



Riemann-Finsler 几何中的独角兽问题

献给沈一兵教授 85 寿辰

冯惠涛¹, 李明^{2*}

1. 南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071;

2. 重庆理工大学数学科学研究中心, 重庆 400054

E-mail: fht@nankai.edu.cn, mingli@cqut.edu.cn

收稿日期: 2023-06-02; 接受日期: 2023-11-16; 网络出版日期: 2024-03-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11931007)、重庆市自然科学基金 (批准号: CSTB2022NSCQ-MSX0397) 和重庆市教委科学技术研究 (批准号: KJZD-K202301110) 资助项目

摘要 本文简要综述 Finsler 几何中的独角兽问题. 主要介绍独角兽问题的一些研究思路、近期的主要研究进展, 特别是沈忠民关于 (α, β) -度量的研究工作, 以及最近从仿射几何角度对该问题的一些研究结果.

关键词 Landsberg 流形 Berwald 流形 独角兽问题 (α, β) -度量 中心仿射度量

MSC (2020) 主题分类 53C60, 53C24, 53A15, 53C40

1 引言

1854 年, Riemann 在其著名的就职演说 (Habilitationsvortrag) 中提出了研究 n 维流形上无穷小线素 (line element) 的几何. 线素为二次型情形的几何称为 Riemann 几何, 而没有二次型限制的一般线素几何称为 Riemann-Finsler 几何, 或简称 Finsler 几何.

设 M 是 n 维光滑流形, M 的切丛记为 TM , 切丛的投影映射记为 $\pi: TM \rightarrow M$. M 上的一个 Finsler 结构是指 TM 上的一个非负连续函数 $F: TM \rightarrow [0, +\infty)$, 并且满足如下条件:

- (1) F 限制在去掉零截面的切丛 TM_0 上光滑;
- (2) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$;
- (3) 基本张量

$$g_{ij} := \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \quad (1.1)$$

在 TM_0 上正定.

英文引用格式: Feng H T, Li M. The unicorn problem in Riemann-Finsler geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1521–1532, doi: 10.1360/SSM-2023-0160

带有 Finsler 结构 F 的流形 M 称为 Finsler 流形, 并记为 (M, F) . 上述定义中的 Finsler 结构也称为正则 Finsler 结构. 如无特别说明, 本文仅研究正则 Finsler 结构.

对于 Finsler 流形 (M, F) , 其基本张量 (g_{ij}) 在拉回切丛 $\pi^*TM \rightarrow TM_0$ 上给出了一个诱导的 Euclid 结构 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$.

M 的单位切球丛定义为 $SM := \{(x, y) \in TM \mid F(x, y) = 1\}$, 其为切丛 TM 中的一个超曲面. 由 F 的齐次性知, Finsler 流形的几何量可以自然定义在 SM 上.

在拉回切丛 $\pi^*TM \rightarrow SM$ 上, 陈省身 (参见文献 [9]) 构造了以他的名字命名的陈省身联络 ∇^{Ch} (简称 Chern 联络). Chern 联络的曲率 $R^{\text{Ch}} = (\nabla^{\text{Ch}})^2$, 作为定义在 SM 上的 2-形式丛映射, 仅包含纯水平微分形式部分 R 及水平 - 垂直微分形式部分 P . 在 Riemann 情形有 $P = 0$, 而 R 就是普通的 Riemann 曲率张量. 对于一般的 Finsler 度量, R 称为 Chern-Riemann 曲率, P 称为 Chern 曲率 (详见第 2 节).

如果 Finsler 流形 (M, F) 的 Chern 曲率 $P = 0$, 则 F 称为 Berwald 度量, (M, F) 称为 Berwald 流形. 通常, Berwald 流形定义为 Berwald 曲率为 0 的流形 (这两种定义是等价的). Riemann 流形都是 Berwald 流形, 但存在大量非 Riemann 的 Berwald 流形.

如果 Finsler 流形的 Chern 曲率沿着球丛上的测地向量场 G 为 0, 则称该流形为 Landsberg 流形. 从定义可知, Berwald 流形均为 Landsberg 流形. Finsler 几何中的一个未解决的公开问题如下:

问题 1.1 是否存在非 Berwald 的 Landsberg 流形?

在 1996 年的综述文献 [31] 中, Matsumoto 将该问题明确列为公开问题, 并对当时的相关研究结果作了总结. 在 2007 年纪念 Matsumoto 的文献 [8] 中, Bao 将非 Berwald 的 Landsberg 度量称为独角兽 (unicorn). 从此, 该问题也被称为独角兽问题. 2009 年, 独角兽问题也作为第一个问题出现在 Shen^[44] 列出的 Finsler 几何中的公开问题集中. 独角兽问题引起了众多几何学家的关注, Szabó^[46] 声称解决了该问题, 但被发现证明存在问题 (参见文献 [33, 47]). 对该问题的研究的相关结果很多, 在此仅列出其中一部分: 综述性文献可参见文献 [1, 8, 16, 48, 49], 在附加一些曲率条件下的结果可参见文献 [5, 6, 17, 26, 27], 对具有特殊形式的度量的相关结果可参见文献 [18, 34, 52, 55–57].

本文主要概述独角兽问题的一些研究思路、近期的主要研究进展, 特别是沈忠民关于 (α, β) -度量的研究工作, 以及最近从仿射几何角度对该问题的一些研究结果, 同时也介绍由此而引出的一些相关问题.

本文采用 Einstein 求和约定以及如下指标记号:

$$1 \leq i, j, k, \dots \leq n, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n-1, \quad \bar{\alpha} = n + \alpha.$$

2 球丛的 Riemann 几何与 Chern 联络

本节介绍球丛的自然几何结构. 关于 Finsler 几何的基本知识以及其他重要问题可参见文献 [9, 14, 40, 41].

设 (M, F) 为 n 维 Finsler 流形. 注意到球丛 SM 上有一个自然的纤维化结构 $\pi: SM \rightarrow M$. 此时借助 M 上的 Finsler 度量 F , 得到 SM 切丛的一个水平 - 垂直分解

$$T(SM) = H(SM) \oplus V(SM), \quad (2.1)$$

其中, $H(SM)$ 称为 $T(SM)$ 的水平子丛, 由 M 上的 Finsler 结构唯一确定; $V(SM)$ 是纤维丛 $\pi: SM \rightarrow M$ 的垂直切丛, 也称为 $T(SM)$ 的垂直子丛. 以下将 $V(SM)$ 记为 $\mathcal{V}$. 由 Finsler 度量的弧长变分

可以给出 SM 上一个处处非零的水平向量场 $\mathbf{G}$, 称其为 SM 上的测地向量场或射流 (spray). 记 l 为 $\mathbf{G}$ 生成的平凡线丛.

利用由 Finsler 结构决定的向量丛同构 $\pi^*TM \cong H(SM)$, 水平子丛 $H(SM)$ 具有诱导的 Euclid 结构 g . 作为 $H(SM)$ 的子丛, 线丛 l 关于 g 的正交补子丛记为 $l^\perp$. 因此 $T(SM)$ 可以进一步分解为

$$T(SM) = l^\perp \oplus l \oplus \mathcal{F}. \quad (2.2)$$

对于底流形 M 上任意一点 x , F 在切空间 T_xM 的限制 F_x 定义了一个 Minkowski 范数. F_x 进一步在 $T_xM \setminus \{0\}$ 上诱导一个 Hessian 度量 $\bar{g}_x = g_{ij}(x)dy^i \otimes dy^j$. SM 在 x 处的纤维 $S_xM \subset T_xM$ 具有 $\bar{g}_x$ 诱导的 Riemann 度量 $\dot{g}_x$, 并且 $\dot{g}_x$ 光滑依赖 x . 由此在 SM 的垂直切丛 $\mathcal{F}$ 上就有一个 Euclid 结构 $\dot{g}_x$, 进而在 SM 上有一个 Sasaki 型的 Riemann 度量

$$g^{T(SM)} := g \oplus \dot{g}. \quad (2.3)$$

在度量 $g^{T(SM)}$ 下, $H(SM)$ 与 $\mathcal{F}$ 正交, 所以也将 $H(SM)$ 记为 $\mathcal{F}^\perp$.

Finsler 度量的 Hilbert 形式 $\omega := F_{y^i}dx^i$ 定义了 SM 上的一个切触结构, 并且

$$\omega(\mathbf{G}) = 1. \quad (2.4)$$

ω 的切触分布为 $\mathcal{D} := \{\omega = 0\} = l^\perp \oplus \mathcal{F}$. 在 $\mathcal{D}$ 上有自然的近复结构 $J: \mathcal{F} \rightarrow l^\perp$, 使得 J 为等距映射.

如下引理说明上述几何结构是相容的.

引理 2.1 对于任意的 Finsler 流形 (M, F) , 几何结构 $(J, \mathbf{G}, \omega, g^{T(SM)})$ 定义了 SM 上的一个切触度量结构.

由于 SM 的纤维化结构是特殊的叶状结构, 而且在 $T(SM)$ 上有自然的 Sasaki 型 Riemann 度量. 根据叶状结构理论知, 在 $\mathcal{F}^\perp$ 上有 Bott 联络 $\tilde{\nabla}^{\mathcal{F}^\perp}$ (参见文献 [54]). 在 Finsler 几何的发展过程中, 人们在 π^*TM 上构造了多种线性联络, 其中包括著名的 Chern 联络和 Cartan 联络. 一个自然的问题是研究 Bott 联络与 Chern 联络的关系. 本文作者在文献 [19] 中证明了下面的结果.

定理 2.1 对于 Finsler 流形 (M, F) , 在同构 $\pi^*TM \cong H(SM)$ 意义下, $H(SM)$ 上的 Bott 联络正是 π^*TM 上的 Chern 联络, 而 Bott 联络的对称化联络正是 Cartan 联络. Cartan 联络和 Chern 联络的差

$$\frac{1}{2}\Theta := \nabla^{\text{Ca}} - \nabla^{\text{Ch}}$$

称为 Bismut- 张形式 $\Theta = g^{-1}(\nabla^{\text{Ch}}g)$ (参见文献 [10]) 或者 Cartan 同态.

通常选择 SM 上的 (局部) 正交标架场 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}\}$ 使得 $\mathbf{e}_n = \mathbf{G}$ 为测地向量场, $\{\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}\}$ 逐点张成 SM 纤维的切空间, 并且 $\mathbf{e}_\alpha = J\mathbf{e}_{n+\alpha}$. 该标架场的对偶标架场记为 $\{\omega^1, \dots, \omega^n, \dots, \omega^{2n-1}\}$, 其中 $\omega^n = \omega$ 为 Hilbert 形式.

考虑 Chern 联络的曲率 $R^{\text{Ch}} = (\nabla^{\text{Ch}})^2$. 由于 Bott 联络的曲率沿着可积分布的方向为 0 (参见文献 [54]), R^{Ch} 作为 SM 上的 2- 形式可分解为

$$R^{\text{Ch}} = \frac{1}{2}R_j^i{}_{kl}(\omega^k \wedge \omega^l) \otimes \omega^j \otimes \mathbf{e}_i + P_j^i{}_{k\gamma}(\omega^k \wedge \omega^{\bar{\gamma}}) \otimes \omega^j \otimes \mathbf{e}_i =: R + P, \quad (2.5)$$

称 R^{Ch} 的纯水平微分形式部分 R 为 Chern-Riemann 曲率, 而 R^{Ch} 的水平 - 垂直微分形式部分 P 称为 Chern 曲率. Chern 曲率的迹 $\text{tr}P$ 称为平均 Chern 曲率.

通常 $\mathbf{L} := -P(\mathbf{G}, \cdot)$ 为 Finsler 流形的 Landsberg 曲率. 而 Landsberg 曲率的迹 $\mathbf{J} := \text{tr} \mathbf{L}$ 称为平均 Landsberg 曲率.

根据 Finsler 流形的曲率性质, 引入下面的 Finsler 流形类: 一个 Finsler 流形 (M, F) 属于

- $\mathcal{B}$, 如果 $P = 0$ (Berwald 流形);
- $\mathcal{WC}$, 如果 $\text{tr} P = 0$ (弱 Chern 流形);
- $\mathcal{L}$, 如果 $\mathbf{L} = 0$ (Landsberg 流形);
- $\mathcal{WL}$, 如果 $\mathbf{J} = 0$ (弱 Landsberg 流形).

根据定义可知这些 Finsler 流形类之间的包含关系如下:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{L} & \\
 \subset & & \subset \\
 \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{WC} & & \mathcal{WL} \\
 \subset & & \subset \\
 & \mathcal{WC} &
 \end{array} \quad (2.6)$$

从而独角兽问题可等价叙述为: $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ 是否成立?

3 球丛纤维的几何结构及中心仿射几何的刚性定理

容易看出 Riemann 流形的切空间均为 Euclid 空间, 所以 Riemann 流形球丛的纤维均为标准单位球面, 具有常截面曲率 1. 但是 Finsler 流形的切空间上的 Minkowski 范数, 一般不是由 Euclid 内积诱导的. 第 2 节已经知道 Minkowski 范数给出了去掉原点的切空间上一个 Hessian 结构 $\bar{g}$, 因此单位球面作为切空间的超曲面, 其上有诱导的 Riemann 度量 $\dot{g}$. Von Varga^[50] 用这种观点研究了 Minkowski 空间. 这方面更加详细的研究可参见文献 [9].

Finsler 流形的切空间作为线性空间, 其上的 Minkowski 范数与单位球面相互决定. 当底流形的坐标系变换时, 切空间的坐标系之间相差线性变换. 单位球面在不同的坐标系之间相差线性变换, 所以单位球面的几何具有仿射不变性. Laugwitz^[22, 23] 用仿射微分几何的方法研究了 Minkowski 空间. 李明^[26] 独立发现了这个观点, 并将其运用于独角兽问题的研究.

设 V 是 n 维实线性空间, F 是其上的一个 Minkowski 范数. (V, F) 的单位球面记为

$$I_F := \{v \in V \mid F(v) = 1\},$$

并记 $i: I_F \rightarrow V$ 为嵌入映射. 在 $V_0 := V \setminus \{0\}$ 上由 F 决定的 Hessian 结构为

$$\bar{g} = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} dy^i \otimes dy^j.$$

而 F 的 Cartan 张量与 Cartan 形式分别为

$$\hat{A} := \frac{F}{4} [F^2]_{y^i y^j y^k} dy^i \otimes dy^j \otimes dy^k, \quad \eta := \text{tr}_{\bar{g}} \hat{A}.$$

单位球面 I_F 作为 V 中的凸超曲面, 具有中心仿射度量 h 、3-形式 $\hat{C}$ 和 Tchebychev 形式 $\hat{T}$ (参见文献 [25, 35, 45]). 李明^[26] 证明了下面的基本结果.

引理 3.1 中心仿射度量 h 由下式给出:

$$h = \dot{g} = i^* \bar{g}, \quad (3.1)$$

3- 形式 $\hat{C}$ 由下式给出:

$$\hat{C} = -i^* \hat{A}, \quad (3.2)$$

Tchebychev 形式为

$$\hat{T} = -\frac{1}{n-1} i^* \eta. \quad (3.3)$$

进一步地, h 的 Riemann 曲率张量为

$$R^h = -\frac{1}{2} h \oslash h - \frac{1}{2} [\hat{C}, \hat{C}], \quad (3.4)$$

其中 $\oslash$ 表示 Kulkarni-Nomizu 乘积.

容易证明 F 是 Euclid 范数当且仅当 I_F 为中心在原点的椭球面, 这也可以由 3- 形式 $\hat{C} = 0$ 刻画. 由 (3.4) 可知, Euclid 范数的单位球面的中心仿射度量具有常截面曲率 1. Laugwitz^[24] 猜测此命题的逆命题也是正确的.

问题 3.1 (Laugwitz 猜测) 如果包含原点在内部的闭凸超曲面的中心仿射度量具有常截面曲率 1, 则此超曲面为椭球面.

这个问题可视为关于 3 维 Euclid 空间中闭曲面的 Liebmann 定理^[13] 的中心仿射微分几何版本. Brickell^[11] 利用分析方法首先对于对称凸体证明了 Laugwitz 猜测. 同时, Schneider^[38] 运用 Blaschke-Santaló 不等式得到了与 Brickell 相同的结论, 这个结论也可参见文献 [9]. Schneider 的结论对于重心在原点的凸体都是正确的. 事实上, 可以利用 Lutwak 的仿射等周不等式^[39] 给出 Schneider 的结果的简单证明 (参见文献 [28]). 但 Laugwitz 猜测目前尚未得到解决.

3 维 Euclid 空间的 Cohn-Vossen 刚性定理^[13] 断言: 两个闭凸曲面之间保持第一基本形式的微分同胚一定是刚体运动. 高维 Euclid 空间的 Cohn-Vossen 刚性定理由 Sacksteder^[36] 证明.

可以类似地考虑下面的中心仿射几何的 Cohn-Vossen 型刚性问题, 该问题包含 Laugwitz 猜测作为特殊情形.

问题 3.2 (Cohn-Vossen 型刚性问题) 给定 n 维线性空间中包含原点在内部的闭凸超曲面 M_i , 设 M_i 的中心仿射度量为 h_i ($i = 1, 2$). 如果 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 为微分同胚并且 $f^* h_2 = h_1$, 则 f 是否为线性映射或者 Legendre 变换?

Schneider^[37] 证明了如下结果, 给出了问题 3.2 的部分回答.

定理 3.1 给定 n 维线性空间中两个包含原点在内部的闭凸超曲面 M_i , 设 M_i 的中心仿射度量和 Tchebychev 形式分别为 h_i 和 $\hat{T}_i$ ($i = 1, 2$). 如果 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 为微分同胚且满足 $f^* h_2 = h_1$ 和 $f^* \hat{T}_2 = \hat{T}_1$, 则 f 必为线性映射.

由经典的 Blaschke-Deicke 定理^[9, 35] 可知, F 是 Euclid 范数也可由 Cartan 形式 $\eta = 0$ 刻画, 这里需要用到单位球面的紧性. Blaschke-Deicke 定理有一系列推广. Wang^[51] 在研究中心仿射超曲面的体积变分时, 引入了中心仿射 Tchebychev 算子 $\mathcal{T} = \nabla^h \hat{T}$. 中心体积泛函的临界点由方程 $\text{tr} \mathcal{T} = 0$ 刻画. Wang^[51] 证明了 $\text{tr} \mathcal{T}$ 为常数的闭凸超曲面为椭球面. 最近 Cheng 等^[12] 进一步证明了 $\hat{\mathcal{T}} := \nabla^h \hat{T} - \frac{h}{n} h = 0$ 的闭凸超曲面为椭球面.

Tchebychev 形式或 Cartan 形式的刚性问题与 L_{-n} -Minkowski 问题的唯一性密切相关^[15].

问题 3.3 给定 n 维线性空间中两个包含原点在内部的闭凸超曲面 M_i , 设 M_i 的 Tchebychev 形式为 $\hat{T}_i$ ($i = 1, 2$). 如果 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 为微分同胚且满足 $f^*\hat{T}_2 = \hat{T}_1$, 则 f 是否必为线性映射?

从上面的讨论可以看出, Minkowski 空间的单位球面的几何并不平凡. 用来区别 Minkowski 空间与 Euclid 空间的几何量自然与 Finsler 度量的非 Riemann 几何量密切相关. 这个观点可以从下面的讨论中得到说明.

4 平行移动及非 Riemann 几何量的刻画

Finsler 流形上的平行移动的概念以 Riemann 几何中的平行移动为特例, 详细的定义和性质可参见文献 [8, 14].

设 (M, F) 为 n 维 Finsler 流形. 令 $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ 为 $\sigma(a) = p$ 到 $\sigma(b) = q$ 的分段光滑曲线. 沿着 σ 的向量场可看成一条曲线 $\hat{\sigma}(t) = (\sigma(t), y(t))$, 其中 $y(t) \in T_{\sigma(t)}M$, $t \in [0, 1]$. 如果 $\hat{\sigma}$ 是如下常微分方程的解:

$$\frac{dy^i}{dt} + \frac{d\sigma^j}{dt} \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(\sigma(t), y(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

并且满足初值条件 $(\sigma(0), y(0)) = (p, y)$, 其中射流系数 G^i 的定义为

$$G^i = \frac{1}{4} g^{ij} ([F^2]_{y^j x^k} y^k - [F^2]_{x^j}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

则称 $\hat{\sigma}$ 为沿着 σ 的平行向量场. 平行移动定义为

$$\begin{aligned} P_{\sigma, t} : T_p M &\rightarrow T_{\sigma(t)} M, \quad \forall t \in [a, b], \\ P_{\sigma, t_0}(y) &:= y(t_0), \quad \forall y \in T_p M \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

其中 $y(t)$ 为沿着 σ 的平行向量场, 并且 $y(0) = y$.

可以证明限制映射 $P_{\sigma, t} : T_p M \setminus \{0\} \rightarrow T_{\sigma(t)} M \setminus \{0\}$ 为保持范数的微分同胚, 而且满足

$$P_{\sigma, t}(\lambda y) = \lambda P_{\sigma, t}(y), \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall y \in T_p M \setminus \{0\}.$$

由此看出, 沿着分段光滑曲线的平行移动, 建立了曲线上各点处 M 的切空间的单位球面之间的微分同胚.

在 Riemann 几何中, 我们熟知的平行移动建立了切空间之间的等距线性映射. 但对于一般的 Finsler 流形, 平行移动是切空间之间的非线性映射. 下面的结果首先由 Ichijyo^[20] 得到, 现在为人们所熟知.

引理 4.1 Finsler 流形为 Berwald 流形当且仅当平行移动是线性的映射, 即射流系数为关于 y 的二次函数.

第 3 节叙述了 Finsler 流形的单位切球丛的纤维的几何结构. 因此可以讨论这些几何结构在沿着曲线平行移动时的变化情形. 球丛纤维上的几何量可以通过球丛的切丛的分解 (2.2) 延拓为球丛上的几何量. 这些几何量通常是 SM 上的垂直协变张量 T , 即 $T \equiv 0 \pmod{\omega^{n+1}, \dots, \omega^{2n-1}}$. 在第 3 节中介绍的球丛纤维上的度量 h 、3- 形式 $\hat{C}$ 和 Tchebychev 形式 $\hat{T}$ 均可自然延拓为球丛上的垂直协变张量. 为简单起见, 仍然用同样的符号记延拓到 SM 的垂直协变张量.

垂直协变张量 T 在沿曲线 σ 的平行移动下保持不变, 如果它满足

$$P_{\sigma,t}^* T_{\sigma(t)} = T_p, \quad \forall t \in [0, 1],$$

其中 $T_x = i_x^* T$ 表示 T 在 $S_x M$ 的限制, 而 $i_x : S_x M \hookrightarrow SM$ 为自然嵌入映射, $\forall x \in M$.

Ichijyō^[21] 证明了 Finsler 流形为 Landsberg 流形当且仅当平行移动保持 h 不变. 这个结果也可参见文献 [8, 14]. 文献 [26] 得到了更一般的结论.

定理 4.1 设 (M, F) 是 n 维 Finsler 流形. 则

- (1) (M, F) 为 Landsberg 流形当且仅当平行移动保持 h 不变;
- (2) (M, F) 为 Berwald 流形当且仅当平行移动保持 $\hat{C}$ 不变;
- (3) (M, F) 满足曲率条件 $\text{tr}P = 0$ 当且仅当平行移动保持 $\hat{T}$ 不变.

结合定理 4.1 和 Schneider 的定理 3.1, 有下列的结果 (参见文献 [26]).

定理 4.2 设 Finsler 流形 (M, F) 为 Landsberg 流形并且满足平均 Chern 曲率 $\text{tr}P = 0$, 则 M 为 Berwald 流形.

特别地, 如果中心仿射几何的 Cohn-Vossen 型刚性问题 3.2 有肯定的回答, 则可知独角兽不存在, 也就解决了独角兽问题.

5 平均 Berwald 曲率和 Berwald 数量曲率

设 (M, F) 为 n 维 Finsler 流形. Berwald 联络也是定义在 $H(SM)$ 上的一种线性联络, 这类联络事实上自然出现在更加广泛的射流几何中, 这方面的讨论可以参考沈忠民的专著 [41]. Berwald 联络与 Chern 联络的关系如下:

$$\nabla^B = \nabla^{\text{Ch}} + J^* L,$$

其中 J^* 是近复结构 J 的对偶. Berwald 联络的曲率的水平 - 垂直微分形式部分 $\tilde{P}$ 称为 Berwald 曲率. 平均 Berwald 曲率或 E - 曲率定义为 $E := \text{tr}\tilde{P}$. 平均 Berwald 曲率为 0 的流形称为弱 Berwald 流形. 用 $\mathcal{WB}$ 记弱 Berwald 流形类.

Shen^[42] 提出下面的问题: 如果一个 Landsberg 度量的 E - 曲率为 0, 则该度量是否为 Berwald 度量? 通过直接计算可得如下引理.

引理 5.1 Chern 曲率为 0 等价于 Berwald 曲率为 0. 但是平均 Chern 曲率为 0 等价于平均 Berwald 曲率与平均 Landsberg 曲率均为 0.

因此对于 Landsberg 流形而言, 平均 Chern 曲率为 0 等价于平均 Berwald 曲率为 0. 定理 4.2 可重新叙述为如下定理.

定理 5.1 设 Finsler 流形 M 为 Landsberg 流形并且满足 $E = 0$, 则 M 为 Berwald 流形.

这样就回答了沈忠民提出的问题. 在沈忠民之前, Bácsó 和 Yoshikawa^[7] 曾经猜测上述结论是不正确的.

E - 曲率的迹 e 称为 Berwald 数量曲率. 文献 [27] 证明了下面的结果.

引理 5.2 如果 Finsler 流形的 Berwald 数量曲率 $e = 0$, 则 E - 曲率为 0.

定理 5.1 可改进为如下的结果.

定理 5.2 设 Finsler 流形 M 为 Landsberg 流形并且 Berwald 数量曲率 $e = 0$, 则 M 为 Berwald 流形.

关于这个结果的另外一种证明可参见文献 [17]. 结合上面的结果, 如果记 $\mathcal{NB}$ 为 Berwald 数量曲率为 0 的流形类, 则可以得到如下的 Finsler 流形类的关系图:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{L} \\
 \subset \qquad \subset \\
 \mathcal{B} = \mathcal{L} \cap \mathcal{NB} \subset \mathcal{WL} \cap \mathcal{NB} \subset \mathcal{WL} \\
 \subset \qquad \parallel \\
 \mathcal{WB} \subset \mathcal{WB} = \mathcal{NB}.
 \end{array} \tag{5.1}$$

弱 Berwald 流形是 Berwald 流形真正的推广, 因为存在非 Berwald 流形的弱 Berwald 流形^[41]. 但是平均 Chern 曲率为 0 是比平均 Berwald 曲率为 0 更强的条件. 所以自然可以考虑下面的问题.

问题 5.1 如果 Finsler 流形的平均 Chern 曲率 $\text{tr}P = 0$, 则该流形是否为 Berwald 流形?

对于下一节将要提到的 (α, β) - 度量, 可证明平均 Chern 曲率 $\text{tr}P = 0$ 蕴涵该度量为 Berwald 度量^[27]. 类似于中心仿射几何的 Cohn-Vossen 型刚性问题和独角兽问题的关系, 关于 Tchebychev 形式的刚性问题的回答也将给出刻画平均 Chern 曲率为 0 的流形的问题 5.1 的回答.

6 (α, β) - 范数与广义 (α, β) - 度量

本节介绍一类特殊的 Minkowski 范数, 称为 (α, β) - 范数, 其单位球面具有一定的对称性. 切空间的 Minkowski 范数均为 (α, β) - 范数的 Finsler 度量通常被称为广义 (α, β) - 度量.

给定线性空间 V 上的一个 Euclid 范数 α 和一个线性函数 β , 记 β 关于 α 的长度为 $b = \|\beta\|_\alpha$. 线性空间 V 上的 (α, β) - 范数可形式定义为

$$F = \alpha\phi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \tag{6.1}$$

其中, $\phi = \phi(s)$ 是一个定义在区间 I 上的光滑正函数, 并且 $[-b, b] \subset I$. F 成为 Minkowski 范数, 需要满足基本张量 g_{ij} 正定的条件, 这个条件由下面的引理刻画.

引理 6.1 ^[14, 43, 53] 当 $n = 2$ 时, 函数 (6.1) 在 V 上定义一个 Minkowski 范数当且仅当

$$(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'' > 0 \tag{6.2}$$

对于任意 $s \in [-b, b]$ 成立.

当 $n \geq 3$ 时, 函数 (6.1) 在 V 上定义一个 Minkowski 范数当且仅当

$$\phi - s\phi' > 0, \quad (\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'' > 0 \tag{6.3}$$

对于任意 $s \in [-b, b]$ 成立. 进一步地, (g_{ij}) 的行列式为

$$\det(g_{ij}) = \phi^{n+1}(\phi - s\phi')^{n-2}[(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'']. \tag{6.4}$$

从上述引理可以看出, (α, β) - 范数的定义中出现的函数 ϕ 对于 g_{ij} 的正定性是关键的. Yu 和 Zhu^[53] 指出 (α, β) - 范数的单位球面在适当的坐标系下成为旋转超曲面.

如果流形 M 上给定一个 Riemann 度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ 和一个 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$, 则 β 关于 α 的长度 $b = \|\beta\|_\alpha$ 成为 M 上的光滑函数. 可以光滑地逐点定义 M 的切空间上的 (α, β) -范数, 由此决定的 M 的 Finsler 度量形式上可以写为

$$F = \alpha \phi\left(x, \frac{\beta}{\alpha}\right). \quad (6.5)$$

对于固定的点 $x \in M$, 我们要求函数 $\phi = \phi(x, s)$ 对于第二个变量的定义域 I_x 满足 $[-b(x), b(x)] \subset I_x$. 如果函数 $\phi = \phi(x, s)$ 逐点满足引理 6.1 的条件, 则 F 定义了一个 Finsler 度量, 该度量在切空间上的限制为 (α, β) -范数. 这样的度量在文献 [53] 中首次出现, 并被称为广义 (α, β) -度量. 因为历史的原因, 只有当函数 $\phi = \phi(s)$ 与流形上的点无关时, F 才被称为 (α, β) -度量. 需要指出的是, 文献 [53] 主要研究了一类具有如下特殊形式的广义 (α, β) -度量的射影几何:

$$F = \alpha \phi\left(b^2, \frac{\beta}{\alpha}\right). \quad (6.6)$$

此类度量可被视为除 (α, β) -度量以外的最简单的广义 (α, β) -度量. 本文采用文献 [53] 中对广义 (α, β) -度量的定义.

1972 年, Matsumoto^[29] 首先定义并研究了 (α, β) -度量. Matsumoto 将可表示为 $F = L(\alpha, \beta)$ 的 Finsler 度量称为 (α, β) -度量, 其中, α 为 Riemann 度量, β 是 1-形式, L 是光滑的二元函数且关于每个变量具有 1 次齐次性. Matsumoto^[30] 给出了截至当时关于 (α, β) -度量的研究工作的一个总结.

本文所给出的 (α, β) -度量的定义与 Matsumoto 的定义是等价的, 这种定义首次出现在 Chern 和 Shen 2005 年的著作 [14] 中. Chern 和 Shen^[14] 首次明确区分了线性空间上的 (α, β) -范数和流形上的 (α, β) -度量. 这种新的定义方式显然更加简洁, 也因此能将计算软件 Maple 应用于 (α, β) -度量的研究. 独角兽问题的研究也因此在 (α, β) -度量方面取得了大量的成果.

2006 年, Asanov^[3,4] 首先构造出了非正则的 Landsberg 度量, 但这些度量不是 Berwald 度量. Asanov 构造的例子形式上是 (α, β) -度量, 但不是定义在整个切丛上的. 几乎与 Asanov 的工作同时, Shen^[43] 解决了当维数 $n \geq 3$ 时关于 (α, β) -度量的独角兽问题.

定理 6.1 设 (M, F) 是维数 $n \geq 3$ 的 Finsler 流形. 如果 $F = \alpha \phi(\beta/\alpha)$ 是 (α, β) -度量, 则 F 是 Landsberg 度量当且仅当 β 关于 α 平行, 此时 F 是 Berwald 度量.

Shen^[43] 首先在自然坐标系下系统计算了 (α, β) -度量的射流系数和 Landsberg 曲率. 通过求解一些复杂的方程以及对 Landsberg 曲率为 0 的条件的简化, 他事实上给出了维数 $n \geq 3$ 的 Landsberg 曲率为 0 的几乎正则 (α, β) -度量的分类, 并且重新构造出了 Asanov 的例子.

近十余年来, 很多学者沿用沈忠民的方法, 在关于独角兽问题的研究方面取得了丰富的成果. Tayebi^[48] 对独角兽问题在广义 (α, β) -度量方面的进展作了系统总结, 这里不再赘述.

广义 (α, β) -度量的一个最近的研究进展是文献 [18], 其中采用了与 Shen^[43] 不同的方法, 即通过直接讨论 (α, β) -范数单位球的刚性, 再应用定理 4.1, 也得到了相应的结论.

在文献 [18] 中, 作者首先计算 (α, β) -范数的 Cartan 张量所满足的一个代数方程.

引理 6.2 设 V 是 n ($n \geq 3$) 维线性空间. F 是 V 上的一个 (α, β) -范数. F 的 Cartan 张量由下式给出:

$$A_{ijk} = v(h_{ij}Y_k + h_{jk}Y_i + h_{ki}Y_j) + \frac{u - (n+1)v}{\|Y^\sharp\|^2} Y_i Y_j Y_k, \quad (6.7)$$

其中 u 、 v 和 $Y^\sharp$ 的定义如下:

$$Y^\sharp := Y_i dy^i := (b_i - s\alpha_{y^i}) dy^i, \quad v := \frac{\phi}{2} \{\log[\phi(\phi - s\phi')]\}' ,$$

$$u := \frac{\phi}{2} \{\log[\phi^{n+1}(\phi - s\phi')^{n-2}[(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'']]\}' ,$$

这里 $\alpha_{y^i} = |y|^{-1} \delta_{ij} y^j$.

这个结果也以其他的形式出现在文献 [2, 3, 29, 32] 中.

如果在 $v \neq 0$ 的集合上, 令 $n + q - 1 := uv^{-1}$, 则 Cartan 张量可以表示为

$$A_{ijk} = \frac{1}{n + q - 1} \left(h_{ij} A_k + h_{jk} A_i + h_{ki} A_j + \frac{q - 2}{\|\eta\|^2} A_i A_j A_k \right). \quad (6.8)$$

称 $q = 1 - n + uv^{-1}$ 为 (α, β) -范数 (6.1) 的特征函数. 特征函数 $q = 2$ 正好刻画了单位球面为椭球面的 (α, β) -范数, 即 Randers 范数. 这个结果的证明可通过仿射微分几何的方法得到 (参见文献 [45]). 在研究关于 n ($n \geq 4$) 维线性空间上的 (α, β) -范数单位球面的部分刚性定理时, 文献 [18] 只证明了如下在满足 $q = 1$ 的集合上的刚性结果.

定理 6.2 设 (V, F) 和 $(\tilde{V}, \tilde{F})$ 是两个 n ($n \geq 4$) 维线性空间, F 和 $\tilde{F}$ 分别是 V 和 $\tilde{V}$ 上的 (α, β) -范数. 设 $f: I_F \rightarrow I_{\tilde{F}}$ 是单位球面之间的微分同胚, 并且 f 保持单位球面上的中心仿射度量.

(i) 在集合 $v \neq 0$ 上, $q = 1$ 当且仅当 $f^* \tilde{q} = 1$. 因此可以定义

$$Q := \{y \in I_F \mid v(y) \neq 0, q(y) = 1\} = \{y \in I_F \mid f^* \tilde{v} \neq 0, (f^* \tilde{q})(y) = 1\}.$$

(ii) $Q^c = I_F \setminus Q \neq \emptyset$ 为开集. 在 Q^c 上 $\hat{C} = \pm f^* \tilde{C}$. 因此在 Q^c 上 f 为线性变换或 Legendre 变换.

我们并未完全解决 (α, β) -范数单位球情形的 Cohn-Vossen 型刚性问题 3.2. 但根据这个结果, 可以将具有广义 (α, β) -度量的 Landsberg 流形 M 在任意点 $x \in M$ 处的切空间按定理 6.2 的结论分成两个部分 $T_x M = CQ_x \cup CQ_x^c$, 其中 CQ_x 和 CQ_x^c 分别是 Q_x 和 Q_x^c 定义的锥. 定义 $CQ = \bigcup_x CQ_x$, 则切丛可分解为 $TM = CQ \cup CQ^c$. 根据定理 4.1 和 6.2 可知平行移动限制在 CQ^c 上为线性映射. 这等价于在开集 CQ^c 上, 射流系数 (4.2) 沿着纤维方向是二次函数. 方程 $q = 1$ 事实上是关于 ϕ 的常微分方程 $u = nv$. 该方程的非平凡解可表示为

$$\phi = c_2 \exp \int \frac{(1 - c_0)c_1 s + \sqrt{1 - s^2}}{c_0 c_1 + s((1 - c_0)c_1 s + \sqrt{1 - s^2})} ds, \quad (6.9)$$

其中 $c_0 > 0$ 、 $c_1 \neq 0$ 和 $c_2 > 0$ 为常数. 函数 (6.9) 在其定义域上为实解析函数. 因为射流系数由度量的直到 2 阶导数决定, 所以在 CQ 上射流系数 (4.2) 沿着纤维是解析的. 根据解析延拓的唯一性可知射流系数在整个切丛上沿着纤维方向是二次的. 因此 M 是 Berwald 流形. 这样就得到了下面的结果.

定理 6.3 设 M 为光滑流形且维数 $n \geq 4$. 设 F 是定义在切丛 TM 上的广义 (α, β) -度量. 如果 F 是 Landsberg 度量, 则 F 是 Berwald 度量.

根据定理 6.3 可知, 4 维及以上的广义 (α, β) -度量类中不存在独角兽. 但是在 2 维和 3 维情形下, 广义 (α, β) -度量类中是否存在独角兽尚未知晓. 文献 [55] 中包含了 3 维情形关于形如 (6.6) 的广义 (α, β) -度量的结果.

在独角兽问题的研究中, 特征函数 $q = 1$ 的情形起着关键作用. 事实上 Asanov^[3, 4] 和 Shen^[43] 构造的非正则独角兽所用的函数正是 (6.9). 这类函数所定义的 (α, β) -范数的单位球面的几何性质需深入研究.

参考文献

- 1 Aikou T. Some remarks on Berwald manifolds and Landsberg manifolds. *Acta Math Acad Paedagog Nyházi (NS)*, 2010, 26: 139–148
- 2 Antonelli P L, Ingarden R S, Matsumoto M. *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*. Dordrecht: Springer, 1993
- 3 Asanov G S. Finsleroid-Finsler spaces of positive-definite and relativistic types. *Rep Math Phys*, 2006, 58: 275–300
- 4 Asanov G S. Finsleroid-Finsler space and geodesic spray coefficients. *Publ Math Debrecen*, 2007, 71: 397–412
- 5 Bácsó S, Ilosvay F, Kis B. Landsberg spaces with common geodesics. *Publ Math Debrecen*, 1993, 42: 139–144
- 6 Bácsó S, Matsumoto M. Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces. *Publ Math Debrecen*, 1996, 48: 357–366
- 7 Bácsó S, Yoshikawa R. Weakly-Berwald spaces. *Publ Math Debrecen*, 2002, 61: 219–231
- 8 Bao D. On two curvature-driven problems in Riemann-Finsler geometry. In: *Finsler Geometry, Sapporo 2005—In Memory of Makoto Matsumoto*. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 48. Tokyo: Math Soc Japan, 2007, 19–71
- 9 Bao D, Chern S-S, Shen Z. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 200. New York: Springer, 2000
- 10 Bismut J-M, Zhang W. An Extension of a Theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, vol. 205. Paris: Soc Math France, 1992
- 11 Brickell F. A theorem on homogeneous functions. *J Lond Math Soc (2)*, 1967, s1-42: 325–329
- 12 Cheng X, Hu Z, Vrancken L. Every centroaffine Tchebychev hyperovaloid is ellipsoid. *Pacific J Math*, 2021, 315: 27–44
- 13 Chern S-S, Chen W H, Lam K S. *Lectures on Differential Geometry*. Singapore: World Sci Publ, 1999
- 14 Chern S-S, Shen Z. *Riemann-Finsler Geometry*. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 6. Singapore: World Sci Publ, 2005
- 15 Chou K S, Wang X J. The L_p -Minkowski problem and the Minkowski problem in centroaffine geometry. *Adv Math*, 2006, 205: 33–83
- 16 Crampin M. On Landsberg spaces and the Landsberg-Berwald problem. *Houston J Math*, 2011, 37: 1103–1124
- 17 Crampin M. A condition for a Landsberg space to be Berwaldian. *Publ Math Debrecen*, 2018, 93: 143–155
- 18 Feng H, Han Y, Li M. An equivalence theorem of a class of Minkowski norms and its applications. *Sci China Math*, 2021, 64: 1429–1446
- 19 Feng H, Li M. Adiabatic limit and connections in Finsler geometry. *Comm Anal Geom*, 2013, 21: 607–624
- 20 Ichijyō Y. Finsler manifolds modeled on a Minkowski space. *Kyoto J Math*, 1976, 16: 639–652
- 21 Ichijyō Y. On special Finsler connections with the vanishing hv-curvature tensor. *Tensor (NS)*, 1978, 32: 149–155
- 22 Laugwitz D. Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finsler-Räume. *Math Z*, 1957, 67: 63–74
- 23 Laugwitz D. Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie. *Publ Math Debrecen*, 1957, 5: 72–76
- 24 Laugwitz D. *Differentialgeometrie in Vektorräumen*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1965
- 25 Li A, Simon U, Zhao G. *Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces*. Berlin-New York: De Gruyter, 1993
- 26 Li M. On equivalence theorems of Minkowski spaces and applications in Finsler geometry (in Chinese). *Acta Math Sinica (Chin Ser)*, 2019, 62: 177–190 [李明. Minkowski 空间的等价性定理及在 Finsler 几何的应用. *数学学报*, 2019, 62: 177–190]
- 27 Li M, Zhang L. Properties of Berwald scalar curvature. *Front Math China*, 2020, 15: 1143–1153
- 28 Li M, Zuo Y. Two types of closed convex hypersurfaces with constant cross-sectional curvature for the central affine metric (in Chinese). *J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed)*, 2023, 48: 31–38 [李明, 左莹. 中心仿射度量的两类具有常截面曲率的闭凸超曲面. *西南师范大学学报 (自然科学版)*, 2023, 48: 31–38]
- 29 Matsumoto M. On C -reducible Finsler spaces. *Tensor (NS)*, 1972, 24: 29–37
- 30 Matsumoto M. Theory of Finsler spaces with (α, β) -metric. *Rep Math Phys*, 1992, 31: 43–83
- 31 Matsumoto M. Remarks on Berwald and Landsberg spaces. *Contemp Math*, 1996, 196: 79–82
- 32 Matsumoto M, Shibata C. On semi- C -reducibility, T -tensor = 0 and S_4 -likeness of Finsler spaces. *Kyoto J Math*, 1979, 19: 301–314
- 33 Matveev V S. On “All regular Landsberg metrics are always Berwald” by Z. I. Szabó. *Balkan J Geom Appl*, 2009, 14: 50–52
- 34 Muzsnay Z. The Euler-Lagrange PDE and Finsler metrizability. *Houston J Math*, 2006, 32: 79–98
- 35 Nomizu K, Sasaki T. *Affine Differential Geometry*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1994
- 36 Sacksteder R. The rigidity of hypersurfaces. *J Math Mech*, 1962, 11: 929–939

- 37 Schneider R. Zur affinen Differentialgeometrie im Großen. I. Math Z, 1967, 101: 375–406
- 38 Schneider R. Über die Finslerräume mit $S_{ijkl} = 0$. Arch Math (Basel), 1968, 19: 656–658
- 39 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2014
- 40 Shen Y, Shen Z. Introduction to Modern Finsler Geometry. Singapore: World Sci Publ, 2016
- 41 Shen Z. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces. Dordrecht: Springer, 2001
- 42 Shen Z. Landsberg curvature, S-curvature and Riemann curvature. In: A Sampler of Riemann-Finsler Geometry. Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 50. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2004, 303–355
- 43 Shen Z. On a class of Landsberg metrics in Finsler geometry. Canad J Math, 2009, 61: 1357–1374
- 44 Shen Z. Some open problems in Finsler geometry. <https://math.iupui.edu/~zshen/Research/papers/Problem.pdf>, 2009
- 45 Simon U, Schwenk-Schellschmidt A, Viesel H. Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. Tokyo: Sci Univ Tokyo, 1991
- 46 Szabó Z I. All regular Landsberg metrics are Berwald. Ann Global Anal Geom, 2008, 34: 381–386
- 47 Szabó Z I. Correction to “All regular Landsberg metrics are Berwald”. Ann Global Anal Geom, 2009, 35: 227–230
- 48 Tayebi A. A survey on unicorns in Finsler geometry. AUT J Math Comput, 2021, 2: 239–250
- 49 Torromé R G. On the Berwald-Landsberg problem. arXiv:1110.5680v4, 2014
- 50 Von Varga O. Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes. Abh Math Semin Univ Hambg, 1955, 20: 41–51
- 51 Wang C. Centroaffine minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. Geom Dedicata, 1994, 51: 63–74
- 52 Xu M, Matveev V S. Proof of Laugwitz conjecture and Landsberg unicorn conjecture for Minkowski norms with $SO(k) \times SO(n-k)$ -symmetry. Canad J Math, 2022, 74: 1486–1516
- 53 Yu C, Zhu H. On a new class of Finsler metrics. Differential Geom Appl, 2011, 29: 244–254
- 54 Zhang W. Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 4. Singapore: World Sci Publ, 2001
- 55 Zhou S, Wang J, Li B. On a class of almost regular Landsberg metrics. Sci China Math, 2019, 62: 935–960
- 56 Zohrehvand M, Maleki H. On general (α, β) -metrics of Landsberg type. Int J Geom Methods Mod Phys, 2016, 13: 1650085
- 57 Zou Y, Cheng X. The generalized unicorn problem on (α, β) -metrics. J Math Anal Appl, 2014, 414: 574–589

The unicorn problem in Riemann-Finsler geometry

Huitao Feng & Ming Li

Abstract In this paper, a short survey of the unicorn problem in Finsler geometry is presented. Some research strategies for the unicorn problem are discussed. Recent major progress towards the unicorn problem is introduced, including Shen’s achievement on (α, β) -metrics and our research results from the viewpoint of affine differential geometry.

Keywords Landsberg manifold, Berwald manifold, unicorn problem, (α, β) -metric, centro-affine metric

MSC(2020) 53C60, 53C24, 53A15, 53C40

doi: 10.1360/SSM-2023-0160