



## 论文

## QVE 方法求解真空中正负电子对产生

龚驰<sup>①②</sup>, 丁雅茹<sup>①②\*</sup>, 吴梦鑫<sup>①②</sup>, 李子良<sup>③</sup>, 谢柏松<sup>④\*</sup>, 李英骏<sup>③\*</sup>

① 华北电力大学, 数理系, 保定 071003;

② 华北电力大学河北省物理学与能源技术重点实验室, 保定 071003;

③ 中国矿业大学(北京), 理学院, 北京 100083;

④ 北京师范大学, 物理与天文学院, 北京 100875.

\*联系人, E-mail: yaruding@yeah.net; bsxie@bnu.edu.cn; lyj@aphy.iphy.ac.cn

收稿日期: ××××-××-××; 接受日期: ××××-××-××

国家自然科学基金(批准号: 12304337), 河北省自然科学基金(A2025502023), 中央高校基本科研业务费(2025MS180)

**摘要** 真空在超强外场的作用下可以产生正负电子对, 即能量可以转化为质量, 其产生过程对于理解物质的诞生具有重要意义. 近年来, 随着超短超强激光技术的快速发展, 激光场强度正在逐步接近 Schwinger 阈值, 这促使不同研究方法与技术被应用于真空中粒子对产生的理论与数值模拟之中. 其中 Quantum Vlasov Equation (QVE)方法主要用来求解空间均匀含时变化超强场下真空中正负电子对产生的情况, 本文综述了 QVE 方法的提出与发展以及研究进展, 并对其中具有代表性的工作进行了介绍, 相关工作不仅可以为未来开展的验证实验提供有价值的理论依据, 同时也有助于对反物质的研究和对极端条件下宇宙形成过程的理解.

**关键词** QVE, 正负电子对, Schwinger 极限**PACS:** 34. 50. Rk, 03. 65. -w, 12. 20. -m

## 1 引言

真空在超强外场的作用下变得不再稳定, 正负电子对在中间会被源源不断地产生, 从而实现能量到质量的转化, 这是由量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 所预言的: 即纯粹能量形式的电磁场(强场)可以在没有物质存在的真空中产生正负电子对.

这一举世瞩目的预测最早是由 Sauter 在 1931 年提出的<sup>[1]</sup>, 这一想法后来在 1951 年被 Schwinger 从理论上证实<sup>[2]</sup>, 其在场论的框架下用固有时方法推导出了正负电子对产生率的表达式, 以及提出了临界场强的概念: 恒定外部电场  $E$  下的粒子对产生率为  $R \propto \exp(-E_{cr}/E)$ , 其中临界场强  $E_{cr} \approx 1.32 \times 10^{16}$  V/cm. 同时

**引用格式:** 龚驰, 丁雅茹, 吴梦鑫, 李子良, 谢柏松, 李英骏. QVE 方法求解真空中正负电子对产生. 中国科学: 物理学 力学 天文学, ××××, ××: ×××  
Gong Chi, Ding Yaru, Wu Mengxin, Li Ziliang, Xie Baisong, Li Yingjun. QVE method for solving electron and positron pair creation in the vacuum (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, ××××, ××: ×××

Schwinger 指出当外部场强超过临界场强时, 真空便不再稳定, 将会自发地产生正负电子对. 这一机制本质上是 Dirac 海<sup>[3]</sup>在超强外场作用下正负能态发生交叠, 导致填满 Dirac 海的电子从负能海隧穿进入正能连续态中, 这样在负能海中就会留下一个“空穴”, 从而实现正负电子对的产生.

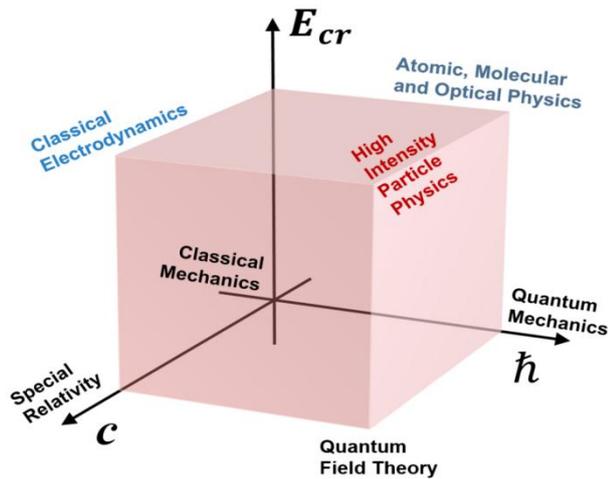


图 1 近代物理三维发展图: 三轴方向分别对应相对论( $c$ ), 量子( $\hbar$ )和强场( $E_{cr}$ )<sup>[5]</sup>

Figure 1 Three-dimensional development diagram of modern physics: the three axis directions correspond to relativity ( $c$ ), quantum ( $\hbar$ ) and strong field ( $E_{cr}$ ) respectively<sup>[5]</sup>.

强场物理的兴起与发展离不开激光技术的快速发展, 啁啾脉冲放大技术(chirped pulse amplification, CPA)<sup>[4]</sup>取得的重大突破, 使得激光场强度得到快速提高, 越来越强的激光场显著地改变了粒子动力学, 从而推动强场物理很快成为了物理学当中的一个重要发展方向. 图 1 是由 Bulanov<sup>[5]</sup>等人提出的近代理论物理学三维发展图<sup>[6]</sup>, 该立方体是由三个正交轴来定义的, 立方体的每个顶点都对应一个重要的物理理论, 强场物理中的量子电动力学效应等研究内容则对应顶点( $c, \hbar, E_{cr}$ ), 对于真空中正负电子对产生的研究便在此范围内.

目前实验室可以获得的极限激光场强度仍然要比 Schwinger 场强低几个数量级<sup>[7]</sup>, 这便使得研究人员试图在理论与数值模拟方向上实现突破, 找到能够降低真空中正负电子对产生阈值的方法, 想要用更多前探性的理论与数值模拟研究去拓展研究方案, 为未来潜在的实验提供有价值的参考, 因为一旦可以开展验证实验, 如何选取激光场参数和如何降低

能量消耗, 以及如何解释产生机制都需要理论工作的配合.

真空中正负电子对产生机制主要有两种: 一种是 Schwinger 隧穿机制, 当外部场强的能量超过  $2mc^2$  时, Dirac 海中的电子可以通过量子隧穿到达正能态, 从而实现正负电子对的产生<sup>[8-9]</sup>; 另一种是光子吸收效应<sup>[10-12]</sup>, 负能海中粒子可以靠吸收单个或多个光子跃迁到正能级, 实现粒子对的产生. 为了降低粒子对产生的阈值, 人们也提出了一些两种机制相结合的方式达到动力学辅助效应来增强粒子对的产生密度<sup>[13]</sup>等.

近年来对于真空中正负电子对产生的研究, 从外部强场类型上可以分为两种情况, 分别为空间均匀场和空间不均匀场下粒子对的产生. 在这些场中, 外部光子场的相互作用被近似为一个经典外部强场. 因为场中存在大量的光子, 根据其相互作用的不同形式, 发展出了不同的理论技术探索正负电子对的产生, 这些技术包括世界线瞬子方法<sup>[14-16]</sup>、量子 Vlasov 方程方法<sup>[17-21]</sup>(quantum Vlasov equation, QVE)、和用于处理时间依赖和空间均匀场的 Dirac-Heisenberg-Wigner(DHW)方法<sup>[22-24]</sup>, 还有可以研究空间局域化和时间变化场的计算量子场论等方法<sup>[25-30]</sup>. 相关成果极大地加深了人们对粒子对产生机制的理解. 这些研究方法各有其特色, 世界线瞬子技术通过半经典路径积分, 捕捉真空量子隧穿效应, 主导强场下粒子对隧穿产生的率计算; QVE 方程基于相空间分布演化, 刻画空间均匀含时场中正负电子的动力学关联与集体效应; DHW 方法通过准概率分布函数, 自洽描述时空均匀场中真空极化与粒子对的非平衡产生过程; 计算量子场论则直接数值求解量子场运动方程, 揭示空间局域化与时变场中粒子对的时空演化及量子涨落效应.

本文的结构如下: 在第 2 节我们介绍了 QVE 方法的计算框架, 该框架允许我们计算在基于空间均匀的激光场中正负电子对产生的状态及粒子数密度. 在第 3 节中, 我们介绍了 QVE 方法的起源与发展, 同时总结了基于此方法所得到的较重要的科研成果. 第 4 节是对本工作的总结.

## 2 量子 VLASOV 方程

本文采用自然单位制, 其中真空中的光速  $c$  和约化普朗克常数  $\hbar$  均取值为 1, 其中  $-e$  和  $m$  分别是电子的电荷和质量.

从 QED 拉格朗日量<sup>[31]</sup>出发:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1)$$

其中,  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  是场强张量,  $A_{\mu}$  是光子场, 度规张量  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , 并采用 Dirac 基下的  $\gamma$  矩阵形式.

Dirac 场的运动方程为:

$$\gamma_{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\Psi(\mathbf{x}, t) - m\Psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

由于矢量是空间均匀的, 所以对 Dirac 场方程作傅里叶分解, 可以得到傅里叶模  $\psi(\mathbf{k}, t)$  所满足的运动方程:

$$\left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) - m \right] \psi(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (3)$$

其中  $\mathbf{k}$  是正则动量,  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{k} - e\mathbf{A}(t)$  表示轨道上的含时运动动量.

设傅里叶模为:

$$\psi(\mathbf{k}, t) = \left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) + m \right] \varphi(\mathbf{k}, t) \quad (4)$$

带入(3)式可以得到  $\varphi(\mathbf{k}, t)$  所满足的二阶常微分方程如下:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega^2(\mathbf{k}, t) + ieE(t)\gamma^0\gamma^3 \right] \varphi(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (5)$$

其中  $\Omega^2(\mathbf{k}, t) = m^2 + \pi^2(\mathbf{k}, t)$   $d_r^{\dagger}(-\mathbf{k})$  是总能量的平方.

通过解上述常微分方程可以把(4)式重写为

$$\psi(\mathbf{k}, t) = \sum_{r=1}^2 \left[ b_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k}, t) + d_r^{\dagger}(-\mathbf{k})v_r(-\mathbf{k}, t) \right] \quad (6)$$

其中  $b_r(\mathbf{k})$  和  $d_r^{\dagger}(-\mathbf{k})$  分别为湮灭电子和产生正电子算符且满足对易关系, 同时

$$u_r(\mathbf{k}, t) = \left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) + m \right] \chi^{(+)}(\mathbf{k}, t)R_r \quad (7)$$

和

$$v_r(-\mathbf{k}, t) = \left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) + m \right] \chi^{(-)}(\mathbf{k}, t)R_r$$

为含时旋量.

由公式

$$H(t) = i \int d^3x \Psi^{\dagger}(\mathbf{x}, t) \dot{\Psi}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

可计算可得 Hamilton 算符对角部分  $H_d(t)$  和非对角部分, Hamilton 算符的非对角元说明了正反粒子对的产生和湮灭. 为了对角化 Hamilton 算符, 可以引入准粒子表象下的含时湮灭产生算符  $B_r(\mathbf{k}, t)$  和  $D_r^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$ , 它们满足等时反对易关系<sup>[17]</sup>.

粒子表象的不含时湮灭产生算符, 和准粒子表象的含时湮灭产生算符, 可以由含时 Bogoliubov 变换联系起来, 即

$$\begin{pmatrix} B_r(\mathbf{k}, t) \\ D_r^{\dagger}(-\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{k}, t) & -\beta^*(\mathbf{k}, t) \\ \beta(\mathbf{k}, t) & \alpha^*(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_r(\mathbf{k}) \\ d_r^{\dagger}(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中  $\alpha(\mathbf{k}, t)$  和  $\beta(\mathbf{k}, t)$  为 Bogoliubov 变换系数, 并满足关系

$$|\alpha(\mathbf{k}, t)|^2 + |\beta(\mathbf{k}, t)|^2 = 1 \quad (10)$$

实际上, 含时 Bogoliubov 变换等价于对傅里叶模  $\psi(\mathbf{k}, t)$  在不同的旋量基下的展开,

$$\psi(\mathbf{k}, t) = \sum_{r=1}^2 \left[ B_r(\mathbf{k})U_r(\mathbf{k}, t) + D_r^{\dagger}(-\mathbf{k})V_r(-\mathbf{k}, t) \right] \quad (11)$$

为了方便, 旋量基  $U_r(\mathbf{k}, t)$  和  $V_r(-\mathbf{k}, t)$  选取与式(7)相似的绝热基, 即

$$U_r(\mathbf{k}, t) = \left[ \gamma^0 \Omega(\mathbf{k}, t) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) + m \right] \chi^{(+)}(\mathbf{k}, t)R_r \quad (12)$$

和

$$V_r(\mathbf{k}, t) = \left[ -\gamma^0 \Omega(\mathbf{k}, t) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}, t) + m \right] \chi^{(-)}(\mathbf{k}, t)R_r$$

其中绝热模函数定义为

$$\chi^{(\pm)}(\mathbf{k}, t) = \frac{e^{\pm i\Theta(\mathbf{k}, t_0, t)}}{\sqrt{2\Omega(\mathbf{k}, t)[\Omega(\mathbf{k}, t) \mp \pi_3(k_3, t)]}} \quad (13)$$

$\Theta(\mathbf{k}, t_0, t) = \int_{t_0}^t dt' \Omega(\mathbf{k}, t')$  为动力学相. 从定义可以看出, 当外场为零时, 绝热模函数可以化为平面波解  $\chi_{free}^{(\pm)}(\mathbf{k}, t)$ .

考虑  $r=1$  时, 可求得 Bogoliubov 变换系数  $\alpha(\mathbf{k}, t)$  和  $\beta(\mathbf{k}, t)$ :

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = i\varepsilon_{\perp}\chi^{(-)}(\mathbf{k}, t)\left[\frac{\partial}{\partial t} - i\Omega(\mathbf{k}, t)\right]\chi^{(+)}(\mathbf{k}, t) \quad (14)$$

$$\beta(\mathbf{k}, t) = i\varepsilon_{\perp}\chi^{(+)}(\mathbf{k}, t)\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\Omega(\mathbf{k}, t)\right]\chi^{(-)}(\mathbf{k}, t) \quad (15)$$

单粒子分布函数  $f_r(\mathbf{k}, t)$  定义为产生正则动量  $\mathbf{k}$  和自旋为  $r$  的准粒子的瞬时数密度, 即

$$f_r(\mathbf{k}, t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | B_r^{\dagger}(\mathbf{k}, t) B_r(\mathbf{k}, t) | 0 \rangle}{V} \quad (16)$$

另外由于不考虑磁场的作用, 产生粒子的自旋没有偏好的方向, 所以认为自旋向上的粒子数密度与自旋向下的粒子数密度相同, 即  $f_{r=1}(\mathbf{k}, t) = f_{r=2}(\mathbf{k}, t)$ . 再根据 Bogoliubov 变换关系式(9), 上述定义式可化  $f_r(\mathbf{k}, t) = |\beta(\mathbf{k}, t)|^2$

可求得单粒子分布函数所满足的 QVE 的积分微分形式:

$$\frac{df_r(\mathbf{k}, t)}{dt} = \frac{1}{2}W(\mathbf{k}, t) \int_{-\infty}^t dt' W(\mathbf{k}, t') [1 - 2f_r(\mathbf{k}, t')] \cos[\Theta(\mathbf{k}, t', t)] \quad (17)$$

对上式进行数值求解, 我们可以引入两个辅助变量

$$p(\mathbf{k}, t) = \int_0^t dt' W(\mathbf{k}, t') [1 - 2f(\mathbf{k}, t')] \cos[2\Theta(\mathbf{k}, t', t)]$$

和 (18)

$$q(\mathbf{k}, t) = \int_0^t dt' W(\mathbf{k}, t') [1 - 2f(\mathbf{k}, t')] \sin[2\Theta(\mathbf{k}, t', t)]$$

则方程(17)可等价地转化为下列一阶常微分方程组:

$$\frac{df(\mathbf{k}, t)}{dt} = \frac{1}{2}W(\mathbf{k}, t)p(\mathbf{k}, t)$$

$$\frac{dp(\mathbf{k}, t)}{dt} = W(\mathbf{k}, t)[1 - 2f(\mathbf{k}, t)] - 2\Omega(\mathbf{k}, t)q(\mathbf{k}, t) \quad (19)$$

$$\frac{dq(\mathbf{k}, t)}{dt} = 2\Omega(\mathbf{k}, t)p(\mathbf{k}, t)$$

在初始条件为  $f(\mathbf{k}, -\infty) = u(\mathbf{k}, -\infty) = v(\mathbf{k}, -\infty) = 0$  的情况下, 通过求解方程组(24)得到单粒子动量分布函数  $f(\mathbf{k}, t)$ , 对动量分布函数进行积分则可以得到随时间演化的粒子数密度<sup>[21]</sup>:

$$n(t) = 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}, t) \quad (20)$$

其中系数 2 来自于电子自旋产生的简并度.

### 3 空间均匀含时场下正负电子对产生的研究进展

应用 QVE 对真空中空间均匀含时电场下正负电子对产生的研究, 近年来在理论模型构建、数值方法创新及物理机制探索方面取得了显著进展. 本节从以下 5 个方面系统阐述国内外研究组的重要工作与核心成果, 以期对强场量子电动力学研究提供参考.

#### 3.1 量子 Vlasov 方程的理论框架与数值实现

在 QVE 的理论框架中, 方程描述了在外部电磁场作用下粒子分布函数的演化, 考虑了量子效应对粒子动力学的影响. 特别指出, 相对于经典 Vlasov 方程, QVE 不仅包括粒子的动量分布, 还涉及到量子力学中粒子波函数的叠加和量子统计效应. 在数值实现方面, QVE 的解法通常依赖于粒子模拟算法和数值离散化技术, 这些方法允许在复杂的电磁场中模拟粒子的产生和湮灭. 表 1 为文章中涉及到的名词术语.

表 1 术语表

Table 1 Glossary

名词	解释说明
Schwinger 隧穿机制 (Schwinger Tunneling)	正负电子对通过量子隧穿从 Dirac 海负能态跃迁到正能态的产生方式, 需场强能量超过 $2mc^2$ ( $m$ 为电子质量).
Schwinger 临界场强 (Schwinger Critical Field $E_{cr}$ )	电场强度的阈值 ( $\approx 1.32 \times 10^{16}$ V/cm), 超过此值时真空不稳定, 正负电子对产生率显著增加.
动力学辅助效应 (Dynamical Assistance)	结合强场低频与弱场高频激光, 降低粒子对产生阈值的机制.
动态辅助 Schwinger 机制 (Dynamically Assisted Schwinger Mechanism)	当在恒定电场基础上叠加一个高频交变电场时, 交变电场会改变真空势垒的形状, 降低隧穿难度, 使得粒子对产生率在远低于 $E_{cr}$ 的场强下就能显著增强.

1931-1936 年 Sauter, Heisenberg 和 Euler 等人为真空中正负电子对产生这一研究方向提供了重要的理论依据<sup>[1,32]</sup>, 通过分析狄拉克方程在电场中的解, 揭示了量子效应如何影响产生粒子的动量, 发现了 QED 真空可以在一定的场强条件下, 通过量子隧穿产生正负电子对, 为超强电场和粒子相互作用产生正负电子对提供了理论支持. 这些研究为理解 QVE 的数值求解和物理意义奠定了基础, 尤其是在强场

和相对论性情况下的应用.

2010年 Thomas Heinzl 等人<sup>[33]</sup>研究了在强激光背景下正负电子对受激产生的 QED 过程. 在无限平面波(IPW)背景下, 粒子对产生遵循特定准动量守恒条件:  $q_\mu + q'_\mu = nk_\mu + k'_\mu$ <sup>[34-36]</sup>.

对于脉冲平面波(PPW),  $S$  矩阵元的表达式:

$$S_{\beta} = \frac{1}{k_-} \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{p} - \mathbf{k}') \frac{\sin N\pi z}{\sin \pi z} \tilde{M}_0 \quad (21)$$

论文中采取的相关规范势为  $A_\mu(k \cdot x) = f_j(k \cdot x) a'_\mu$ ,  $j \in \{1, 2\}$  通过设置  $f_2=0$  来考虑一个线极化波, 并考虑规范势族:

$$f_1(k \cdot x) = \begin{cases} \sin^K \left( \frac{k \cdot x}{2N} \right) \sin(k \cdot x), & k \cdot x \in P, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

其中包络由整数  $K$  表征.

图 2 展示了  $K=0$  时激光束为 4 个周期时粒子对产生的三重微分率, 它是依据  $|p'_\perp/m$  函数绘制的, 其中固定横向角度  $\phi=0$ , 并且光锥分量的半最大值 ( $p_{z'} = \omega'/2$ ). 垂直(黑色)线表示 IPW  $\delta$  函数梳的四个最低阶项(其余项位于右侧). 即使是单周期的贡献, 也存在丰富的结构, 这必然主要是由有限脉冲持续时间以及在这种情况下的边缘效应导致的.

当周期数超过 1 时, 微分率的形状会发生显著变化. 当  $N > 1$  时, 会出现干涉效应, 这与从单缝衍射转变为多缝衍射时出现的效应类似<sup>[37-38]</sup>: 以式  $q_\mu + q'_\mu = nk_\mu + k'_\mu$  中的准动量守恒为中心的共振峰, 周围伴有  $N-2$  个次峰. 从速率中正弦比因子的性质可以明显看出, 在周期数很大的极限情况下, 强峰会占据主导地位, 精确地再现无限平面波的  $\delta$  函数梳.

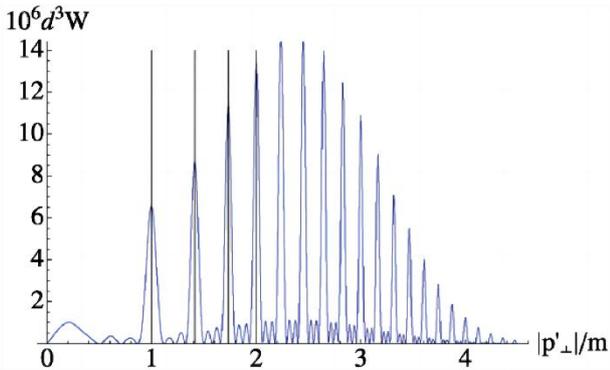


图 2 三重微分率, 正电子  $e^+$  横向动量谱, 线性极化<sup>[33]</sup>  
Figure 2 Triple differential rate as a function of transverse  $e^+$

momentum, Linear polarisation<sup>[33]</sup>.

2014年 Adolfo Huet 等人<sup>[39]</sup>研究了纯时变电场中的 Schwinger 对产生过程, 其可以通过一个描述单粒子动量分布函数时间演化的 QVE 来描述.

在研究强电场中 Schwinger 对产生现象时, QVE 存在两种重要形式. 传统形式的 QVE 为<sup>[40-48]</sup>:

$$\dot{N}_k(t) = \frac{\dot{\omega}_k(t)}{2\omega_k(t)} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\dot{\omega}_k(t')}{\omega_k(t')} (1 + 2N_k(t')) \times \cos \left[ 2 \int_{t'}^t dt'' \omega_k(t'') \right] \quad (23)$$

其中  $\omega_k^2(t) = (k_\parallel - qA_\parallel(t))^2 + \mathbf{k}_\perp^2 + m^2$

该方程通过 Bogoliubov 变换推导得出<sup>[49-51]</sup>, 用于描述固定动量  $\mathbf{k}$  的粒子数密度  $N_k(t)$  的时间演化<sup>[52, 53]</sup>.

此外, 还有一种替代形式的 QVE:

$$\dot{\tilde{N}}_k(t) = \frac{1}{2} \Omega_k^{(\pm)}(t) \int_{t_0}^t dt' \left[ \Omega_k^{(\mp)}(t') (1 + 2\tilde{N}_k(t')) \cos \left( \int_{t'}^t dt'' \Omega_k^{(\pm)}(t'') \right) \right] \quad (24)$$

在  $t = -\infty$  时,  $\tilde{N}_k(t) = 0$ , 其中  $\Omega_k^{(\pm)}(t) = \frac{\omega_k^2(t) \pm \dot{\omega}_k^2}{\omega_k}$ .

同时, 2024年 Li 等人<sup>[54]</sup>推导了旋量 QED 中的非绝热量子 Vlasov 方程(NAQVE), 并确立了它与绝热方程之间的关系. (QVE 和 NAQVE 比较, 见表 2)

表 2 QVE 和 NAQVE 物理机制比较

Table 2 Comparison of the physical mechanisms between QVE and NAQVE

机制	假设条件	优势	劣势	适用范围
QVE	平均场近似; 量子相干性保持弱耦合相互作用; 量子尺度	捕捉量子效应; 潜在量子加速; 适用于长程相互作用系统	高资源需求; 破坏相干性; 初始态制备复杂	量子等离子体; 高密度天体物理
NAQVE	绝热演化; 初始态可分离; 准静态自洽场	规避经典优化难题; 理论精度高; 适合非平衡态慢过程模拟	需长相干时间; 离散化误差; 初始哈密顿量设计困难	慢变场系统; 量子热力学; 拓扑相变

从狄拉克方程出发:

$$\left\{ i\gamma^0 \partial_t + i\boldsymbol{\gamma} \cdot [\nabla - iq\mathbf{A}(t)] - m \right\} \Psi^A(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (25)$$

经傅里叶变换得到关于傅里叶模式  $\Psi_k^A(t)$  的方程,

$$[\partial_t^2 + \omega_k^2(t) + iqE_z(t)\gamma^0\gamma^3]\psi_k^A(t) = 0 \quad (26)$$

再通过 Bogoliubov 变换, 最终得到 NAQVE 的积分-微分形式:

$$\dot{f}_k^+(t) = \frac{1}{2}Q_k^+(t)\int_{t_0}^t dt'Q_k^+(t')[1-2f_k^+(t')] \times \cos[2\theta_k^+(t',t)], \quad (27)$$

图3呈现了NAQVE中由无场真空产生的粒子分布函数, 与QVE中由绝热真空产生的粒子分布函数存在显著差异. 当电场关闭时, 分布函数的差异接近3个数量级. 此外, NAQVE的分布函数不收敛, 会随时间振荡. 这种差异的主要原因是, NAQVE和QVE中粒子的定义基于不同的真空态<sup>[55-60]</sup>. 在NAQVE的情况下, 产生粒子的分布函数是基于无场真空 $|vac\rangle_F$ 定义的, 在这种真空中, 真空能量随时间保持恒定. 它计算的是从真空中产生的能量为 $\omega_k(t_0)$ 的粒子数量.

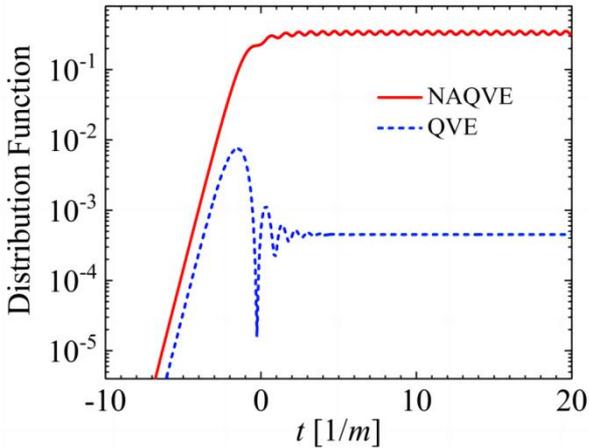


图3 NAQVE (非绝热量子真空能量) 和 QVE (量子真空能量) 中由无场真空产生的粒子分布函数的时间演化<sup>[54]</sup>

Figure 3 Time evolution of the distribution functions of particles created from the field-free vacuum for NAQVE and the adiabatic vacuum for QVE<sup>[54]</sup>.

### 3.2 动力学辅助 Schwinger 机制的增强效应

Schwinger 机制(Schwinger 机制与多光子机制比较, 见表 3)指出<sup>[61]</sup>, 在强电场环境下, 当电场强度  $E$  与作用距离  $L$  的乘积满足  $qEL \geq 2mc^2$  时, 虚粒子在真空中涨落能够获取足够能量, 进而实现真空中正负电子对的产生<sup>[32]</sup>. 与此同时, 经典的随时间变化的电磁场也能够引发正负电子对的产生, 然而, 若外部

电场频率未达到阈值时, 即  $\hbar\omega < 2mc^2$ , 这类非绝热修正属于多光子过程.

表 3 Schwinger 机制与多光子机制比较

Table 3 Comparison between the Schwinger mechanism and the multiphoton mechanism

机制	假设条件	优势	劣势	适用范围
Schwinger 机制	静态均匀电场; 电场强度接近临界场强; 真空中无其他粒子干扰	QED 理论框架; 预测明确的粒子对产率	临界场强极高, 实验难以实现; 仅适用于静态场	高能物理(如强场 QED); 早期宇宙; 中子星磁层.
多光子机制	高频激光场; 多光子吸收过程; 临界场强	实验可行性高; 可通过多光子共振增强产率	依赖激光参数; 计算复杂	实验室强激光场(如 ELI、XFEL), ELI-NP 的高功率激光系统可以实现 10 PW 峰值功率输出 <sup>[62]</sup> ; 量子光学.

2011 年, M. Orthaber 等人<sup>[63]</sup>针对动态辅助 Schwinger 机制进行了详细计算, 结果表明动力学效应可显著增强正负电子对的产生效率.

作者引入 Keldysh 参数因子  $\gamma = \frac{\tau_T}{\tau} = \frac{m}{e\mathcal{E}\tau}$ <sup>[64,65]</sup>, 当  $\gamma \ll 1$  ( $\tau_T \ll \tau$ ) 时, 体系处于绝热状态, 正负电子对可通过非微扰隧穿过程自发产生; 当  $\gamma \gg 1$  ( $\tau_T \gg \tau$ ) 时, 属于反绝热区域, 此时粒子对产生主要通过吸收阈值能量, 而非隧穿过程<sup>[65]</sup>.

论文对动量谱和粒子数密度的数值结果进行了系统分析, 揭示了非微扰动力学效应的显著影响.

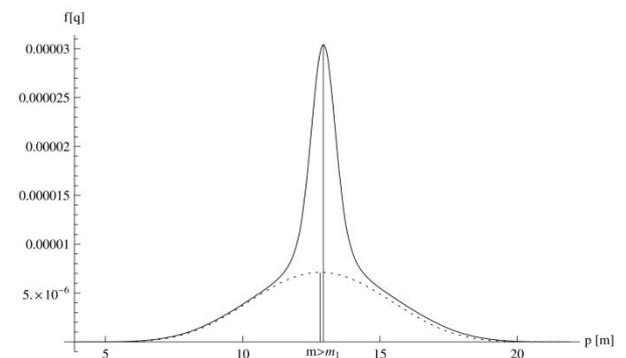


图4 分布函数  $f(\mathbf{q}, \infty)$  (实线) 与  $f(\mathbf{q}, \infty)$  (虚线) 的比较<sup>[63]</sup>

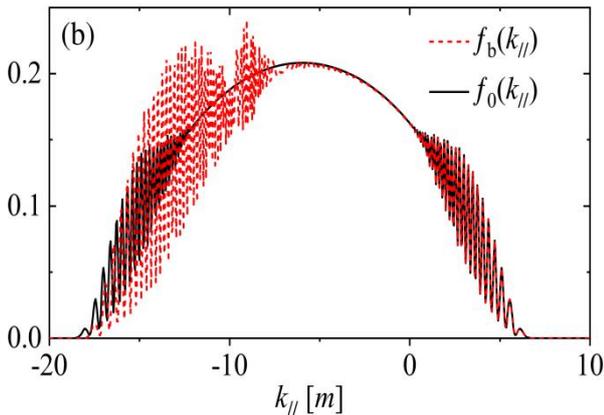
**Figure 4** Comparison of the distribution function  $f(\mathbf{q}, \infty)$  (solid line) with  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  (dotted line)<sup>[63]</sup>.

组合脉冲的动量谱  $f(\mathbf{q}, \infty)$  呈现出强烈的非线性行为, 并非简单地将  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  和  $f_2(\mathbf{q}, \infty)$  相加得到. 实际上, 在小动量情况下,  $f(\mathbf{q}, \infty)$  和  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  几乎重合 (如图 4); 而在大动量区域, 动力学辅助机制动量分布函数  $f(\mathbf{q}, \infty)$  位于纯 Schwinger 机制  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  外侧, 且动量峰值  $m$  略高于纯隧穿的  $m_1$ . 此外, 由于短脉冲  $\{E_2, \tau_2\}$  的影响, 动量谱在  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  的最大值 (标记为  $m_1$ ) 附近显著增强. 而且  $f(\mathbf{q}, \infty)$  的最大值 (标记为  $m$ ) 相较于纯 Schwinger 机制的  $f_1(\mathbf{q}, \infty)$  向更高动量方向有一点偏移, 即  $m > m_1$ .

当 Keldysh 参数  $\gamma \ll 1$  时, 结果与纯 Schwinger 机制相近; 当  $\gamma \gg 1$  时, 多时间尺度效应与多光子结果渐近一致. 而在  $1 \leq \gamma \leq 2$  的区域, 动力学辅助 Schwinger 机制的特征十分明显, 此时将 Schwinger 机制和多光子效应简单相加得到的粒子数密度远低于动力学辅助 Schwinger 机制实际计算得到的粒子数密度. 这表明该机制在特定参数区域<sup>[66]</sup>能够极大地提高正负电子对的产生效率.

2023 年 Jiang 等人<sup>[67]</sup>基于 QVE, 研究了快速振荡电场中的背反效应与等离子体振荡, 揭示了强场参数对动力学辅助 Schwinger 机制增强效应的关键影响.

在亚临界场中, 背反效应<sup>[68]</sup>可忽略, 此时频率啁啾是高效的增强手段. 而在超临界场中, 隧道效应与多光子吸收竞争抑制粒子对产生率, 需通过频率匹配平衡两种机制<sup>[69]</sup>. 此时背反效应不可忽视, 需在理论模型中纳入内部反馈电场.



**图 5** 在  $t=220.0/m$  时刻, 考虑和不考虑背反效应情况下纵向动量分布函数的对比<sup>[67]</sup>

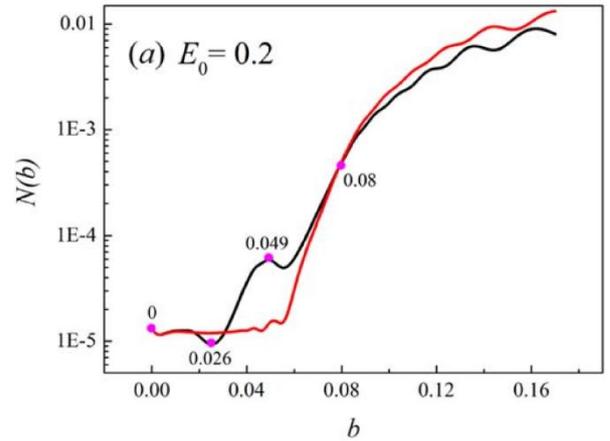
**Figure 5** Comparison of the longitudinal momentum distribution functions between with and without backreaction at  $t=220.0/m$ <sup>[67]</sup>.

该项工作还发现动量谱的对称性破缺与随机振荡背反效应直接影响粒子动量分布的动力学行为. 例如, 当  $E_0=2.0E_{cr}$ 、 $\omega=0.15m$  时, 动量分布出现明显偏移 (如图 5). 同时背反效应引发的随机过程导致动量谱出现不规则振荡, 这与数值误差无关, 而是真空粒子对产生动力学中的非线性效应体现. 这种振荡随内部电场的时变符号周期性调制动量分布, 反映了非马尔可夫效应的影响<sup>[70-73]</sup>.

论文中还说明了当强场消失后, 粒子对在内部电场作用下形成等离子体振荡, 其周期  $T$  与粒子数密度  $n$  及外场参数的关系为简单拟合公式的适用性和复杂依赖关系<sup>[74]</sup>:

2024 年 Gong 等人<sup>[75]</sup>分析了强外场触发狄拉克真空击穿过程中正负电子对的产生过程. 在总能量相同的情况下, 频率啁啾的亚临界电场通过调制动量谱, 可显著提升正负电子对的产生效率.

确保参数  $\varphi$  和  $b$  不同的情况下, 电场在时间范围内提供的总能量  $\mathcal{E}$  保持恒定. 由于电场在空间上是均匀的, 所以只需确保时间尺度上的能量相等即可.



**图 6** 在 QVE 方法下, 产生的电子总数与啁啾系数  $b$  的函数关系<sup>[75]</sup>

**Figure 6** The total number of created electrons as a function of chirp parameter  $b$  under the QVE approach<sup>[75]</sup>.

图 6 展示了在  $E_0=0.2E_{cr}$  其中  $E_{cr} \approx 10^{16} \text{V/cm}$  下, 产生的正负电子对总数随啁啾系数  $b$  的变化情况. 这些电场的频率均为 0.6, 绝热参数  $\xi = |e|E_0 / mc\omega$  具有以下特性: 当  $\xi \ll 1$  时, 正负电子对的产生机制主要

是多光子吸收<sup>[63,76]</sup>; 反之, 当  $\xi \gg 1$  时, 粒子对产生机制主要是 Schwinger 隧穿<sup>[63,76]</sup>.

论文中还指出啁啾系数  $b$  的变化会改变电场的频率组成, 进而影响粒子对产生数量. 例如, 当激光频率为  $0.6m$  时, 在不同电场强度下, 随着  $b$  从 0 增加, 正负电子对的数量有明显提升, 在某些情况下增强倍数可达数十倍甚至数百倍<sup>[77]</sup>.

### 3.3 频率调制与啁啾脉冲的共振控制

2017 年 Nuriman Abdukerim 等人<sup>[78]</sup>通过求解 QVE, 研究了单色和双色激光脉冲场中频率啁啾对增强正负电子对产生的影响.

图 7 表明, 较小的频率啁啾会导致动量谱沿动量轴发生偏移, 正频率啁啾使动量谱向负方向移动, 且这种移动对特定动量窗口的光谱测量有意义, 可增加探测概率<sup>[79,80]</sup>. 同时, 正负频率啁啾系数在增加粒子对数密度上作用相同. 改变  $t=0$  时刻频率啁啾系数的符号, 能使脉冲形状和动量谱对称, 进而增加粒子数密度, 且先正后负的啁啾比先负后正的啁啾产生的粒子对数密度更高.

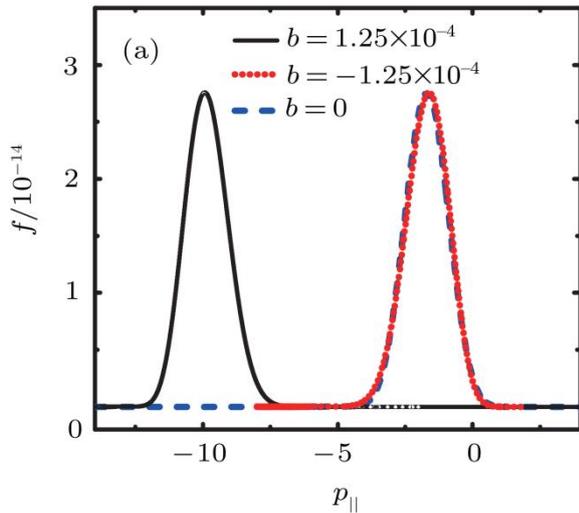


图 7 在具有不同频率参数  $b$  的单色脉冲激光场  $E_1(t)$  中产生的正负电子对的纵向动量的动量谱<sup>[78]</sup>

Figure 7 Momentum spectrum of the longitudinal momentum of the produced electron-positron pairs in one-color pulse laser field  $E_1(t)$  with different frequency parameter  $b$ <sup>[78]</sup>.

在粒子数密度方面, 正负频率啁啾系数发挥着相同的作用, 均可提升粒子对数密度<sup>[81]</sup>. 进一步研究

发现, 在  $t=0$  时刻改变频率啁啾系数的符号, 能够使脉冲形状和动量谱呈现出对称性, 进而显著提升粒子数密度. 具体而言, 先正后负的啁啾方式相较于先负后正的啁啾, 会产生更高的粒子. 这是因为先正后负的啁啾在  $t=0$  附近, 即峰值场强区域, 能使脉冲持续时间更宽, 更有利于隧穿机制的粒子对产生.

在双色激光脉冲场  $E(t)$  中(具体电场形式请见论文<sup>[78]</sup>中公式(8)), 无频率啁啾时, 双色激光脉冲的动量谱最大值比单色激光脉冲高两个数量级, 这表明双色场本身就对正负电子对的产生有促进作用<sup>[82,83]</sup>.

2017 年 Xie 等人<sup>[84]</sup>在量子动力学形式体系中研究了具有调制振幅的振荡场中的正负电子对产生过程. 通过比较有调制和无调制的振荡场中的数密度, 发现当光子能量通过调制引起的频率移动恰好达到阈值时, 粒子数密度可以提高几个数量级.

论文中考虑了振幅受正弦信号调制的高频振荡场, 采用的电场表达式为

$$E_M(t) = (1 - M \frac{1 + \cos(\omega_m t)}{2}) E_0 \sin(\omega_c t) \quad (28)$$

其中  $0 \leq M \leq 1$  表示调制程度. 显然,  $M=0$  和  $M=1$  分别对应无调制和完全调制的情况.

振幅调制对振荡场动力学的影响有双重效应<sup>[85]</sup>: 一方面, 调制使振荡场频率上移, 对粒子对产生率产生积极影响; 另一方面, 调制会导致场强降低, 从而在多光子区域抑制粒子对产生. 通过求解 QVE, 对比有无调制情况下的粒子数密度发现, 当调制频率能弥补载波频率与阈值频率的差距时, 调制可显著提高粒子数密度.

论文进一步研究了具有亚周期结构的  $N$  脉冲序列中的调制效应:

$$E_n(t) = E_0 e^{-\frac{(t-nT_m)^2}{\tau^2}} \sin(\omega_c t) \quad (29)$$

其中,  $E_0$  表示每个脉冲的场强大小,  $\omega_c$  表示载波频率,  $\tau$  表示脉冲持续时间.

在脉冲序列中, 通过改变脉冲之间的延迟时间  $T_m$  来调制脉冲序列, 定义脉冲序列频率  $\omega_m = 2\pi/T_m$ . 研究发现, 脉冲序列调制可降低频率阈值. 图 8 展示了对于单脉冲, 三光子过程的频率阈值在  $\omega_c = 0.67m$ , 而对于 10 脉冲序列, 在多个频率处出现峰值, 如  $\omega_c = 0.649m$  等, 这些频率低于常规阈值, 但仍能保持较高的数密度. 同时,  $N$  脉冲的动量分布最大值可达

单脉冲的  $N^2$  倍, 这一现象与激光场中多缝干涉效应及 Breit-Wheeler 对产生机制具有相似性.

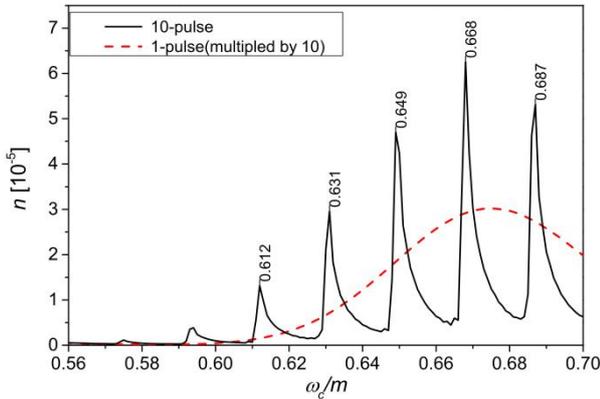


图8 在具有亚周期结构的脉冲序列中, 产生的数密度与载波频率的函数关系<sup>[84]</sup>  
 Figure 8 The produced number density as a function of the carrier frequency in a pulse train with sub-cycle structure<sup>[84]</sup>.

2020年 Gong 等人<sup>[86]</sup>利用量子动力学方程研究了频率调制激光场中产生的正负电子对的动量谱和粒子数密度. 发现动量谱呈现出明显的干涉图样. 这是频率调制场在动量谱上的印记, 因为动量峰对应于通过吸收不同频率成分的光子产生粒子对的过程. 对于粒子数密度的研究表明, 粒子数密度对啁啾系数非常敏感, 对于某些啁啾系数, 数密度可提高 2-3 个数量级.

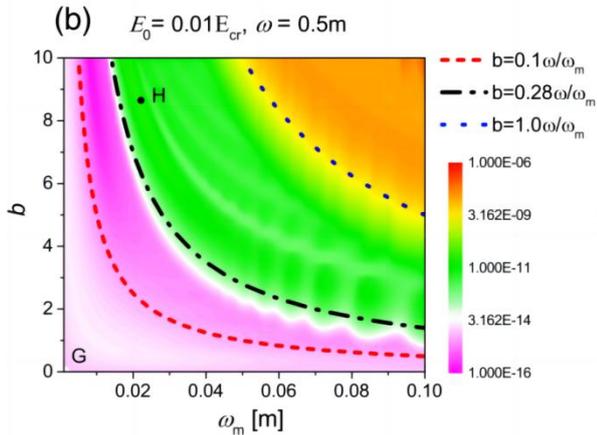


图9 调制电场下产生的正负电子对的数量<sup>[86]</sup>  
 Figure 9 The number of created  $e^-e^+$  pairs under the modulated electric field<sup>[86]</sup>.

为了探究场强和频率对正负电子对产生增强效果的影响, 作者分别计算了弱高频场和强低频场下,

正负电子对的数密度随啁啾系数的变化情况. 从图9中可以看出, 对于弱高频场的情况, 产生的正负电子对的数密度最大值可达 H 点对应的  $2.05 \times 10^{-11}$ , 这比未调制场中 G 点的数密度高  $2 \times 10^3$  倍. 也就是说, 弱高频场的增强效果更为显著, 这是因为其多光子吸收阈值效应更为明显, 且频率分量在增强过程中起主导作用. 因此, 弱高频电场的频率调制对正负电子对的产生有显著的增强效果; 而强低频电场中, 频率成分对产生过程影响较小, 主要由 Schwinger 隧穿机制主导.

### 3.4 脉冲形状与非对称性对产额的调控

2013年 Abdukerim 等人<sup>[87]</sup>对于超周期和亚周期激光脉冲的不同场, 通过求解 QVE, 研究了激光脉冲形状和载波包络相位(Carrier-Envelope Phase, CEP)对正负电子对产生的影响<sup>[88]</sup>. 通过改变脉冲宽度和形状, 得到了产生的正负电子对的动量分布函数和粒子数密度的非线性行为.

该项工作采用的强场表达式请见论文<sup>[87]</sup>中公式(9). 如图10所示, 此时超高斯脉冲形状在粒子产生中具有明显优势. 在亚周期激光脉冲中, 超高斯脉冲的优势更为突出. 由于亚周期的特性, 激光振荡周期与脉冲持续时间的关系使得振荡几乎被破坏. 而超高斯脉冲的动量分布函数比高斯脉冲动量分布函数分布范围更宽, 粒子数密度也有显著提升, 例如  $m=1$  时,  $n=1.31 \times 10^{-20}$ , 而  $m=5$  时  $n=6.97 \times 10^{-10}$ , 提升了约 10 个数量级. 这表明在亚周期情况下, 超高斯包络形状对增加粒子产生的产额更为重要.

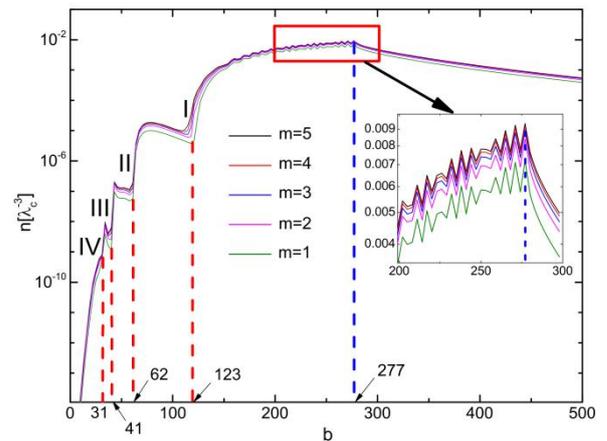
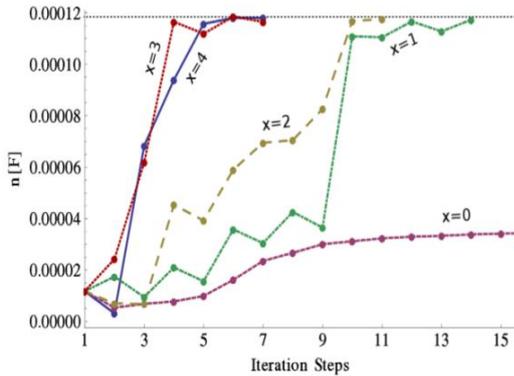


图10 在超周期激光电场中, 对于不同的  $m$ , 粒子对数密度随  $b$  的变化情况<sup>[87]</sup>

**Figure 10** Pair number density changes with  $b$  in the supercycle laser electric field, for different  $m$ <sup>[87]</sup>.

论文中还指出 CEP 会破坏电场的对称性. 在超周期激光脉冲中, 此效应虽对电场最大值和振荡数影响较小, 但会改变转变点和干涉情况, 从而影响粒子产生. 通常,  $\varphi = \pi/2$  时对应粒子数密度的最大值, 但整体上 CEP 对超周期激光脉冲数密度的影响并不十分显著.

2013 年 M. Mitter 等人<sup>[89]</sup>关于动态辅助 Schwing er 机制的研究表明, 通过适当选择电场, 粒子产生会显著增强. 为了使产生的粒子数密度最大化, 论文中引入了最优控制理论, 并将其应用于量子动力学形式体系中. 由于直接最大化粒子数密度  $n[F]$  可能会导致不合理的结果, 比如单纯通过增加场强来提高粒子对产额, 这在实际物理情境中是不现实的, 所以需要构建一个受约束的优化问题.



**图 11** 对于对角缩放指数  $x$  的不同取值, 粒子数的收敛速率<sup>[89]</sup>

**Figure 11** Rate of convergence of the particle number for  $x$  different values of the diagonal scaling exponent<sup>[89]</sup>.

论文还假设了运动方程对于任何可允许的势  $A$  都能唯一求解, 为了便于优化计算, 定义了简化成本泛函  $\hat{J}[A] = J[F(A), A]$ . 简化成本泛函关于控制函数  $A$  的梯度  $\delta\hat{J}[A]/\delta A$  与拉格朗日函数关于  $A$  的变分  $\delta L/\delta A$  相等, 前提是  $F$ 、 $G$ 、 $H$  是运动方程的唯一解, 且  $\mu_F$ 、 $\mu_G$ 、 $\mu_H$  满足伴随方程. 这一关系为优化计算提供了重要的理论依据, 使得在实际计算中可以通过求解运动方程和伴随方程来确定搜索方向, 进而实现对目标泛函的多参数优化问题<sup>[90]</sup>.

多参数优化面临的主要挑战是缩放问题: 对于

涉及多个参数的优化问题, 目标泛函  $\hat{J}(p)$  可能会随着不同参数  $P_i$  有很大差异. 因此, 梯度  $\nabla_p \hat{J}(p)$  的各个分量也可能有很大差异, 使得下降方向由特定的参数子集主导. 实际上, 像最陡下降法这样的算法对缩放不佳的行为非常敏感. 为了弥补这一缺陷, 论文中进行了对角缩放, 即重新定义  $p \rightarrow p'$ , 使得目标泛函  $\hat{J}(p')$  作为  $p'$  的函数更加平衡. 实际上, 目标泛函作为  $p = (E_2, \omega_2)$  的函数存在缩放不佳的问题.

因此, 论文中进行对角缩放以优化算法的收敛特性: 如图 11 所示, 在初始配置  $p_m = (0.02E_{cr}, 10m)$  下, 收敛速率随对角缩放指数  $x$  的变化呈现显著差异. 可以发现收敛速率, 即  $n[F]$  收敛到其最大值所需的迭代步数, 强烈依赖于  $x$  的选择. 实际上, 当  $x=0$  时, 梯度  $\nabla_p \hat{J}(p)$  的  $E_2$  分量比其  $\omega_2$  分量大几个数量级. 因此, 在优化过程中, 场强很快接近其最优值  $E_{2,opt}$ ; 然而,  $\omega_2$  优化进展不大. 由于数值误差, 即使接近  $E_{2,opt}$ , 梯度  $\nabla_p \hat{J}(p)$  的  $E_2$  分量仍然大于其  $\omega_2$  分量.

2014 年 Obulkasim Oluk 等人<sup>[91]</sup>通过求解 QVE, 研究了具有不对称激光脉冲的强电场中的正负电子对产生过程.

为了研究随时间变化的非对称激光电场中的正负电子对产生过程, 论文中选取背景场为:

$$E(t) = E_0 \left[ e^{-\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^2} \theta(-t) + e^{-\left(\frac{t}{\tau_2}\right)^2} \theta(t) \right] \sin(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

其中,  $\tau_1$  和  $\tau_2$  分别是上升和下降脉冲的长度,  $\omega$  是激光频率,  $\varphi$  是载波相位,  $\theta(t)$  是海维赛德阶跃函数.

该工作考虑了亚周期、平周期和超周期三种不同的激光脉冲情况, 通过改变脉冲上升和下降沿的长度来研究非对称性对粒子产额的影响. 研究发现, 在不对称激光脉冲场中, 即当一个上升沿或下降沿的脉冲长度固定而另一侧的脉冲长度改变时, 与对称情况相比, 粒子对产生率和数密度会显著变化.

**表 4** 不同非对称激光电场中,  $e^-e^+$  电子对数密度<sup>[91]</sup>

**Table 4** The pair number density  $e^-e^+$  in different asymmetric laser electric fields<sup>[91]</sup>.

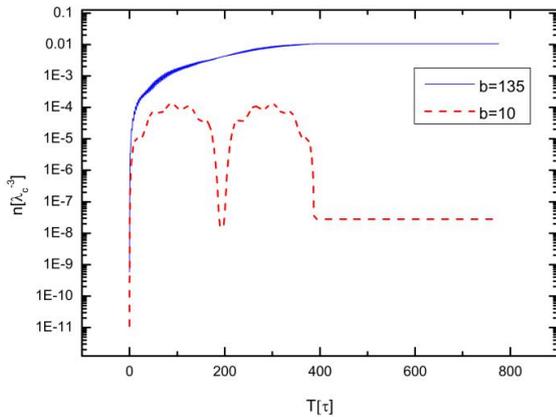
Gases	Maximum number density	Optimum pulse length ratio
Subcycle	$n_{max}=1.709 \times 10^{-3}$	$N_{opt}=3$
Cycle	$n_{max}=4.771 \times 10^{-4}$	$N_{opt}=11$
Supercycle	$n_{max}=4.234 \times 10^{-4}$	$N_{opt}=111$

在脉冲压缩的情况下, 三种脉冲都存在使粒子对数密度最大的最佳脉冲长度比. 亚周期脉冲产生的最大粒子对数密度大于周期和超周期脉冲. 在脉冲拉长的情况下, 只有超周期激光脉冲产生的粒子对数量增加且存在最佳脉冲长度比; 而亚周期和周期激光脉冲的粒子对数密度则随脉冲非对称性增加而单调递减. 这表明脉冲形状的非对称性对粒子产额有显著影响, 且不同周期的激光脉冲表现出不同的规律, 如表 4 所示.

### 3.5 多场协同与量子干涉效应

2012 年 Xie 等人<sup>[92]</sup>基于 QVE, 研究了动态辅助组合场对增强正负电子对产生的影响. 论文中提出了四种由正弦或/和指数函数耦合构成的电场, 并对它们产生的粒子数密度进行了一些比较. 发现高频辅助场将显著增强粒子产生. 对于每个组合场, 快时变场与慢时变场之间存在一个最佳频率比, 使得粒子产生密度可以在几个数量级上大幅增加. 论文中还提到了一种最佳组合场, 它是慢变指数场与快变正弦场的乘积. 它保留了两个场的优点, 即指数场具有稳定特性, 正弦场具有高额粒子产生数密度.

论文中对四种不同的组合激光场进行了研究, 电场形式请见论文<sup>[92]</sup>中公式(8)-(11).



**图 12** 当  $b=10$ (红色虚线)和  $b=135$ (蓝色实线)时, 在叠加正弦激光电场  $E_A(t)$  中正负电子对数密度的时间依赖性<sup>[92]</sup>

**Figure 12** Time dependence of pair number density in the superimposed sinusoid laser electric field  $E_A(t)$  when  $b=10$  (red dashed line) and  $b=135$  (solid blue line)<sup>[92]</sup>.

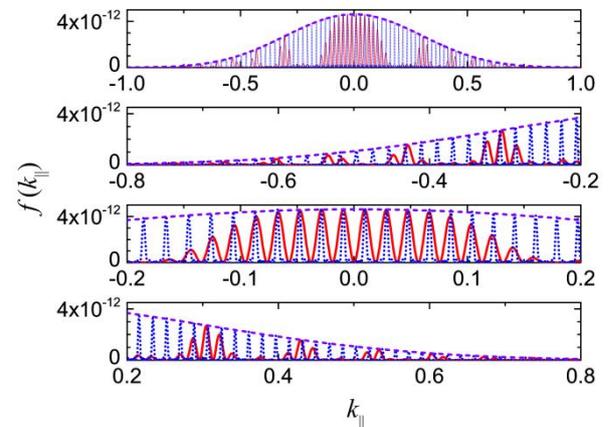
如图 12 中所示, 引入第二个辅助场后, 粒子对数密度会增加. 例如, 当  $b=10$  时, 稳态粒子对数密度

$n(\infty)$  从单场情况  $E_1(t)$  下的  $6.99 \times 10^{-9}$  增加到动态辅助叠加场  $E_A(t)$  情况下的  $2.81 \times 10^{-8}$ . 显然, 这种提升并不显著. 因此, 为了获得显著的增强效果并找到使粒子对数密度达到峰值  $n_{opt} = \max[n(t=\infty, b)]$  的最优参数  $b_{opt}$ , 必须扫描频率比  $b$ . 通过计算频率比  $b$  从 0 变化到 400 时的粒子对数密度  $n = n(\infty)$ , 可以得出,  $n$  从单场  $b=0$  时的  $6.99 \times 10^{-9}$  增强到最优双场叠加  $b=135$  时的  $1.05 \times 10^{-2}$ , 增强了 6 个数量级.

在两个指数叠加场的研究中, 在指数场  $E_B(t)$  基础上叠加另一个弱但是快速变化的时间延迟激光场  $E_3(t)$ , 结果显示粒子对数密度明显提高, 当  $b$  从 10 变化到约 120 时, 粒子对数密度增强了 7 个数量级<sup>[93]</sup>.

2014 年 Li 等人<sup>[94]</sup>研究了交替符号  $N$  脉冲电场中玻色子产生的时域多缝干涉效应. 推导了玻色子动量谱的近似解, 它与精确数值计算高度一致, 特别是对于双脉冲场和小纵向动量.

论文中考虑沿  $x^3$  轴方向的空间均匀且随时间变化的电场  $E(t)$ , 通过选择时间规范  $A^0(t) = 0$  得到矢量势  $A^\mu(t)$ . 基于 Klein-Gordon 方程推导出描述玻色子对产生的 Riccati 方程,



**图 13** 交变符号双脉冲电场  $E_B(t)$  产生的玻色子纵向动量谱<sup>[94]</sup>

**Figure 13** The longitudinal momentum spectrum of created bosons for an alternating-sign two-pulse electric field  $E_B(t)$ <sup>[94]</sup>.

论文中使用  $N$  脉冲电场来研究多缝干涉效应:

$$E_B(t) = \sum_{i=1}^N (-1)^i E_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \omega_0 \left[ t + \left( i - \frac{N+1}{2} \right) T \right] \right\} \quad (31)$$

其中  $E_0$ 、 $\omega_0$  和  $T$  与前面相同.

从图 13 可以看出, 玻色子产生的多时域多缝干涉效应仍然存在,  $f(k_{\parallel})$  的包络值(紫色虚线)提升至类 Sauter 脉冲电场<sup>[95]</sup>的  $6^2$  倍. 此外, 数值解与近似解的动量谱振荡存在显著差异, 例如, 近似解的动量谱呈现快速且密集的规则振荡, 而数值解的振荡结构在小纵向动量区域外较为稀疏. 这清楚地表明, 近似解与数值解在小纵向动量情况下的一致性比大纵向动量时更好. 这一差异源于相位积分对不同转变点的近似假设存在局限性. 由于时变量  $\Omega(k, t)$  被简单地假设为与时间无关的常数, 该假设无法提供定量准确的结果. 即便如此, 近似解和数值解也都能给出相同的动量分布函数最大值. 同样, 它大约是单个类似 Sauter 场的  $N^2(N=6)$  倍.

2018 年 Ibrahim Sitiwaldi 等人<sup>[96]</sup>提出并研究了从两场到三场的真空粒子对产生的动态辅助 Schwinger 机制. 使用 QVE 获得了不同时间尺度的三场组合中增强正负电子对产生的数值结果, 验证了三场组合在超低场强区域的重要性.

论文中引入了一种由 Sauter 脉冲(S)、低频振荡脉冲(L)和高频振荡脉冲(H)组成的场配置, 其电场表达式请见论文<sup>[96]</sup>中公式(6)-(8), 论文中提到组合场  $E(t) = E_S(t) + E_L(t) + E_H(t)$ .

**表 5** 优化后的 SLH 不同组成成分下的最终粒子数密度<sup>[96]</sup>  
**Table 5** Final number densities in different compositions of optimized SLH<sup>[96]</sup>.

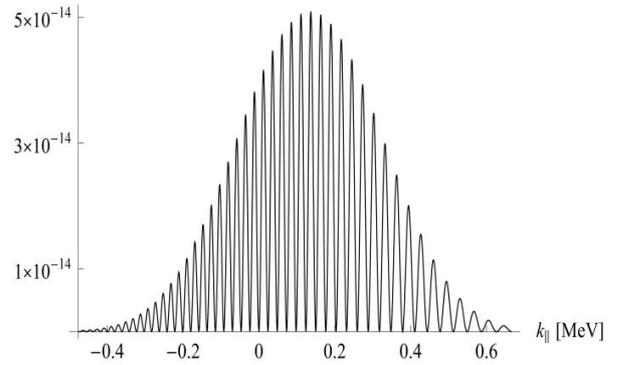
Example	1	2
S	$\sim 10^{-103}$	$\sim 10^{-103}$
L	$\sim 10^{-36}$	$\sim 10^{-34}$
H	$9.7 \times 10^{-21}$	$2.1 \times 10^{-17}$
SL	$\sim 10^{-32}$	$\sim 10^{-31}$
SH	$1.4 \times 10^{-19}$	$2.7 \times 10^{-17}$
LH	$9.8 \times 10^{-21}$	$4.4 \times 10^{-17}$
SLH	$3.8 \times 10^{-17}$	$3.7 \times 10^{-13}$

为避免出现平凡结果, 研究设定了电场  $E_H \ll E_L \ll E_S$  和频率  $\omega_L \ll \omega_H$  的条件. 如表 5, 在超低场强下, 不同时间尺度的三场组合能够有效增强粒子对产生, 充分体现了多场协同的优势. 这种增强归因于三场动态辅助 Schwinger 机制, 即非微扰场受到两个振荡场的动态辅助, 从而促进了正负电子对的产生, 提高了粒子数密度.

2018 年 Hebenstreit 等人<sup>[97]</sup>研究了具有亚周期结构的两束对向传播超短激光脉冲焦点区域中的非微

扰真空粒子对产生. 作者使用量子动力学表述来计算产生粒子的动量谱, 并展示了其对激光频率  $\omega$ 、脉冲长度  $\tau$  和载波包络绝对相位  $\phi$  的极端敏感性. 论文中将这种形式体系应用于费米子和玻色子, 以说明量子统计在这种背景场中的影响.

在亚临界场强  $E_S = 0.1 E_{cr}$ 、 $\tau = 2 \times 10^{-4} eV^{-1}$  且载波相位  $\phi = 0$  的条件下, 研究发现量子统计对动量分布函数有显著影响. 在 QED 中, 当  $\sigma \equiv \omega\tau \gtrsim 4$  时, 费米子的动量分布函数  $f_{\pm}(\vec{k}, t)$  呈现出独特的振荡结构, 振荡尺度由激光频率  $\omega$  决定. 类似地, 在标量 QED(sQED) 框架下也有相似结果, 但由于量子统计的差异,  $f_{\pm}(\vec{k}, \infty)$  在某些动量值处出现局部最大值时,  $f_{\mp}(\vec{k}, \infty)$  则在这些动量值处出现局部最小值, 反之亦然.



**图 14**  $\vec{k}_{\perp} = 0$  时的动量分布函数  $f_{\pm}(\vec{k}, \infty)$ <sup>[97]</sup>  
**Figure 14** Momentum distribution function  $f_{\pm}(\vec{k}, \infty)$  for  $\vec{k}_{\perp} = 0$ <sup>[97]</sup>

研究还发现, 激光脉冲的物理参数(如激光频率  $\omega$ 、脉冲长度  $\tau$  和载波包络绝对相位  $\phi$ )对产生粒子的动量分布极为敏感. 如图 14 所示, 当载波相位  $\phi = -\pi/2$  时, 由于等效散射图像中的共振现象, 某些动量值处预期不会产生粒子. 同样, 在这些情况下, 费米子和玻色子的动量分布函数  $f_{\pm}(\vec{k}, \infty)$  和  $f_{\mp}(\vec{k}, \infty)$  之间存在局部最大值和最小值相互对应的关系. 这进一步表明激光脉冲参数的变化会改变多场协同效果, 进而影响量子干涉效应, 导致粒子动量分布的改变.

## 4 总结

本文对应用 QVE 方法求解真空中正负电子对产生这一前沿课题进行了全面且深入的综述, 涵盖了从理论基础到实际调控策略, 再到多场复杂效应等多个关键维度的研究进展.

在理论框架的构建方面, QVE 另辟蹊径, 通过描述单粒子动量分布函数的时间演化, 成功地将原本抽象复杂的量子场论问题转化为可实际数值求解的动力学方程. 这一创新性的转化为非平衡态强场粒子对产生的研究提供了一个自洽且坚实的理论工具. 旋量 QED 中非绝热方程的成功推导更是一大突破, 揭示了其与绝热方程的瞬时关联性, 使得理论能够进一步涵盖自旋相关的物理效应, 实现了对更广泛物理场景的精准描述.

在调控策略的探索上, 动力学辅助 Schwinger 机制为提升正负电子对产生率打开了新的局面. 在亚临界电场中, 通过巧妙叠加快变弱场(如高频激光脉冲)与慢变强场, 有效降低了粒子产生阈值. 从 2011 年对动力学辅助机制下正电子动量谱分布特征的量化研究, 到 2018 年扩展至三场组合以证明多时间尺度场构型的优势, 再到 2022 年提出正弦与指数场组合的最优构型, 使得产额实现了量级上的跨升, 这一系列研究为实验室内实现高效的正负电子对产生提供了清晰的理论指导.

同时, 在 QVE 研究方法中仍存在着挑战. 在理论层面, 当面对极端强场、高维时空等复杂且尚未完

全探索的物理情境时, QVE 方法的普适性和精确性仍有待进一步的验证与提升. 在数值实现方面, 高维相空间带来的计算复杂度急剧增加, 导致计算资源的巨大消耗以及算法效率低下等问题, 严重限制了对一些更精细物理过程的模拟和研究.

现如今, 科研工作者对该领域的发展充满希望. 一方面, 在理论上积极寻求与其它前沿理论的深度融合, 如结合量子信息理论、场论等, 进一步拓展 QVE 的适用范围, 完善其理论体系. 另一方面, 借助计算技术的飞速发展, 充分利用量子计算、高性能并行计算以及人工智能算法等先进手段, 着力突破数值模拟中存在的瓶颈问题, 其中 AI 方法包括神经网络、符号回归等, 符号回归算法将那些从计算机模拟或者是从实验中获得的数值数据与隐藏的最佳函数关联起来, 以找到最适合给定数据集合的模型为目的, 其无论是在准确度还是简单性方面, 都是理想的. 通过理论与技术的双轮驱动、协同革新, 有望在该领域实现新的重大飞跃, 为人们深入揭示真空的本质以及开展相关前沿物理研究提供更为强大而有效的支撑, 从而推动整个强场量子电动力学领域不断向前迈进.

## 参考文献

- 1 Sauter F. Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. *Zeitschrift für Physik*, 1931, 69(11-12): 742-764.
- 2 Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 1951, 82(5): 664.
- 3 Dirac P A M. *The principles of quantum mechanics*. Oxford university press, 1981.
- 4 Strickland D, Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics communications*, 1985, 55(6): 447-449.
- 5 Gonoskov A, Blackburn T G, Marklund M, et al. Charged particle motion and radiation in strong electromagnetic fields. *Reviews of Modern Physics*, 2022, 94(4): 045001.
- 6 Bulanov S S, Schroeder C B, Esarey E, et al. Electromagnetic cascade in high-energy electron, positron, and photon interactions with intense laser pulses. *Physical Review A*, 2013, 87(6): 062110.
- 7 Schützhold R, Gies H, Dunne G. Dynamically assisted Schwinger mechanism. *Physical review letters*, 2008, 101(13): 130404.
- 8 Jiang M, Su W, Lu X, Sheng Z M, Li Y T, Li Y J, Zhang J, Grobe R, and Su Q. Electron-positron pair creation induced by quantum-mechanical tunneling. *Physical Review A*, 2011, 83(5): 053402.
- 9 Wang Q, Xia Q Z, Liu J, Fu L B. Dynamical effects of switching a super-critical well potential on pair creation from a vacuum. *Chinese Physics B*, 2018, 27(8): 080302.
- 10 Ren N, Wang J X, Li A K, Wang P X. Pair Production in an Intense Laser Pulse: The Effect of Pulse Length. *Chinese Physics Letters*, 2012, 29(7): 071201.
- 11 Tang S, Xie B S, Lu D, Wang H Y, Fu L B, Liu J. Electron-positron pair creation and correlation between momentum and energy level in a symmetric potential well. *Physical Review A*, 2013, 88(1): 012106.
- 12 Zhou X X, Li C K, Lin N S, Li Y J. Electron-positron pair creation induced by two sequential short pulses. *Physical Review A*, 2021, 103(1): 012229.
- 13 Li Z L, Lu D, Xie B S, Fu L B, Liu J, and Shen B F. Enhanced pair production in strong fields by multiple-slit interference effect with dynamically assisted Schwinger mechanism. *Physical Review D*, 2014, 89(9): 093011.

- 14 Amat O, Hu L N, Sawut A, et al. Schwinger pair production rate and time for some space-dependent fields via worldline instantons formalism. *The European Physical Journal D*, 2022, 76(10): 188.
- 15 Gould O, Ho D L J, Rajantie A. Schwinger pair production of magnetic monopoles: Momentum distribution for heavy-ion collisions. *Physical Review D*, 2021, 104(1): 015033.
- 16 Ho D. Monopoles, sphalerons and instantons in strong magnetic fields. Imperial College London, 2021.
- 17 Li Z L, Gong C, Li Y J. Study of pair production in inhomogeneous two-color electric fields using the computational quantum field theory. *Physical Review D*, 2021, 103(11): 116018.
- 18 Li Z L, Sang H B, Xie B S. Enhanced electron-positron pair production of a vacuum in a strong laser pulse field by frequency variation. *Chinese Physics Letters*, 2013, 30(7): 071201.
- 19 Zhi REN, DaKai SHANG, SongTao LI, et al. Two-dimensional momentum distribution of positrons in super-chirped laser field in the vacuum (*JOL*). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2024, 54: 111011.[任芝, 尚大凯, 李松涛, 等. 真空中超强啁啾激光场下正电子产生的二维动量分布. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2024, 54: 111011]
- 20 Prakapenia M, Vereshchagin G. Pauli blocking effects on pair creation in strong electric field. *Physical Review D*, 2023, 108(1): 013002.
- 21 Granz L F, Mathiak O, Villalba-Chávez S, et al. Electron-positron pair production in oscillating electric fields with double-pulse structure. *Physics Letters B*, 2019, 793: 85-89.
- 22 Al-Naseri H, Zamanian J, Brodin G. Plasma dynamics and vacuum pair creation using the Dirac-Heisenberg-Wigner formalism. *Physical Review E*, 2021, 104(1): 015207.
- 23 Hu L N, Amat O, Wang L, et al. Momentum spirals in multiphoton pair production revisited. *Physical Review D*, 2023, 107(11): 116010.
- 24 Aleksandrov I A, Kudlis A, Klochaj A I. Kinetic theory of vacuum pair production in uniform electric fields revisited. arXiv preprint arXiv:2403.17204, 2024.
- 25 Li C K, Lin N S, Zhou X X, et al. Creation mechanism of electron-positron pair on equally spaced multiple localized fields. *Chinese Physics B*, 2023, 32(9): 094202.
- 26 Wu J X, Gong C, Sun A R, et al. Effects of control fields on pair creation and vacuum information transmission. *JOSA B*, 2023, 40(6): 1367-1374.
- 27 Su D D, Jiang M. Real-Time Observation of Instantaneous ac Stark Shift of a Vacuum Using a Zeptosecond Laser Pulse. *Chinese Physics Letters*, 2024, 41(1): 014201.
- 28 Lv Q Z, Su Q, Grobe R. Manipulation of the vacuum to control its field-induced decay. *Physical Review Letters*, 2018, 121(18): 183606.
- 29 Lv Q Z, Liu Y, Li Y J, et al. Noncompeting channel approach to pair creation in supercritical fields. *Physical Review Letters*, 2013, 111(18): 183204.
- 30 Gong C, Su Q, Grobe R. Machine learning techniques in the examination of the electron-positron pair creation process. *JOSA B*, 2021, 38(12): 3582-3591.
- 31 Peskin M E. An Introduction to quantum field theory[M]. CRC press, 2018.
- 32 Heisenberg W, Euler H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. *Zeitschrift für Physik*, 1936, 98(11): 714-732.
- 33 Heinzl T, Ilderton A, Marklund M. Finite size effects in stimulated laser pair production. *Physics Letters B*, 2010, 692(4): 250-256.
- 34 Ritus V. Effect of an electromagnetic field on decays of elementary particles. *Sov. Phys.-JETP*, 1969, 29(3): 532-541.
- 35 Ritus V I. Radiative effects and their enhancement in an intense electromagnetic field. *Sov. Phys. JETP*, 1970, 30(1181): 052805-20.
- 36 Narozhny N B, Fofanov M S. Comment on “Quantum processes in the field of a two-frequency circularly polarized plane electromagnetic wave”. *Physical Review E*, 1999, 60(3): 3443.
- 37 Kibble T W B. Frequency shift in high-intensity Compton scattering. *Physical Review*, 1965, 138(3B): B740.
- 38 Dumlu C K. Schwinger vacuum pair production in chirped laser pulses. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2010, 82(4): 045007.
- 39 Huet A, Kim S P, Schubert C. Vlasov equation for Schwinger pair production in a time-dependent electric field. *Physical Review D*, 2014, 90(12): 125033.
- 40 Blaschke D B, Prozorkevich A V, Roberts C D, et al. Pair production and optical lasers. *Physical review letters*, 2006, 96(14): 140402.
- 41 Kluger Y, Mottola E, Eisenberg J M. Quantum Vlasov equation and its Markov limit. *Physical Review D*, 1998, 58(12): 125015.
- 42 Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H. Pair production beyond the Schwinger formula in time-dependent electric fields. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2008, 78(6): 061701.
- 43 Smolyansky S A, Röpke G, Schmidt S, et al. Dynamical derivation of a quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism. arxiv preprint hep-ph/9712377, 1997.

- 44 Schmidt S, Blaschke D, Röpke G, et al. A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism. *International Journal of Modern Physics E*, 1998, 7(06): 709-722.
- 45 Schmidt S, Blaschke D, Röpke G, et al. Non-Markovian effects in strong-field pair creation. *Physical Review D*, 1999, 59(9): 094005.
- 46 Bloch J C R, Mizerny V A, Prozorkevich A V, et al. Pair creation: Back reactions and damping. *Physical Review D*, 1999, 60(11): 116011.
- 47 Ilderton A, Torgrimsson G, Wårdh J. Nonperturbative pair production in interpolating fields. *Physical Review D*, 2015, 92(6): 065001.
- 48 Dumlu C K. Quantum kinetic approach and the scattering approach to vacuum pair production. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2009, 79(6): 065027.
- 49 Lewis Jr H R, Riesenfeld W B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. *Journal of mathematical physics*, 1969, 10(8): 1458-1473.
- 50 Malkin I A, Man'Ko V I, Trifonov D A. Coherent states and transition probabilities in a time-dependent electromagnetic field. *Physical Review D*, 1970, 2(8): 1371.
- 51 Faccioli L, Finelli F, Vacca G P, et al. A Comment on "Semiquantum Chaos". arxiv preprint quant-ph/9709034, 1997.
- 52 Dabrowski R, Dunne G V. Superadiabatic particle number in Schwinger and de Sitter particle production. *Physical Review D*, 2014, 90(2): 025021.
- 53 Kim S P, Schubert C. Nonadiabatic quantum Vlasov equation for Schwinger pair production. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2011, 84(12): 125028.
- 54 Li Z L, Li Y J. Nonadiabatic quantum Vlasov equation in spinor QED. *Physical Review D*, 2024, 110(11): 116029.
- 55 Braun J W, Su Q, Grobe R. Numerical approach to solve the time-dependent Dirac equation. *Physical Review A*, 1999, 59(1): 604.
- 56 Mocken G R, Keitel C H. Quantum dynamics of relativistic electrons. *Journal of Computational Physics*, 2004, 199(2): 558-588.
- 57 Mocken G R, Keitel C H. FFT-split-operator code for solving the Dirac equation in 2+ 1 dimensions. *Computer Physics Communications*, 2008, 178(11): 868-882.
- 58 Ilderton A. Physics of adiabatic particle number in the Schwinger effect. *Physical Review D*, 2022, 105(1): 016021.
- 59 Diez M, Alkofer R, Kohlfürst C. Identifying time scales in particle production from fields. *Physics Letters B*, 2023, 844: 138063.
- 60 Gong C, Su Q, Grobe R. Subtraction-based densities for positrons created inside supercritical fields. *Physical Review A*, 2024, 109(1): 013102.
- 61 Kim S P, Page D N. Schwinger pair production via instantons in strong electric fields. *Physical Review D*, 2002, 65(10): 105002.
- 62 Zastrau U, Appel K, Baehtz C, et al. The high energy density scientific instrument at the European XFEL[J]. *Synchrotron Radiation*, 2021, 28(5): 1393-1416.
- 63 Orthaber M, Hebenstreit F, Alkofer R. Momentum spectra for dynamically assisted Schwinger pair production. *Physics Letters B*, 2011, 698(1): 80-85.
- 64 Brézin E, Itzykson C. Pair production in vacuum by an alternating field. *Physical Review D*, 1970, 2(7): 1191.
- 65 Keldysh L V. Ionization in the field of a strong electromagnetic wave[M]//Selected Papers of Leonid V Keldysh. 2024: 56-63.
- 66 Dunne G V, Gies H, Schützhold R. Catalysis of Schwinger vacuum pair production. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2009, 80(11): 111301.
- 67 Jiang R Z, Gong C, Li Z L, et al. Backreaction effect and plasma oscillation in pair production for rapidly oscillating electric fields. *Physical Review D*, 2023, 108(7): 076015.
- 68 Anderson A. Quantum backreaction on "classical" variables. *Physical review letters*, 1995, 74(5): 621.
- 69 Gong C, Penwell A, Li Z L, et al. Transition between coherent and incoherent chirping mechanisms in electron-positron pair creation. *Journal of the Optical Society of America B*, 2020, 37(4): 1098-1108.
- 70 Kluger Y, Eisenberg J M, Svetitsky B, et al. Fermion pair production in a strong electric field[J]. *Physical Review D*, 1992, 45(12): 4659.
- 71 Vinnik D V, Mizerny V A, Prozorkevich A V, et al. Kinetic description of vacuum particle production in collisions of ultrarelativistic nuclei. *Physics of Atomic Nuclei*, 2001, 64: 775-786.
- 72 Mihaila B, Dawson J F, Cooper F. Fermion pair production in QED and the backreaction problem in (1+1)-dimensional boost-invariant coordinates revisited. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2008, 78(11): 116017.
- 73 Bulanov S S. Pair production by a circularly polarized electromagnetic wave in a plasma. *Physical Review E*, 2004, 69(3): 036408.
- 74 Tonks L, Langmuir I. Oscillations in ionized gases. *Physical Review*, 1929, 33(2): 195.
- 75 Gong C, Lu X, Shang D, et al. Time domain optimization of pair production during vacuum breakdown triggered by frequency chirped external fields. *Physica Scripta*, 2024, 99(10): 105309.
- 76 Hebenstreit F, Alkofer R, Dunne G V, et al. Momentum Signatures for Schwinger Pair Production in Short Laser Pulses with a Subcycle

- Structure. *Physical review letters*, 2009, 102(15): 150404.
- 77 Mocken G R, Ruf M, Müller C, et al. Nonperturbative multiphoton electron-positron-pair creation in laser fields. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2010, 81(2): 022122.
- 78 Abdukerim N, Li Z L, Enhanced electron-positron pair production by frequency chirping in one- and two-color laser pulse fields. *Chinese Physics B*, 2017, 26(2): 020301.
- 79 Akal I, Villalba-Chávez S, Müller C. Electron-positron pair production in a bifrequent oscillating electric field. *Physical Review D*, 2014, 90(11): 113004.
- 80 Akkermans E, Dunne G V. Ramsey fringes and time-domain multiple-slit interference from vacuum. *Physical Review Letters*, 2012, 108(3): 030401.
- 81 Dumlu C K, Dunne G V. Stokes phenomenon and Schwinger vacuum pair production in time-dependent laser pulses. *Physical review letters*, 2010, 104(25): 250402.
- 82 Hebenstreit F, Alkofer R, Gies H. Particle self-bunching in the Schwinger effect in spacetime-dependent electric fields. *Physical review letters*, 2011, 107(18): 180403.
- 83 Kamiński J Z, Twardy M, Krajewska K. Diffraction at a time grating in electron-positron pair creation from the vacuum. *Physical Review D*, 2018, 98(5): 056009.
- 84 Sitiwaldi I, Xie B S. Modulation effect in multiphoton pair production. *Physics Letters B*, 2017, 768: 174-179.
- 85 Jansen M J A, Müller C. Strongly enhanced pair production in combined high-and low-frequency laser fields. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2013, 88(5): 052125.
- 86 Gong C, Li Z L, Xie B S, et al. Electron-positron pair production in frequency modulated laser fields. *Physical Review D*, 2020, 101(1): 016008.
- 87 Abdukerim N, Li Z L, Xie B S. Effects of laser pulse shape and carrier envelope phase on pair production. *Physics Letters B*, 2013, 726(4-5): 820-826.
- 88 Li Z L, Lu D, Xie B S, et al. Nonperturbative signatures in pair production for general elliptic polarization fields. *Europhysics Letters*, 2015, 110(5): 51001.
- 89 Kohlfürst C, Mitter M, Von Winckel G, et al. Optimizing the pulse shape for Schwinger pair production. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2013, 88(4): 045028.
- 90 Jiang M, Lv Q Z, Liu Y, et al. Pair creation in localized electromagnetic fields of different spatial extensions. *Physical Review A*, 2014, 90(3): 032101.
- 91 Oluk O, Xie B S, Bake M A, et al. Electron-positron pair production in a strong asymmetric laser electric field. *Frontiers of Physics*, 2014, 9: 157-163.
- 92 Nuriman A, Xie B S, Li Z L, et al. Enhanced electron-positron pair creation by dynamically assisted combinational fields. *Physics Letters B*, 2012, 717(4-5): 465-469.
- 93 Alkofer R, Hecht M B, Roberts C D, et al. Pair creation and an X-ray free electron laser. *Physical Review Letters*, 2001, 87(19): 193902.
- 94 Li Z L, Lu D, Xie B S. Multiple-slit interference effect in the time domain for boson pair production. *Physical Review D*, 2014, 89(6): 067701.
- 95 Seipt D, Kämpfer B. Scaling law for the photon spectral density in the nonlinear Thomson-Compton scattering. *Physical Review Special Topics—Accelerators and Beams*, 2011, 14(4): 040704.
- 96 Sitiwaldi I, Xie B S. Pair production by three fields dynamically assisted Schwinger process. *Physics Letters B*, 2018, 777: 406-411.
- 97 Hebenstreit F, Alkofer R, Dunne G V, et al. Quantum statistics effects for Schwinger pair production in short laser pulses // *Quantum Field Theory Under The Influence Of External Conditions (Qfext09) Devoted to the Centenary of HBG Casimir*. 2010: 492-496.

# QVE method for solving electron and positron pair creation in the vacuum

GONG Chi<sup>1,2</sup>, DING YaRu<sup>1,2\*</sup>, WU MengXin<sup>1,2</sup>, LI ZiLiang<sup>3</sup>, XIE BaiSong<sup>4\*</sup>, LI YingJun<sup>3\*</sup>.

<sup>1</sup>Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

<sup>2</sup>Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

<sup>3</sup>School of Science, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China;

<sup>4</sup>School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

\*Corresponding author (email: yaruding@yeah.net; bsxie@bnu.edu.cn; lyj@aphy. iphy.ac.cn)

In the presence of an ultra-strong external field, the vacuum can generate electron-positron pairs, demonstrating that energy can be converted into mass. This generation process is of great significance for understanding the origin of matter. In recent years, with the rapid development of ultra-short and ultra-strong laser technology, the intensity of laser fields is gradually approaching the Schwinger threshold, which has prompted the application of different research methods and techniques in theoretical and numerical simulations of particle-pair production in vacuum. Among them, the Quantum Vlasov Equation (QVE) method is primarily used to solve the problem of electron-positron pair production in vacuum under a spatially uniform time-varying ultra-strong field. This paper reviews the proposal, development, and research progress of the QVE method, and introduces representative works. These studies not only provide valuable theoretical foundations for future verification experiments but also contribute to the research on antimatter and the understanding of the cosmic formation process under extreme conditions.

**QVE, electron-positron pairs, Schwinger threshold**

**PACS:** 34.50.Rk, 03.65.-w, 12.20.-m

**doi:** 10.1360/SSPMA2025-00000