定理 2]) 对于对称函数 $f\in L^2([0,T]^n)$ 和 $x>0$, 有

$$
\mathrm{P}(|I_n(f)|>x)\leqslant C\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n!}\|f\|_{L^2([0,T]^n)}}\right)^{\frac{2}{n}}\right\},
$$

其中 $C>0$ 仅依赖于 n.

定理 2.1 的证明 首先, 通过命题 3.1 可得

$$
\mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1/2-\alpha}\left|\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s-\xi_t\eta_t\right|\geqslant x\right)\leqslant \mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1/2-\alpha}\left|-\frac{1}{2}I_2(f_1)\right|\geqslant\frac{1}{2}x\right)
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}\left|\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds-\psi_t\eta_t^2\right|\geqslant x\right)\\
&\quad\leqslant \mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}\left|\frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}I_2(f_2)\right|\geqslant\frac{1}{3}x\right)+\mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}\left|-\frac{1}{1-2\alpha}I_2(f_3)\right|\geqslant\frac{1}{3}x\right),
\end{aligned}
$$

经直接计算可知

$$
\begin{aligned}
&\|f_1\|^2_{L^2([0,t]^2)}=O(|\log(T-t)|),\\
&\|f_2\|^2_{L^2([0,t]^2)}=O(1),\\
&\|f_3\|^2_{L^2([0,t]^2)}=O\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\alpha-1}\right).
\end{aligned}
$$

此时, 根据引理 3.1, 可以得到 (2.3) 和 (2.4), 即

$$
\mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1/2-\alpha}|R_{1t}|\geqslant x\right)\leqslant C_1\exp\left\{-C_2x\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha-1/2}|\log(T-t)|^{-1/2}\right\}
$$

以及

$$
\mathrm{P}\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)^{1-2\alpha}|R_{2t}|\geqslant x\right)\leqslant C_1\exp\left\{-C_2x\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha-1/2}\right\}.
$$

证毕. □

3.2 Cramér 型中偏差

借助定理 2.1, 即二次泛函 $\int_0^t \frac{1}{T-s}X_s dW_s$ 与 $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds$ 的偏差不等式, 本小节将给出定理 2.2 和 2.3 的详细证明.

定理 2.2 的证明 对于任意 $M>0$ 和 $M \leqslant x \leqslant \rho\Xi_t$, 由命题 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2 \geqslant x+\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)-\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}|R_{2t}| \geqslant \frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)\\
&\quad\leqslant \mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds \geqslant x\bigg)\\
&\quad\leqslant \mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2 \geqslant x-\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}|R_{2t}| \geqslant \frac{1}{\log\Xi_t}\bigg).
\end{aligned}
$$

因为 Ξ_t 满足条件 (2.5), 由 (2.4) 得

$$
\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\Xi_t}\log\mathrm{P}\bigg(\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{1-2\alpha}|R_{2t}| \geqslant \frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)=-\infty. \tag{3.6}
$$

注意到 $\phi_t^{-1}\eta_t^2 \sim N(0,1)$, 则

$$
\sup_{M\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2 \geqslant x\pm\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)-1\bigg| = \sup_{M\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\bigg|\frac{F_{\chi^2}(x)-F_{\chi^2}(x_t)}{1-F_{\chi^2}(x)}\bigg|, \tag{3.7}
$$

其中 $F_{\chi^2}(x)$ 是自由度为 1 的卡方分布的分布函数, 并且

$$
x_t=\bigg(x\pm\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{(1-2\alpha)^2\psi_t\phi_t}.
$$

由 (2.2) 可知

$$
\phi_t\psi_t=\frac{1}{(1-2\alpha)^2}\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{2\alpha-1}+O(1). \tag{3.8}
$$

因此,

$$
x_t=\bigg(x\pm\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)\bigg(1+O\bigg(\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{1-2\alpha}\bigg)\bigg).
$$

借助基本不等式 (参见文献 [17, 第 8 页, (2.1b)])

$$
\frac{x}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant 1-\Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad x\geqslant 0, \tag{3.9}
$$

可得

$$
1-F_{\chi^2}(x) \geqslant \frac{2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}(1+x)}. \tag{3.10}
$$

当 t 与 T 足够靠近时, 有 $|x-x_t| \leqslant \frac{2}{\log\Xi_t}$, 此时根据中值定理可以推导出

$$
|F_{\chi^2}(x)-F_{\chi^2}(x_t)| \leqslant \frac{2f_{\chi^2}(\hat{x})}{\log\Xi_t}, \tag{3.11}
$$

其中, $\hat{x}$ 的取值介于 x 与 x_t 之间, $f_{\chi^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. 根据 (3.7)、(3.10) 和 (3.11), 可知当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{M\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2\geqslant x\pm\frac{1}{\log\Xi_t}\bigg)-1\bigg|\\&\leqslant\sup_{M\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\frac{1+x}{\sqrt{x\hat{x}}\log\Xi_t}\mathrm{e}^{2(\log\Xi_t)^{-1}}\leqslant\frac{C}{\log\Xi_t}\to 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

结合 (3.6), 可得

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{M\leqslant x\leqslant\rho\Xi_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\geqslant x\bigg)-1\bigg|=0.\tag{3.13}$$

由定理 2.1 可知, 当 $t\uparrow T$ 时,

$$\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\xrightarrow{\mathcal{L}}\chi^2,$$

这等价于

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{x\geqslant 0}\bigg|\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\geqslant x\bigg)-(1-F_{\chi^2}(x))\bigg|=0.$$

因此, 可以得到

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{0\leqslant x\leqslant M}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\geqslant x\bigg)-1\bigg|=0.$$

结合 (3.13), 定理 2.2 得证. □

命题 3.2　令 $\xi=\psi_t^{-1/2}\xi_t$, $\eta=\phi_t^{-1/2}\eta_t$, 则有如下分解:

$$\xi\overset{d}{=}A_t\eta+B_t\nu,$$

其中, ν 为独立于 η 的标准正态随机变量, $\overset{d}{=}$ 表示在分布意义下相等, 且

$$\begin{aligned}A_t&=\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\bigg),\\B_t&=\sqrt{1-\mathrm{Cov}^2(\xi,\eta)}=1+O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1-2\alpha}|\log(T-t)|^2\bigg).\end{aligned}$$

证明　注意到 (ξ,η) 是二维正态随机变量, 满足

$$\mathrm{E}\xi=\mathrm{E}\eta=0,\quad\mathrm{Var}(\xi)=\mathrm{Var}(\eta)=1,\quad\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\frac{\log T-\log(T-t)}{(\phi_t\psi_t)^{1/2}},$$

因此,

$$\xi=\mathrm{Cov}(\xi,\eta)\eta+\sqrt{1-\mathrm{Cov}^2(\xi,\eta)}\nu,$$

其中 ν 是独立于 η 的标准正态随机变量. 又由 (3.8) 知

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\bigg),$$

因此, 命题 3.2 得证. □

定理 2.3 的证明 由于 τ 的密度函数有如下表达式 (参见文献 [20]):

$$f_\tau(x)=\frac{K_0(|x|)}{\pi},\quad x\in\mathbb{R},$$

其中 $K_0(|x|)=\int_0^\infty\frac{\cos(t|x|)}{\sqrt{1+t^2}}dt$ 是修正的第二类 Bessel 函数. 注意当 $x\to\infty$ 时, $K_0(|x|)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2|x|}}\mathrm{e}^{-|x|}$, 运用 L'Hospital 法则知

$$f_\tau(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi|x|}}\mathrm{e}^{-|x|},\quad F_\tau(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi|x|}}\mathrm{e}^{-|x|}.\tag{3.14}$$

通过 (3.4) 和命题 3.2, 有

$$\frac{\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s}{(\phi_t\psi_t)^{1/2}}=\xi\eta+\frac{R_{1t}}{(\phi_t\psi_t)^{1/2}}=:\eta\nu+\Theta_t,$$

其中

$$\Theta_t=\eta\nu(B_t-1)+A_t\eta^2+\frac{R_{1t}}{(\phi_t\psi_t)^{1/2}}.$$

从而,

$$\frac{1-2\alpha}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s=\eta\nu+\eta\nu\bigg(\frac{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}-1\bigg)+\frac{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\Theta_t.$$

由 (2.2) 和 (3.14), 有

$$\mathrm{P}\bigg(\eta\nu\bigg(\frac{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}-1\bigg)\geqslant\frac{1}{2\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg\}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\bigg(|\Theta_t|\geqslant\frac{1}{2\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)&\leqslant\mathrm{P}\bigg(|\eta\nu(B_t-1)|\geqslant\frac{1}{6\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(A_t\eta^2\geqslant\frac{1}{6\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\\&\quad+\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{R_{1t}}{(\phi_t\psi_t)^{1/2}}\bigg|\geqslant\frac{1}{6\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\\&\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}|\log(T-t)|^{-1}}{\log\Xi_t}\bigg\}.\end{aligned}$$

因此, 对于满足 (2.6) 的 $\widetilde{\Xi}_t$, 有

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\widetilde{\Xi}_t}\log\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}|\Theta_T|\geqslant\frac{1}{2\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\leqslant-C\lim_{t\uparrow T}\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}|\log(T-t)|^{-1}}{\widetilde{\Xi}_t\log\widetilde{\Xi}_t}=-\infty\tag{3.15}$$

以及

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\widetilde{\Xi}_t}\log\mathrm{P}\bigg(\eta\nu\bigg(\frac{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}-1\bigg)\geqslant\frac{1}{2\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\leqslant-C\lim_{t\uparrow T}\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{\widetilde{\Xi}_t\log\widetilde{\Xi}_t}=-\infty.\tag{3.16}$$

最后, 注意到 $\eta\nu$ 与 τ 在分布意义下相等, 则当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\widetilde{\Xi}_t}\bigg|\frac{1}{1-F_\tau(x)}\mathrm{P}\bigg(\eta\nu\geqslant x\pm\frac{1}{\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)-1\bigg|\\&\quad=\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\widetilde{\Xi}_t}\bigg|F_\tau(x)-F_\tau\bigg(x\pm\frac{1}{\log\widetilde{\Xi}_t}\bigg)\bigg|\leqslant\frac{C}{\log\widetilde{\Xi}_t}\to0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

利用 (3.15)–(3.17), 类似于定理 2.2 的证明思路, 可以得到定理 2.3. □

4 在对数似然率过程及极大似然估计量中的应用

4.1 对数似然率过程的 Cramér 型中偏差

由 (1.2) 和 (2.1), 可将对数似然率过程 $\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)$ 进一步表示为

$$\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{2}\displaystyle\int_0^t(T-u)^{2\alpha-2}du\bigg(\int_0^t(T-u)^{-\alpha}dW_u\bigg)^2+R_t, & \text{在 } P_\alpha \text{ 下},\\ -\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{2}\displaystyle\int_0^t(T-u)^{2\beta-2}du\bigg(\int_0^t(T-u)^{-\beta}dW_u\bigg)^2+\widetilde{R_t}, & \text{在 } P_\beta \text{ 下},\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}R_t&:=\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)-\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\int_0^t(T-u)^{2\alpha-2}du\bigg(\int_0^t(T-u)^{-\alpha}dW_u\bigg)^2,\\ \widetilde{R_t}&:=\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\int_0^t(T-u)^{2\beta-2}du\bigg(\int_0^t(T-u)^{-\beta}dW_u\bigg)^2.\end{aligned}\tag{4.1}$$

为了得到对数似然率过程 $\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)$ 的 Cramér 型中偏差, 关键在于证明如下 Cramér 型中偏差意义下的等价性.

命题 4.1 设 $\alpha>0$, $\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 若 λ_t 满足条件 (2.7), 则有

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\lambda_t}\log \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(T-t)^{2\alpha-1}}|R_t|\geqslant\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg)=-\infty,\tag{4.2}$$

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\lambda_t}\log \mathrm{P}_\beta\bigg(\frac{1}{(T-t)^{2\beta-1}}|\widetilde{R_t}|\geqslant\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg)=-\infty.\tag{4.3}$$

证明 在此, 仅证明 (4.2), 同理可得 (4.3). 由 (4.1), 可以将 R_t 进一步写成如下形式:

$$\begin{aligned}R_t=(\beta-\alpha)\bigg(\xi_t\eta_t-\frac12 I_2(f_1)+\log(T-t)-\log T\bigg)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\bigg(\frac{T^{2\alpha-1}}{1-2\alpha}I_2(f_2)-\frac{1}{1-2\alpha}I_2(f_3)\\ +\frac{\log(T-t)}{1-2\alpha}-\frac{\log T}{1-2\alpha}+\frac{1}{(1-2\alpha)^2}-\frac{(1-\frac{t}{T})^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\bigg).\end{aligned}\tag{4.4}$$

利用引理 3.1, 可得

$$\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\bigg|-\frac{\beta-\alpha}{2}I_2(f_1)\bigg|\geqslant\frac{1}{4\log\lambda_t}\bigg)\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{\log\lambda_t|\log(T-t)|^{1/2}}\bigg\},\tag{4.5}$$

$$\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\bigg|\frac{(\alpha-\beta)^2T^{2\alpha-1}}{2(1-2\alpha)}I_2(f_2)\bigg|\geqslant\frac{1}{4\log\lambda_t}\bigg)\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{\log\lambda_t}\bigg\}\tag{4.6}$$

以及

$$\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\bigg|-\frac{(\alpha-\beta)^2}{2(1-2\alpha)}I_2(f_3)\bigg|\geqslant\frac{1}{4\log\lambda_t}\bigg)\leqslant C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{\log\lambda_t}\bigg\}.\tag{4.7}$$

结合 (2.1) 和 (3.9), 有

$$\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\bigg|(\beta-\alpha)\xi_t\eta_t\bigg|\geqslant\frac{1}{4\log\lambda_t}\bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mathrm{P}_\alpha(|(\beta-\alpha)\eta_t| \geqslant \lambda_t^{1/2}\log\lambda_t) + \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{1}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}|\xi_t| \geqslant \frac{1}{4\lambda_t^{1/2}(\log\lambda_t)^2}\bigg)\\
&\leqslant C_1\exp\{-C_2\lambda_t(\log\lambda_t)^2\} + C_1\exp\bigg\{-C_2\frac{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}{\lambda_t(\log\lambda_t)^4}\bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

因此, 通过 (4.4)–(4.8), 可以得到 (4.2) 成立. □

定理 2.4 的证明 在此, 仅证明 (2.8), 同理可得 (2.9). 事实上, 对于任意 $0\leqslant x\leqslant \rho\lambda_t$, 有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2 \geqslant x+\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg) - \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{2(1-2\alpha)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}|R_t| \geqslant \frac{1}{\log\lambda_t}\bigg)\\
&\quad\leqslant \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{2(1-2\alpha)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)\geqslant x\bigg)\\
&\quad\leqslant \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2 \geqslant x-\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg) + \mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{2(1-2\alpha)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}|R_t| \geqslant \frac{1}{\log\lambda_t}\bigg).
\end{aligned}
$$

因为 λ_t 满足条件 (2.5), 结合 (3.12), 可知当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$
\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\lambda_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\psi_t\eta_t^2\geqslant x\pm\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg)-1\bigg|\to 0.
$$

利用命题 4.1, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$
\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\lambda_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\chi^2}(x)}\mathrm{P}_\alpha\bigg(\frac{2(1-2\alpha)^2}{(\alpha-\beta)^2(1-\frac{t}{T})^{2\alpha-1}}\mathcal{L}_t(\alpha,\beta)\geqslant x\pm\frac{1}{\log\lambda_t}\bigg)-1\bigg|\to 0.
$$

证毕. □

4.2 极大似然估计量的 Cramér 型中偏差

记

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{1t} &= (\phi_t\psi_t)^{-1/2}R_{1t} = (\phi_t\psi_t)^{-1/2}\bigg(\int_0^t\frac{1}{T-s}X_s dW_s - \xi_t\eta_t\bigg),\\
\widetilde{R}_{2t} &= (\phi_t\psi_t)^{-1}R_{2t} = (\phi_t\psi_t)^{-1}\bigg(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2 ds - \psi_t\eta_t^2\bigg).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

首先考虑 $\frac{(1-t/T)^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)$ 的主要项 $-\varphi_t\frac{\xi}{\eta}$ 的 Cramér 型中偏差.

命题 4.2 若 β_t 满足条件 (2.10), 则对于任意 $\rho>0$, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$
\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\bigg(\pm\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\bigg)-1\bigg|\to 0,
$$

其中

$$
\varphi_t = \frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{(1-2\alpha)(\phi_t\psi_t)^{1/2}} = 1+O\bigg(\Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{1-2\alpha}\bigg).
$$

证明 由命题 3.2 可以得到

$$
\frac{\xi}{\eta}\overset{d}{=}A_t+B_t\frac{\nu}{\eta},
$$

其中, ν 为标准正态随机变量, 独立于 η, 且

$$A_t=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\bigg),\quad B_t=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1-2\alpha}|\log(T-t)|^2\bigg).$$

因为 $\frac{\nu}{\eta}$ 是标准 Cauchy 随机变量, 从而

$$\mathrm{P}\bigg(\pm\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\bigg)=1-F_{\mathbb{C}}((\varphi_tB_t)^{-1}(x\mp\varphi_tA_t)).$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}x(1-F_{\mathbb{C}}(x))=\frac{1}{\pi},\tag{4.10}$$

则对于任意 $\epsilon>0$, 都存在正常数 M, 使得

$$\sup_{x\geqslant M}|\pi x(1-F_{\mathbb{C}}(x))-1|\leqslant\epsilon.\tag{4.11}$$

结合估计

$$\varphi_tB_t=1+O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1-2\alpha}\bigg),\quad \varphi_tA_t=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\bigg),$$

当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\bigg(\pm\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\bigg)-1\bigg|\\&=\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{F_{\mathbb{C}}(x)-F_{\mathbb{C}}((\varphi_tB_t)^{-1}(x\mp\varphi_tA_t))}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\bigg|\\&\leqslant\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\frac{x(1-\frac{t}{T})^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|}{(1-\epsilon)(1+x^2)}\\&\leqslant C\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\\&\to0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

由函数 $1-F_{\mathbb{C}}(x)$ 的一致连续性可得

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigg|\mathrm{P}\bigg(\pm\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\bigg)-(1-F_{\mathbb{C}}(x))\bigg|=0,$$

此时, 可以推导出

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{0\leqslant x\leqslant2M}\bigg|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\bigg(\pm\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\bigg)-1\bigg|=0.$$

结合 (4.12), 可以证明命题 4.2 成立. □

接下来, 验证 $\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)$ 与 $-\varphi_t\frac{\xi}{\eta}$ 在 Cramér 型中偏差意义下的等价性.

命题 4.3　若 β_t 满足条件 (2.10), 则

$$\lim_{t\uparrow T}\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{1}{\log\beta_t}\bigg)=0.\tag{4.13}$$

证明 根据 (1.3), 有

$$\begin{aligned}\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}&=-\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}\frac{\int_0^t\frac{1}{T-s}X_sdW_s-\xi_t\eta_t}{\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds}+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\frac{\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds-\psi_t\eta_t^2}{\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds}\\&=-\varphi_t\frac{\widetilde{R}_{1t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\frac{\widetilde{R}_{2t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}.\end{aligned}$$

因此, 要证 (4.13), 只需证明如下两式成立:

$$\lim_{t\uparrow T}\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\widetilde{R}_{1t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\log\beta_t}\bigg)=0,\tag{4.14}$$

$$\lim_{t\uparrow T}\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\frac{\widetilde{R}_{2t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\log\beta_t}\bigg)=0.\tag{4.15}$$

首先, 对于任意 $\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\widetilde{R}_{1t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\log\beta_t}\bigg)\\&\quad\leqslant\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\varphi_t\widetilde{R}_{1t}|\geqslant\frac{\epsilon}{2\beta_t^2\log\beta_t}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\eta^2+\widetilde{R}_{2t}|\leqslant\frac{\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)\\&\quad\leqslant\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\varphi_t\widetilde{R}_{1t}|\geqslant\frac{\epsilon}{2\beta_t^2\log\beta_t}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(\eta^2\leqslant\frac{2\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon}{\beta_t^2}\bigg).\end{aligned}\tag{4.16}$$

注意到 $\eta\sim N(0,1)$, 从而

$$\beta_t\mathrm{P}\bigg(\eta^2\leqslant\frac{2\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)\leqslant C\sqrt{\epsilon},$$

即

$$\lim_{\epsilon\to0}\lim_{t\uparrow T}\beta_t\mathrm{P}\bigg(\eta^2\leqslant\frac{2\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)=0.\tag{4.17}$$

若 β_t 满足条件 (2.10), 由定理 2.1 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow T}\beta_t\bigg(\mathrm{P}\bigg(|\varphi_t\widetilde{R}_{1t}|\geqslant\frac{\epsilon}{2\beta_t^2\log\beta_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)\bigg)\\&\quad\leqslant C_1\lim_{t\uparrow T}\beta_t\exp\bigg\{-C_2\frac{\epsilon(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}|\log(T-t)|^{-1/2}}{\beta_t^2\log\beta_t}\bigg\}\\&\quad=0.\end{aligned}\tag{4.18}$$

结合 (4.16)–(4.18), 可以证明 (4.14) 成立.

其次, 对于任意 $\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\frac{\widetilde{R}_{2t}}{\eta^2+\widetilde{R}_{2t}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\log\beta_t}\bigg)\\&\quad\leqslant\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{\beta_t}{\epsilon}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\eta^2+\widetilde{R}_{2t}|\leqslant\frac{\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon^2}{2\beta_t^3\log\beta_t}\bigg)\\&\quad\leqslant\beta_t\mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{\beta_t}{\epsilon}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(\eta^2\leqslant\frac{2\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon}{\beta_t^2}\bigg)+\beta_t\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon^2}{2\beta_t^3\log\beta_t}\bigg).\end{aligned}$$

根据命题 4.2, 易知

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{t\uparrow T}\beta_t \mathrm{P}\bigg(\bigg|\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{\beta_t}{\epsilon}\bigg)=0. \tag{4.19}$$

由 (4.9) 和定理 2.1, 可得

$$\lim_{t\uparrow T}\beta_t \mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\epsilon^2}{2\beta_t^3\log\beta_t}\bigg)\leqslant\lim_{t\uparrow T}C_1\beta_t\exp\bigg\{-C_2\frac{\epsilon^2(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{\beta_t^3\log\beta_t}\bigg\}=0. \tag{4.20}$$

最后结合 (4.17)–(4.20), 可得 (4.15). 因此, 命题 4.3 成立. □

定理 2.5 的证明　选择 $M>0$ 使得 (4.11) 成立, 那么对于任意 $\rho>0$ 和 $2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\bigg(-\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x+\frac{1}{\log\beta_t}\bigg)-\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{1}{\log\beta_t}\bigg)\\&\quad\leqslant\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\bigg)\\&\quad\leqslant\mathrm{P}\bigg(-\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x-\frac{1}{\log\beta_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\bigg|\geqslant\frac{1}{\log\beta_t}\bigg).\end{aligned} \tag{4.21}$$

一方面, 由命题 4.3 和 (4.11) 可以推导出

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\frac{\mathrm{P}(|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\varphi_t\frac{\xi}{\eta}|\geqslant\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}=0. \tag{4.22}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{\mathrm{P}(\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}-1\bigg|&\leqslant\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{1-F_{\mathbb{C}}(x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}-1\bigg|\\&\quad+\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{1-F_{\mathbb{C}}(x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\bigg|\bigg|\frac{\mathrm{P}(\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}-1\bigg|.\end{aligned}$$

由中值定理和 (4.11) 可知, 当 $t\to T$ 时, 有

$$\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{1-F_{\mathbb{C}}(x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}-1\bigg|\leqslant\frac{C}{(1-\epsilon)\log\beta_t}\to 0. \tag{4.23}$$

结合命题 4.2 和 (4.23), 可知

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_t}\bigg|\frac{\mathrm{P}(\varphi_t\frac{\xi}{\eta}\geqslant x\pm\frac{1}{\log\beta_t})}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}-1\bigg|=0. \tag{4.24}$$

此时, 通过 (4.21)–(4.24), 可以得到

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{2M\leqslant x\leqslant\rho\beta_T}\bigg|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\bigg)-1\bigg|=0. \tag{4.25}$$

由函数 $1-F_{\mathbb{C}}(x)$ 的一致连续性可得

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigg|\mathrm{P}\bigg(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\bigg)-(1-F_{\mathbb{C}}(x))\bigg|=0,$$

则

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{0\leqslant x\leqslant 2M}\left|\frac{1}{1-F_{\mathbb{C}}(x)}\mathrm{P}\left(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\right)-1\right|=0. \tag{4.26}$$

最后, 利用 (4.25) 和 (4.26) 完成定理 2.5 的证明. □

推论 2.1 的证明 注意对于任意 $x\geqslant 0$, 总有

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\right|^{\frac{1}{b_t}}\geqslant x\right)=\mathrm{P}\left(\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}|\hat{\alpha}_t-\alpha|\geqslant x^{b_t}\right).$$

当 $0\leqslant x<1$ 时, 有 $x^{b_t}\to 0$, $t\uparrow T$. 由定理 2.5 可得, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{P}(|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)|^{\frac{1}{b_t}}\geqslant x)}{1-F_{\mathbb{C}}(x^{b_t})}\to 1.$$

从而可得

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log\mathrm{P}\left(\left|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\right|^{\frac{1}{b_t}}\geqslant x\right)=\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log(1-F_{\mathbb{C}}(x^{b_t}))=0. \tag{4.27}$$

当 $x=1$ 时, 有 $x^{b_t}=1$. 由定理 2.5 可得

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log\mathrm{P}\left(\left|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\right|^{\frac{1}{b_t}}\geqslant x\right)=\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log(1-F_{\mathbb{C}}(1))=0. \tag{4.28}$$

当 $x>1$ 时, 若 b_t 满足条件 (2.11), 则有下式成立:

$$x^{b_t}\to\infty,\quad \frac{x^{3b_t}(b_t)^2}{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}\to 0.$$

由定理 2.5 和 (4.10), 可以得到

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log\mathrm{P}\left(\left|\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{1-2\alpha}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\right|^{\frac{1}{b_t}}\geqslant x\right)=\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{b_t}\log(1-F_{\mathbb{C}}(x^{b_t}))=-\log x. \tag{4.29}$$

最后, 通过 (4.27)–(4.29) 可知推论成立. □

4.3 极大似然估计量的自正则化 Cramér 型中偏差

验证极大似然估计量的自正则化 Cramér 型中偏差关键在于获得 $(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds)^{1/2}(\hat{\alpha}_t-\alpha)$ 与 $-\frac{\xi\eta}{|\eta|}$ 的指数等价性.

命题 4.4 若 γ_t 满足条件 (2.12), 则有

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log\mathrm{P}\left(\left|\left(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\right)^{1/2}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\frac{\xi\eta}{|\eta|}\right|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\right)=-\infty.$$

证明 由于

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\right)^{1/2}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\frac{\xi\eta}{|\eta|}\\&=-\frac{\widetilde{R}_{1t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}}+\frac{\xi\eta}{|\eta|}\cdot\frac{\widetilde{R}_{2t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}(|\eta|+(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2})},\end{aligned}$$

所以要证明命题 4.4 成立, 只需验证

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{\widetilde{R}_{1t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)=-\infty \tag{4.30}$$

以及

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{\xi\eta}{|\eta|}\cdot\frac{\widetilde{R}_{2t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}(|\eta|+(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2})}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)=-\infty. \tag{4.31}$$

首先, 对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{\widetilde{R}_{1t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\leqslant \mathrm{P}((\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}\leqslant \mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}})+\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{1t}|\geqslant\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg).$$

由定理 2.1 可得

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{1t}|\geqslant\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\leqslant -C\lim_{t\uparrow T}\frac{(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}\mathrm{e}^{-\gamma_t\epsilon^{-1}}}{|\log(T-t)|^{1/2}\gamma_t^{3/2}\log\gamma_t}=-\infty \tag{4.32}$$

以及

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant \mathrm{e}^{-2\gamma_t\varepsilon^{-1}})\leqslant -C\lim_{t\uparrow T}\frac{(T-t)^{\alpha-1/2}\mathrm{e}^{-2\gamma_t\epsilon^{-1}}}{\gamma_t}=-\infty. \tag{4.33}$$

又因为 $\eta\sim N(0,1)$, 所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}(|\eta|\leqslant\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}})=-C\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}=-\infty. \tag{4.34}$$

由 (4.33) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}((\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}\leqslant \mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}})\\&\quad\leqslant\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log(\mathrm{P}(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant \mathrm{e}^{-2\gamma_t\varepsilon^{-1}})+\mathrm{P}(|\eta|\leqslant\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}))\\&\quad=-\infty.\end{aligned} \tag{4.35}$$

结合 (4.32), 可知 (4.30) 成立.

接下来证明 (4.31). 事实上,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\bigg(\bigg|\frac{\xi\eta}{|\eta|}\cdot\frac{\widetilde{R}_{2t}}{(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2}(|\eta|+(\eta^2+\widetilde{R}_{2t})^{1/2})}\bigg|\geqslant\frac{1}{2\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\\&\quad\leqslant \mathrm{P}(|\xi|\geqslant\gamma_t^{1/2}\varepsilon^{-1})+2\mathrm{P}\bigg(|\eta^2+\widetilde{R}_{2t}|\leqslant\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}\bigg)\\&\qquad+\mathrm{P}\bigg(|\eta|\leqslant\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1/2\gamma_t\varepsilon^{-1}}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\varepsilon \mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}}{2\gamma_t\log\gamma_t}\bigg).\end{aligned}$$

由 $\xi\sim N(0,1)$, 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log \mathrm{P}(|\xi|\geqslant\gamma_t^{1/2}\varepsilon^{-1})\leqslant -C\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}=-\infty. \tag{4.36}$$

根据定理 2.1, 有

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log\mathrm{P}\bigg(|\widetilde{R}_{2t}|\geqslant\frac{\varepsilon\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}}{2\gamma_t\log\gamma_t}\bigg)\leqslant -C\frac{\varepsilon\mathrm{e}^{-\gamma_t\varepsilon^{-1}}(1-\frac{t}{T})^{\alpha-1/2}}{\gamma_t^2\log\gamma_t}=-\infty. \tag{4.37}$$

最后, 结合 (4.34)–(4.37), 可以得到 (4.31). □

定理 2.6 的证明 根据命题 3.2, 可将 $-\frac{\xi\eta}{|\eta|}$ 写成如下形式:

$$-\frac{\xi\eta}{|\eta|}\overset{d}{=}-A_t|\eta|-B_t\frac{\eta}{|\eta|}\nu,$$

其中, ν 为标准正态随机变量, 独立于 η, 且

$$A_t=O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1/2-\alpha}|\log(T-t)|\bigg),\quad B_t=1+O\bigg(\bigg(1-\frac{t}{T}\bigg)^{1-2\alpha}|\log(T-t)|^2\bigg).$$

令 $\mathcal{R}_t=(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds)^{1/2}(\hat{\alpha}_t-\alpha)+\frac{\xi\eta}{|\eta|}$, 则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\bigg(B_t\frac{\eta}{|\eta|}\nu\geqslant x+\frac{2}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)-\mathrm{P}\bigg(A_t|\eta|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)-\mathrm{P}\bigg(|\mathcal{R}_t|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\\&\leqslant\mathrm{P}\bigg(\bigg(\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}X_s^2ds\bigg)^{1/2}(\hat{\alpha}_t-\alpha)\geqslant x\bigg)\\&\leqslant\mathrm{P}\bigg(B_t\frac{\eta}{|\eta|}\nu\geqslant x-\frac{2}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(A_t|\eta|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)+\mathrm{P}\bigg(|\mathcal{R}_t|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg).\end{aligned}\tag{4.38}$$

注意到 $\frac{\eta}{|\eta|}\nu$ 和 η 均为标准正态随机变量, 当 $t\uparrow T$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\gamma_t^{1/2}}\left|\frac{\mathrm{P}(B_t\frac{\eta}{|\eta|}\nu\geqslant x\pm\frac{2}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t})}{1-\Phi(x)}-1\right|\\&=\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\gamma_t^{1/2}}\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(B_t^{-1}(x\pm\frac{2}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}))}{1-\Phi(x)}\right|\\&\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\gamma_t^{1/2}}C(2+\sqrt{2\pi}x)\bigg(|1-B_t^{-1}|x+\frac{2B_t^{-1}}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\\&\quad\times\exp\bigg\{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\bigg(x^2\wedge\bigg(B_t^{-1}\bigg(x\pm\frac{2}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\bigg)^2\bigg)\bigg\}\\&\to 0.\end{aligned}\tag{4.39}$$

同时, 注意到 $\eta\sim N(0,1)$, 则有

$$\lim_{t\uparrow T}\frac{1}{\gamma_t}\log\mathrm{P}\bigg(A_t|\eta|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t}\bigg)\leqslant -C\lim_{t\uparrow T}\frac{A_t^{-2}}{\gamma_t^2(\log\gamma_t)^2}=-\infty.$$

利用命题 4.4, 可得

$$\lim_{t\uparrow T}\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\gamma_t^{1/2}}\frac{\mathrm{P}(A_t|\eta|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t})}{1-\Phi(x)}=\lim_{t\uparrow T}\sup_{0\leqslant x\leqslant\rho\gamma_t^{1/2}}\frac{\mathrm{P}(|\mathcal{R}_t|\geqslant\frac{1}{\gamma_t^{1/2}\log\gamma_t})}{1-\Phi(x)}=0. \tag{4.40}$$

因此, 通过 (4.38)–(4.40), 可以得到 (2.13). □

致谢 非常感谢两位审稿专家提出的宝贵意见.

参考文献

1 Barczy M, Pap G. Asymptotic behavior of maximum likelihood estimator for time inhomogeneous diffusion processes. J Statist Plann Inference, 2010, 140: 1576–1593

2 Barczy M, Pap G. Explicit formulas for Laplace transforms of certain functionals of some time inhomogeneous diffusions. J Math Anal Appl, 2011, 380: 405–424

3 Brennan M J, Schwartz E S. Arbitrage in stock index futures. J Bus, 1990, 63: S7–S31

4 Cai M C, Yang C J, Zhang J. Brown motion and duration method in government bonds' price behavior (in Chinese). Chinese J Manag Sci, 2003, 11: 28–32 [蔡明超, 杨朝军, 张静. 国债价格行为的布朗桥运动模型与久期方法比较. 中国管理科学, 2003, 11: 28–32]

5 Chang J Y, Shao Q M, Zhou W X. Cramér-type moderate deviations for Studentized two-sample U-statistics with applications. Ann Statist, 2016, 44: 1931–1956

6 Es-Sebaiy K, Moustaaid J. Optimal Berry-Esséen bound for maximum likelihood estimation of the drift parameter in α-Brownian bridge. J Korean Statist Soc, 2021, 50: 403–418

7 Es-Sebaiy K, Nourdin I. Parameter estimation for α-fractional bridges. In: Malliavin Calculus and Stochastic Analysis. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 34. Boston: Springer, 2013, 385–412

8 Fan X Q, Grama I, Liu Q S. Cramér moderate deviation expansion for martingales with one-sided Sakhanenko's condition and its applications. J Theoret Probab, 2020, 33: 749–787

9 Fan X Q, Grama I, Liu Q S, et al. Self-normalized Cramér type moderate deviations for martingales. Bernoulli, 2019, 25: 2793–2823

10 Fang X, Luo L, Shao Q M. A refined Cramér-type moderate deviation for sums of local statistics. Bernoulli, 2020, 26: 2319–2352

11 Gao F Q, Xiong J, Zhao X Q. Moderate deviations and nonparametric inference for monotone functions. Ann Statist, 2018, 46: 1225–1254

12 Jiang H. Moderate deviations for parameter estimation in some time inhomogeneous diffusions. J Statist Plann Inference, 2009, 139: 3665–3674

13 Jiang H, Liu H. Cramér-type moderate deviations for the likelihood ratio process of Ornstein-Uhlenbeck process with shift. Stoch Dyn, 2021, 21: 2150027

14 Jiang H, Liu H, Zhou Y Z. Asymptotic properties for the parameter estimation in Ornstein-Uhlenbeck process with discrete observations. Electron J Stat, 2020, 14: 3192–3229

15 Jiang H, Zhang N. Cramér-type moderate deviations for statistics in the non-stationary Ornstein-Uhlenbeck process. Stochastics, 2020, 92: 478–496

16 Jiang H, Zhao S J. Large and moderate deviations in testing time inhomogeneous diffusions. J Statist Plann Inference, 2011, 141: 3160–3169

17 Lin Z, Bai Z. Probability Inequalities (in Chinese). Beijing: Science Press, 2006 [林正炎, 白志东. 概率不等式. 北京: 科学出版社, 2006]

18 Liu W, Shao Q M. Cramér-type moderate deviation for the maximum of the periodogram with application to simultaneous tests in gene expression time series. Ann Statist, 2010, 38: 1913–1935

19 Major P. On a multivariate version of Bernstein's inequality. Electron J Probab, 2007, 12: 966–988

20 Nadarajah S, Pogány T K. On the distribution of the product of correlated normal random variables. Comptes Rendus Math, 2016, 354: 201–204

21 Nualart D, Nualart. Introduction to Malliavin Calculus. Cambridge: Cambridge University Press, 2018

22 Zhao S J, Chen T. Large deviation expansion for maximum-likelihood estimator of α-Brownian bridge. Comm Statist Theory Methods, 2017, 46: 7313–7326

23 Zhao S J, Liu Q J. Large deviations for parameter estimators of α-Brownian bridge. J Statist Plann Inference, 2012, 142: 695–707

24 Zhao S J, Liu Q J, Chen T. On the large deviation principle for maximum likelihood estimator of α-Brownian bridge. Statist Probab Lett, 2018, 138: 143–150

25 Zhao S J, Zhou Y P. Sharp large deviations for the log-likelihood ratio of an α-Brownian bridge. Statist Probab Lett, 2013, 83: 2750–2758

Deviation inequalities and Cramér-type moderate deviations for non-ergodic α-Brownian bridge process

Hui Jiang, Yajuan Pan & Xiao Wei

Abstract Consider the following non-ergodic α-Brownian bridge process:

$$dX_t = -\frac{\alpha}{T-t} X_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0, \quad t \in [0, T),$$

where $0 < \alpha < 1/2$, $T \in (0, \infty)$ is fixed, and $W = \{W_t : t \geqslant 0\}$ is a standard Brownian motion. By using the asymptotic analysis techniques and the deviation properties of the multiple Wiener-Itô integral, we study the deviation inequalities and the Cramér-type moderate deviations for the quadratic functionals $\int_0^t \frac{1}{T-s} X_s dW_s$ and $\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} X_s^2 ds$. As applications, we also obtain the (self-normalized) Cramér-type moderate deviations for the log-likelihood ratio process and the maximum likelihood estimator.

Keywords **α-Brownian bridge process, Cramér-type moderate deviation, maximum likelihood estimator, log-likelihood ratio process, deviation inequality**

MSC(2020) 62N02, 60F10, 60G22

doi: 10.1360/SSM-2021-0223