

受限非线性最优控制问题的三角 正交函数求解方法

李树荣

(中国石油大学 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266580)

摘要:提出一种求解带有状态和控制不等式约束的非线性最优控制问题的数值求解方法。该方法通过三角正交函数对状态变量和控制变量的逼近,进而对目标函数、不等式约束和终端约束进行逼近,最终将原最优控制问题转化为非线性规划问题进行迭代求解。仿真算例结果验证了该算法的有效性。

关键词:最优控制;三角正交函数;直接法;不等式约束;非线性

中图分类号:TP 301 **文献标志码:**A

Triangular orthogonal functions for nonlinear constrained optimal control problems

LI Shu-rong

(College of Information and Control Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: A numerical method for solving nonlinear optimal control problems including terminal state constraints, state and control inequality constraints was proposed. The method is based on triangular orthogonal functions. By approximating the dynamic systems, performance index and boundary conditions into triangular orthogonal series, the optimal control problem is converted into algebraic equations with unknown coefficients. The results of illustrative examples demonstrate the accuracy and applicability of the proposed method.

Key words: optimal control; triangular orthogonal functions; direct method; inequality constraints; nonlinearity

在求解最优控制问题的方法中,直接法始终是一种被广泛应用的方法^[1-2]。其中,利用某些函数序列对原控制问题进行近似从而进行直接求解的方法在直接法中也多有使用。Chen 等^[3]将沃尔什序列法引入最优控制问题的直接求解中,并得到相应最优控制问题的分段常数解。勒让德小波法^[4]、切比雪夫多项式法^[5]、傅里叶序列法^[6]和高斯伪谱法^[7]也被引入来对最优控制问题进行直接求解。不同于以上的正交函数,Anish 等^[8]提出了一种源于方脉冲函数(BPFs)的三角正交函数,给出了该函数的积分计算矩阵,并验证了三角正交函数在近似求解数值问题时较好的近似性能和较快的计算速度。笔者基于此三角正交函数,提出一种求解带有状态和不等式约束的非线性最优控制问题的数值求解方法。

1 三角正交函数

基于方脉冲函数,Anis 等^[8]提出了三角正交函数。通过拆分,在区间 $[0,1)$ 中将一个方脉冲函数分解成两个三角正交函数 $T_{L_i}(t)$ 和 $T_{R_i}(t)$:

$$T_{L_i}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t - ih}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (1)$$

$$T_{R_i}(t) = \begin{cases} \frac{t - ih}{h}, & ih \leq t < (i+1)h, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $i = 0, 1, 2, \dots, m-1, h = 1/m$ 。

三角正交函数的两个向量左三角函数 $\mathbf{T}_L(t)$ 和右三角函数 $\mathbf{T}_R(t)$ 为

收稿日期:2012-10-05

基金项目:国家自然科学基金项目(60974039);山东省自然科学基金项目(ZR2011FM002)

作者简介:李树荣(1966-),男,教授,博士生导师,研究方向为非线性控制及油田最优控制等。E-mail:lishuron@upc.edu.cn。

$$\mathbf{T}_L(t) = [T_{L_0}(t), T_{L_1}(t), \dots, T_{L_{m-1}}(t)]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_R(t) = [T_{R_0}(t), T_{R_1}(t), \dots, T_{R_{m-1}}(t)]^T. \quad (4)$$

1.1 函数近似

函数 $f(t)$ 可用含有 m 项的三角正交函数序列展开为

$$\begin{aligned} f(t) \approx [c_0 T_{L_0}(t) + d_0 T_{R_0}(t)] + \dots + [c_{m-1} T_{L_{m-1}}(t) + \\ d_{m-1} T_{R_{m-1}}(t)] \triangleq [c_0, c_1, \dots, c_i, \dots, c_{m-1}] \mathbf{T}_L(t) + \\ [d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_{m-1}] \mathbf{T}_R(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}_R(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} c_i &\triangleq f(ih), \\ d_i &\triangleq f[(i+1)h], \\ c_{i+1} &= d_i. \end{aligned}$$

1.2 积分计算矩阵

$\mathbf{T}_L(t)$ 的积分可表示为

$$\int_0^1 \mathbf{T}_L(t) dt \triangleq \mathbf{P}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{T}_R(t), \quad (6)$$

式中, 矩阵 $\mathbf{P}_L$ 和 $\mathbf{P}_R$ 为积分运算矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L &= \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}_R &= \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{P}_L$ 和 $\mathbf{P}_R$ 为 $m \times m$ 维矩阵。 $\mathbf{T}_R(t)$ 的积分计算与 $\mathbf{T}_L(t)$ 相同。

$f(t)$ 的积分可表示为

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) d\tau \approx C \int_0^t \mathbf{T}_L(\tau) d\tau + D \int_0^t \mathbf{T}_R(\tau) d\tau \approx C(\mathbf{P}_L \cdot \\ \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{T}_R(t)) + D(\mathbf{P}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{T}_R(t)) \\ = (C + D)(\mathbf{P}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{T}_R(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7), 已知 C 和 D 便可确定 $f(t)$ 的近似积分值。

2 问题描述

寻找最优向量 $\mathbf{U}(\tau)$, 和相应的状态向量 $\mathbf{X}(\tau)$, $\tau \in [0, t_f]$, 使下面的性能指标最小:

$$J = \mathbf{H}(\mathbf{X}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} G(\mathbf{X}(\tau), \mathbf{U}(\tau), \tau) d\tau, \quad (8)$$

s. t.

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\tau), \mathbf{U}(\tau), \tau), \tau \in [0, t_f], \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (9)$$

$$S_i(\mathbf{X}(\tau), \mathbf{U}(\tau), \tau) \leq 0, \tau \in [0, t_f], i = 1, \dots, v, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{X}(\tau)$ 和 $\mathbf{U}(\tau)$ 分别为 $l \times 1$ 维和 $q \times 1$ 维向量。向量函数 $\mathbf{F}$ 和标量函数 S_i 由一般的非线性函数组成并对 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{U}$ 可微, t_f 为终端时间。并假设上述最优控制问题(8) ~ (10) 存在唯一解。由于三角正交函数为定义在 $t \in [0, 1]$ 上的函数集合, 引入时间转换 $\tau = t_f t$, 将式(8) ~ (10) 转化为

$$J = h(x(1), t_f) + \int_0^1 g(x(t), u(t), t, t_f) dt, \quad (11)$$

s. t.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t, t_f), t \in [0, 1], x(0) = x_0, \quad (12)$$

$$s_i(x(t), u(t), t, t_f) \leq 0, t \in [0, 1], i = 1, \dots, v. \quad (13)$$

3 方法阐述

文献[9] 中仅应用三角正交函数对无不等式约束的最优控制问题进行了求解, 本文中对含有不等式约束的问题进行求解。

将 $x(t)$ 和 $u(t)$ 用三角正交函数序列近似为

$$x(t) \triangleq \mathbf{C}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{T}_R(t), \quad (14)$$

$$u(t) \triangleq \mathbf{D}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{D}_R \cdot \mathbf{T}_R(t), \quad (15)$$

同样, 初始条件用三角正交函数展开为

$$\mathbf{x}_0 \approx \bar{\mathbf{x}}_0(\mathbf{T}_L + \mathbf{T}_R), \quad (16)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 为 $l \times m$ 维矩阵, 该矩阵的每一列均为 $\mathbf{x}_0$ 。

将式(14) 从 0 到 t 积分可得

$$\begin{aligned} x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + x_0 \approx \int_0^t [\mathbf{C}_L^T \cdot \mathbf{T}_L(\tau) + \mathbf{C}_R^T \cdot \\ \mathbf{T}_R(\tau)] d\tau + \bar{\mathbf{x}}_0(\mathbf{T}_L + \mathbf{T}_R) = (\mathbf{C}_L^T + \mathbf{C}_R^T)(\mathbf{P}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) \\ + \mathbf{P}_R \cdot \mathbf{T}_R(t)) + \bar{\mathbf{x}}_0(\mathbf{T}_L + \mathbf{T}_R). \end{aligned} \quad (17)$$

3.1 系统状态方程近似

由式(14) 和(15), 系统状态方程可近似为

$$f(x(t), u(t), t, t_f) = \hat{f}(\mathbf{C}_L, \mathbf{C}_R, \mathbf{D}_L, \mathbf{D}_R, t, t_f). \quad (18)$$

类似于式(14), 同样可以得到

$$f(x(t), u(t), t, t_f) \approx \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{T}_R(t). \quad (19)$$

将式(14) 和(17) 带入式(18) 中可得

$$\mathbf{C}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{T}_R(t) = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{T}_R(t). \quad (20)$$

引理 1^[9] $\mathbf{C}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{T}_R(t) = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{T}_R(t)$, 其中 $\mathbf{C}_L, \mathbf{C}_R, \mathbf{F}_L$, 和 $\mathbf{F}_R$ 为 m 维系数向

量,则有 $C_L = F_L, C_R = F_R$ 。

由引理1和式(20)可得

$$C_L - F_L = 0, \quad (21)$$

$$C_R - F_R = 0. \quad (22)$$

3.2 性能指标近似

由式(15)和(17)可得

$$h(x(1), t_f) = \hat{h}(C_L, C_R, D_L, D_R, t_f), \quad (23)$$

$$g(x(t), u(t), t, t_f) = \hat{g}(C_L, C_R, D_L, D_R, t, t_f). \quad (24)$$

与式(19)同理,可得

$$g(x(t), u(t), t, t_f) = G_L \cdot T_L(t) + G_R \cdot T_R(t), \quad (25)$$

式中, G_L 和 G_R 为 $1 \times m$ 维矩阵。

将式(25)代入式(11)可得

$$J(C_L, C_R, D_L, D_R, G_L, G_R) = \int_0^1 (G_L \cdot T_L(t) + G_R \cdot T_R(t)) dt + \hat{h}(C_L, C_R, D_L, D_R, t_f) = \hat{h}(C_L, C_R, D_L, D_R, t_f) + (G_L + G_R) \cdot (P_L \cdot T_L(1) + P_R \cdot T_R(1)). \quad (26)$$

3.3 不等式约束转化

式(13)中的不等式约束可由如下的等式约束替换^[10]:

$$s_j(x(t), u(t), t, t_f) + z_j^2(t) = 0, j = 1, 2, \dots, v, \quad (27)$$

其中 $z_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, v$ 为辅助函数。将 $z(t)$ 用三角正交函数展开可得

$$z(t) \approx Z_L \cdot T_L(t) + Z_R \cdot T_R(t), \quad (28)$$

$$z_j(t) \approx Z_{L_j} \cdot T_L(t) + Z_{R_j} \cdot T_R(t), j = 1, 2, \dots, v, \quad (29)$$

其中 Z_{L_j} 和 Z_{R_j} 是 m 维向量,同时构成 $v \times m$ 维矩阵 Z_L 和 Z_R 的第 j 行。同时可得

$$z_j^2(t) = (Z_{L_j} \cdot T_L(t) + Z_{R_j} \cdot T_R(t))^T \cdot (Z_{L_j} \cdot T_L(t) + Z_{R_j} \cdot T_R(t)). \quad (30)$$

s_j 可改写为

$$s_j(x(t), u(t), t, t_f) = \hat{s}_j(C_L, C_R, D_L, D_R, t, t_f). \quad (31)$$

定义

$$k_j(C_L, C_R, D_L, D_R, t, t_f) = \hat{s}_j(C_L, C_R, D_L, D_R, t, t_f) + (Z_{L_j} \cdot T_L(t) + Z_{R_j} \cdot T_R(t))^T \cdot (Z_{L_j} \cdot T_L(t) + Z_{R_j} \cdot T_R(t)). \quad (32)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, v$ 。

将式(31)可展开为

$$s_j(x(t), u(t), t, t_f) + z_j^2(t) \approx (K_{L_j} \cdot T_L(t) + K_{R_j} \cdot T_R(t)) = 0. \quad (33)$$

此时式(13)中的不等式约束可转化为一个通过求解 $K_{L_j}, K_{R_j}, j = 1, \dots, v$ 使如下函数值最小的问题:

$$J_e(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R) = \int_0^1 \sum_{j=1}^v (K_{L_j} \cdot T_L(t) + K_{R_j} \cdot T_R(t))^T \cdot (K_{L_j} \cdot T_L(t) + K_{R_j} \cdot T_R(t)) dt. \quad (34)$$

综上,原最优控制问题(11)~(13)可以转化为以下的最优控制问题。

计算 C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L 和 Z_R ,使下面的性能指标函数值最小:

$$J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = J(C_L, C_R, D_L, D_R) + J_e(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R) + \lambda^T (C_L + C_R - F_L - F_R), \quad (35)$$

其中 λ 为未知的拉格朗日乘数。为计算 J^* 的极值,求 J^* 的偏导数,并设其为零。

$$\frac{\partial}{\partial C_L} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_R} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial D_L} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial D_R} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_L} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_R} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} J^*(C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L, Z_R, \lambda) = 0. \quad (42)$$

式(36)~(42)可用内点法求解。

在求得未知系数 C_L, C_R, D_L 和 D_R 的最优解后,将其代入式(15)和(17)便可得到新一轮迭代所需的 $x(t)$ 和 $u(t)$ 。将新得到的 $x(t)$ 和 $u(t)$ 代入式(11)~(13)中便可得到新一轮迭代所要求解的受限非线性最优控制问题。迭代计算重复进行直到满足终止条件为止。设定当如下的条件满足时计算终止:

$$|J_n^* - J_{n-1}^*| < \varepsilon, \quad (43)$$

其中 J_n^* 和 J_{n-1}^* 代表连续两轮迭代计算相应的性能指标函数值, ε 为一所需的充分小正实数。

算法流程如下。

步骤1:设定 C_L, C_R, D_L, D_R, Z_L 和 Z_R 。

步骤2:时间区间由 $\tau \in [0, t_f]$ 转换为 $t \in [0, 1]$ 。

步骤3:用式(15)求带有未知系数的控制变量。

步骤4:用式(17)求含有未知系数的状态变量。

步骤5:用式(19)计算系统状态方程。

步骤6:用式(26)计算性能指标。

步骤 7:用式(33) 计算不等式约束。

步骤 8:内点法法求解最优控制问题(36) ~ (42)。

步骤 9:将所求得的最优解代入式(15) 和(17) 得到新一轮迭代计算所需的 $x(t)$ 和 $u(t)$ 。

步骤 10:如果 $|J_n^* - J_{n-1}^*| < \varepsilon$ 成立,则计算终止;否则转至步骤 3。

4 算例仿真

试验环境为 Matlab, 计算芯片为酷睿 2(2.4 GHz), 内存 2 G。

4.1 例 1

考虑范德波尔振荡器 (Van der Pol oscillator) 问题。该例曾在文献[11] 中用切比雪夫法进行求解。计算满足约束的控制向量 $u(t)$ 使如下性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) d\tau,$$

s. t.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u, \\ x_1(0) &= 1, x_2(0) = 0, x_1(5) + 1 = 0, \\ x_2(5) &= 0, |u(t)| \leq 0.75. \end{aligned}$$

选取 $\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$,用内点法进行迭代计算。表 1 给出了本文算法所得的性能指标和计算耗时,并与其他方法进行了比较。图 1 给出了状态变量的计算结果,图 2 为最优控制轨迹。

表 1 例 1 仿真结果比较

Table 1 Results comparison of example 1			
方法	级数	J_n^*	耗时 t/s
切比雪夫	$N = 6$	0.2540	5.3323
多项式	$N = 18$	0.1728	57.8199
本文	$m = 6$	0.2363	1.0227
	$m = 45$	0.1719	40.8813

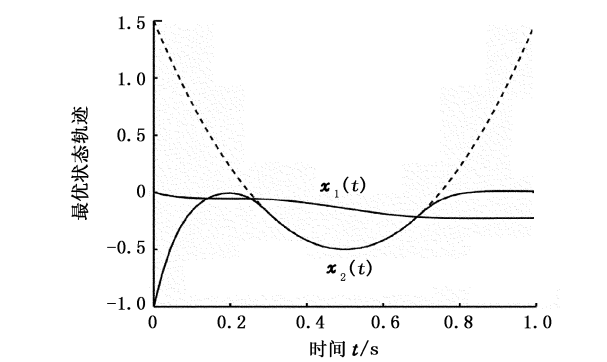


图 1 例 1 最优状态轨迹

Fig. 1 Optimal states of example 1

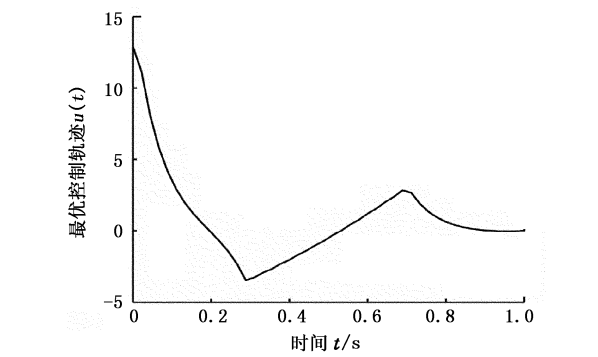


图 2 例 1 最优控制轨迹

Fig. 2 Optimal control of example 1

4.2 例 2

考虑来自文献[12] 的问题, 计算控制向量 $u(t)$, 使如下的性能指标函数值最小:

$$J = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0.005u^2(t)) d\tau,$$

s. t.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau) = -x_2(\tau) + u(\tau), \\ x_1(0) &= 0, x_2(0) = -1. \end{aligned}$$

状态变量不等式约束为

$$x_2(\tau) - 8(\tau - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0.$$

选取 $\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$, 用内点法进行迭代计算。表 2 给出了本文算法所得的性能指标和计算耗时,并与其他方法进行了比较。图 3 给出了状态变量的计算结果,图 4 为最优控制轨迹。

表 2 例 2 仿真结果比较

Table 2 Results comparison of example 2			
方法	级数	J_n^*	耗时 t/s
切比雪夫	$N=8$	2.2785	3.4547
多项式	$N=10$	2.3430	40.7822
本文	$m=6$	2.2694	2.1046
	$m=30$	2.1534	13.1067

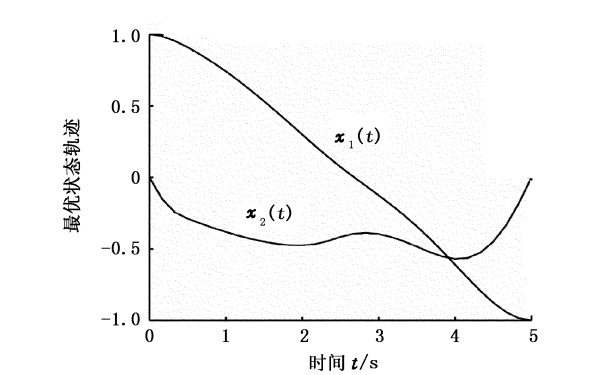


图 3 例 2 最优状态轨迹

Fig. 3 Optimal states of example 2

以上两个仿真算例表明,本算法可以应用于求解受限最优控制问题。在满足题设对控制或状态限

制的情况下,本算法可较切比雪夫多项式法得到更佳的性能指标,并且计算耗时更少。这样结果的出现,得益于三角正交函数简单的结构,对函数的近似性能好,这样的特性使得三角正交函数有较快的收敛速度和对函数较好的近似性。

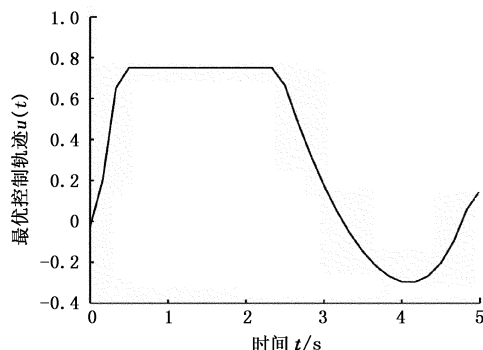


图4 例2最优控制轨迹

Fig.4 Optimal control of example 2

5 结束语

针对带有终端状态约束、不等式约束的非线性最优控制问题,提出了一种基于三角正交函数的直接计算方法。该方法用系数待定的三角正交函数将控制变量和系统状态进行展开,进而将性能指标函数、状态方程和不等式约束等进行近似,从而将非线性最优控制问题转化为一系列代数方程进行求解。这样简化了求解问题的复杂性,将原非线性受限最优控制问题转化为代数方程,借助求解代数方程,实现了对原最优控制问题的直接求解。试验结果验证了该算法求解最优控制问题的有效性;该算法在满足题设限制的情况下,可得到较切比雪夫多项式算法更快的计算速度和更好的性能指标,验证了该算法在求解此类最优控制问题上有较好的收敛性和计算精度。

参考文献:

- [1] 雷阳,李树荣,张强,等.一种求解最优控制问题的非均匀控制向量参数化方法[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2011,35(5):180-184.
LEI Yang, LI Shu-rong, ZHANG Qiang, et al. A non-uniform control vector parameterization approach for optimal control problems [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2011,35(5):180-184.
- [2] 王峰,李树荣.多目标产业结构优化最优控制模型的改进及求解[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2011,35(2):182-187.
- [3] CHEN C F, HSIAO C H. A Walsh series direct method for solving variational problems [J]. Journal of the Franklin Institute, 1975,30:265-280.
- [4] RAZZAGHI M, YOUSEFI S. Legendre wavelets direct method for variational problems [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2000,53:185-192.
- [5] HORNG I R, CHOU J H. Shifted Chebyshev direct method for solving variational problems [J]. International Journal of Systems Science, 1985,16:855-861.
- [6] MOHSEN R, MEHDI R, ADBOLLAH A. Solutions of convolution integral and Fredholm integral equations via double Fourier series [J]. Applied Mathematics and Computation, 1990,40:215-224.
- [7] 李树荣,韩振宇,于光金.基于高斯伪谱的最优控制求解及其应用[J]. 系统科学与数学, 2010,30(8):1031-1043.
- [8] ANISH D, ANINDITA D, GAUTAM S. A new set of orthogonal functions and its application to the analysis of dynamic systems [J]. Journal of the Franklin Institute, 2006,343:1-26.
- [9] ANISH D, GAUTAM S, SUNIT K S. Block pulse functions, the most fundamental of all piecewise constant basis functions [J]. International Journal of Systems Science, 1994,25:351-363.
- [10] MARZBAN H R, RAZZAGHI M. Hybrid functions approach for linearly constrained quadratic optimal control problems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2003, 27:471-485.
- [11] KLEINMAN D L, FORTMANN T, ATHANS M. On the design of linear systems with piecewise-constant feedback gains [J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1968,13:354-361.
- [12] HUSSEIN J. Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and chebyshev polynomials [J]. Journal of the Franklin Institute, 2002,339:479-498.

(编辑 修荣荣)