



一种积分形式的湍流边界层壁面热流预测方法

康泽宇¹, 孟响¹, 李栋^{1,2*}, 张凯^{1,2}

1. 北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081;

2. 北京理工大学唐山研究院, 唐山 063000

*联系人, E-mail: bitld@bit.edu.cn

收稿日期: 2024-05-09; 接受日期: 2024-08-02; 网络出版日期: 2024-10-14

国家自然科学基金(编号: 52176149)和河北省自然科学基金(编号: A2024105014)资助项目

摘要 本文基于雷诺平均能量方程提出了一种积分形式的湍流边界层壁面热流预测方法, 该方法仅提供一个流向位置处的平均温度和法向热流密度剖面. 此外, 采用本方法预测壁面热流只需要远离壁面区域的平均流场分布, 而不需要整个边界层内的流场数据. 通过研究积分上下限对壁面热流预测模型精度的影响, 发现积分上限和积分下限对模型相对误差的影响较小. 经文献中大量的直接数值模拟和实验测量数据验证, 该方法的相对误差在 $\pm 4\%$ 以内. 本文提出的壁面热流预测模型适用于不可压缩零压力梯度湍流边界层, 具有精度高、鲁棒性强等优点.

关键词 壁面热流, 湍流边界层, 预测模型, 直接数值模拟, 实验测量

PACS: 47.27.E-, 47.27.nb, 44.20.+b

1 引言

湍流边界层传热现象广泛存在于自然界与工业领域. 例如, 地热系统中高温岩石与流体之间的对流换热^[1]、高速导弹和航空航天发动机的热防护^[2-6]、核反应堆堆芯冷却^[7]以及变压器散热问题^[8]等. 壁面热流 q_w 可以用摩擦温度来表示, 即 $\Theta_\tau = q_w / (\rho c_p u_\tau)$ (其中 ρ 为流体密度, c_p 为流体定压比热, u_τ 为摩擦速度). 一方面, 摩擦温度是湍流边界层传热理论研究的关键参数之一^[9,10]. 另一方面, 壁面热流反映了壁面附近的传热功率, 是设备加热、机械冷却、极端环境热防护等工程

设计和优化需要关注的重要参数. 因此, 准确预测湍流边界层壁面热流具有重要的科学意义和工程价值.

Child等人^[11]和Moreira等人^[12]对壁面热流的实验测量方法进行了总结, 包括热学测量方法^[13-16]、光学测量方法^[17,18]和电学测量方法^[19,20]等. 研究人员一般采用这些方法得到温度或者质量, 进而通过反演法、类比法等得到壁面热流. 其中, 反演法^[21-23]采用测量得到的温度场, 通过对传热反问题的求解获得壁面热流. 类比法^[24]将能量输运与质量、动量输运类比, 从而得到壁面热流. 然而, 上述方法都存在各自的局限性. 反演法的应用场景非常有限, 类比法中类比形式

引用格式: 康泽宇, 孟响, 李栋, 等. 一种积分形式的湍流边界层壁面热流预测方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 124713
Kang Z Y, Meng X, Li D, et al. An integral method for estimating wall heat flux in spatially developing turbulent boundary layers (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2024, 54: 124713, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0172

的选取对预测结果准确性影响较大. 此外, 壁面热流也可以通过傅里叶定律 $q_w = -k \partial T / \partial y|_{y=0}$ 直接计算得到 (k 为流体导热系数, y 为壁面法向坐标), 该方法需要壁面附近黏性底层中的温度分布^[25]. 黏性底层的厚度一般较薄, 由于实验测量系统空间分辨率的限制, 通常难以准确测量近壁面的温度分布, 甚至壁面位置也很难精确定^[26].

一些研究人员采用积分方法预测湍流边界层的壁面热流. Lee 等人^[27]借鉴了 Fukagata 等人^[28]提出的不可压缩湍流边界层壁面摩擦阻力预测方法, 将雷诺平均能量方程沿法向从壁面到边界层边缘进行三次积分, 得到湍流边界层壁面热流的预测模型. 然而, 该模型中的流向梯度项难以准确测量. 此外, 实验测量区域一般无法完全覆盖整个边界层. 为此 Ebadi 等人^[29]对上述预测模型进行了改进. 通过用总热流密度的法向梯度替换流向梯度项, 避免了对流场中多个流向位置处的测量; 通过调整方程的积分上限, 降低了模型预测所需的数据量. 然而采用 Ebadi 等人^[29]的改进模型预测壁面热流时需要近壁面的实验测量数据, 但受到测量系统空间分辨率的限制, 近壁面数据往往难以准确获得. 此外, 总热流密度的实验测量精度较低, 进而严重影响总热流密度法向梯度计算结果的准确性. 最近一些研究人员提出了可压缩湍流槽道流^[30,31]和可压缩湍流边界层^[32,33]的壁面热流预测方法.

基于不可压缩湍流边界层直接数值模拟数据库, 本文提出了一种高精度的总热流密度模型, 进而对 Ebadi 等人^[29]的壁面热流模型进行了改进. 通过改变积分方程的积分上下限, 显著降低了壁面热流预测模型对近壁面数据的依赖性. 大量实验测量数据和数值模拟结果验证了本文提出的湍流边界层壁面热流模型的精度和有效性.

2 数学公式

本文以不可压缩、零压力梯度平板湍流边界层为研究对象, 假设平板壁面温度恒定. 基于边界层厚度 δ 和自由来流速度 U_∞ , 无量纲的雷诺平均能量方程表示为:

$$I_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Re_\delta Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \overline{v' \Theta'} \right), \quad (1)$$

其中, $Re_\delta = U_\infty \delta / \nu$ 表示边界层厚度雷诺数, ν 为流体运动黏度; $Pr = \rho \nu c_p / k$ 表示普朗特数; I_x 表示为:

$$I_x = \overline{u} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{1}{Re_\delta Pr} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{u' \Theta'}}{\partial x}, \quad (2)$$

其中 x 为流向坐标, $\overline{u}$ 为流向平均速度, $\overline{v}$ 为法向平均速度, $\overline{u' \Theta'}$ 为流向热流密度, $\overline{v' \Theta'}$ 为法向热流密度; 无量纲温度表示为 $\Theta = (T - T_w) / (T_\infty - T_w)$, 其中 T 为流场温度, T_w 为壁面温度, T_∞ 为自由来流温度. 本文上标“+”表示采用壁面单位无量纲的物理量, 即以摩擦速度 u_τ 作为特征速度, 以黏性长度尺度 ν / u_τ 作为特征长度.

一些研究人员借鉴了 Fukagata 等人^[28]对壁面摩擦阻力分解的思想, 通过对式(1)沿壁面法向方向从壁面到热边界层边缘进行三次积分, 即 $\int_0^{\delta_t} \int_0^y \int_0^{y_2} f(y_1) dy_1 dy_2 dy$, 得到了湍流边界层壁面热流的分解式^[27,34]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t^2}{2} St = & \frac{1}{Re_\delta Pr} \int_0^{\delta_t} \Theta dy + \int_0^{\delta_t} (\delta_t - y) (-\overline{v' \Theta'}) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\delta_t} (\delta_t - y)^2 I_x dy, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 δ_t 表示热边界层厚度, 斯坦顿数 St 定义为:

$$St = \frac{h}{\rho c_p U_\infty} = \frac{q_w}{\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)}, \quad (4)$$

其中, h 为对流传热系数. 式(3)表明, 不可压缩湍流边界层的壁面热流可以分解为三部分, 分别是层流项、湍流项和非均匀项. 层流项(右端第一项)是平均温度剖面的积分, 表示分子传热部分的贡献; 湍流项(右端第二项)是法向热流密度的加权积分, 表示湍流传热部分的贡献; 非均匀项(右端第三项)是 I_x 的加权积分, 表示流动沿流向的非均匀性所产生的贡献. 对于湍流槽道流, 非均匀项为零.

由于式(3)中的 I_x 含有流向梯度项和法向速度, 通常实验难以准确获得. 此外, 实验测量区域也很难覆盖整个边界层. 考虑到总热流密度 q 的定义:

$$q = \frac{1}{Re_\delta Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \overline{v' \Theta'}, \quad (5)$$

因而数学上, $I_x = \partial q / \partial y$. Ebadi 等人^[29]通过将式(1)沿法向从壁面到任意高度 β 进行三次积分, 并用 $\partial q / \partial y$ 替换 I_x , 对壁面热流分解公式(3)进行了改进, 得到以下式子:

$$\frac{\beta^2}{2}St = \frac{1}{Re_\delta Pr} \int_0^\beta \bar{\Theta} dy + \int_0^\beta (\beta-y) (-\overline{v'\Theta'}) dy - \frac{1}{2} \int_0^\beta (\beta-y)^2 \frac{\partial q}{\partial y} dy. \quad (6)$$

由于实验测量系统的空间分辨率限制, 湍流边界层近壁面的测量数据精度较低, 这种情况在高雷诺数和高普朗特数条件下更为明显. 这是由于小尺度湍流随着雷诺数的提高逐渐降低. 因此, 本文基于Ebadi等人^[29]提出的积分方程, 通过改变积分下限, 沿壁面法向方向从任意下限 α 到任意上限 β 进行三次积分, 得到以下积分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} St = & \frac{1}{Re_\delta Pr} \int_\alpha^\beta \bar{\Theta} dy + \int_\alpha^\beta (\beta-y) (-\overline{v'\Theta'}) dy \\ & - \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (\beta-y)^2 \frac{\partial q}{\partial y} dy \\ & + (\beta-\alpha) \int_0^\alpha (-\overline{v'\Theta'}) dy \\ & - \frac{\beta-\alpha}{2} \int_0^\alpha (\beta+\alpha-2y) \frac{\partial q}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (7)$$

考虑到实验测量难以获得准确的总热流密度, 为了减小壁面热流预测误差, 有必要提出高精度的总热流密度模型. 最近, Chen等人^[35]提出了零压力梯度湍流边界层的壁面总切应力模型 $\tau^+ = 1 - (y/\delta)^{3/2}$, 其中 $\tau^+ = \tau/\tau_w$. 对于本文研究的不可压缩、零压力梯度等温壁面湍流边界层, 其流向速度和温度沿法向分布存在相似性^[36]. 此外, 大量研究结果表明, 近壁面的雷诺剪切应力与法向热流密度沿法向的分布曲线也呈现出高度相似性^[36-38]. 因此, 湍流边界层总切应力与总热流密度沿法向分布具有相似性. 据此本文提出的总热流密度模型如下:

$$q^+ = 1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{3/2}, \quad (8)$$

其中, $q^+ = q/q_w$. 为了验证该模型的准确性, 图1将不同雷诺数和普朗特数下的零压力梯度平板湍流边界层直接数值模拟(DNS)数据与总热流密度模型计算结果进行对比. 整体而言, 模型计算结果与直接数值模拟结果在湍流边界层近壁面较吻合. 尤其是随着雷诺数的增加, 总热流密度模型的误差显著降低. 例如, 在 $y/\delta=0.4$ 处, 当雷诺数较低时($Re_\delta=1100$), 模型与实际偏差为5.9%; 而 $Re_\delta=2900$ 时, 模型与实际偏差不到2%. 这说明该模型可以准确地预测湍流边界层总热流密度.

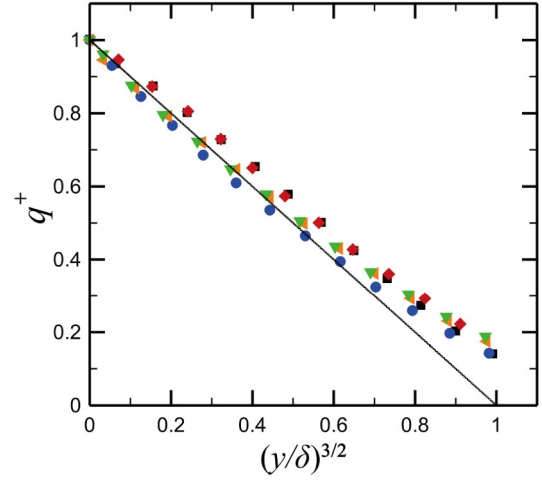


图1 (网络版彩图)不同雷诺数和普朗特数下总热流密度沿法向的分布, 图中采用Li等人^[37]在 $Re_\delta=1100$, $Pr=0.71$ (方形), $Re_\delta=1410$, $Pr=0.71$ (菱形)处; Wu等人^[39]在 $Re_\delta=1750$, $Pr=1$ (圆形), $Re_\delta=2540$, $Pr=1$ (左三角形), $Re_\delta=2900$, $Pr=1$ (下三角形)处的直接数值模拟数据. 直线表示总热流密度模型 $q^+ = 1 - (y/\delta)^{3/2}$.

Figure 1 (Color online) Wall-normal profiles of the total heat flux at different Reynolds numbers and Prandtl numbers. The DNS data are from Li et al. [37] at $Re_\delta=1100$, $Pr=0.71$ (square), $Re_\delta=1410$, $Pr=0.71$ (diamond); and Wu et al. [39] at $Re_\delta=1750$, $Pr=1$ (circle), $Re_\delta=2540$, $Pr=1$ (left triangle), $Re_\delta=2900$, $Pr=1$ (down triangle). The solid lines show the model for the total heat flux, $q^+ = 1 - (y/\delta)^{3/2}$.

将总热流密度模型代入式(7), 得到基于三次积分的壁面热流预测方程:

$$C_3 St = \frac{1}{Re_\delta Pr} \int_\alpha^\beta \bar{\Theta} dy + \int_\alpha^\beta (\beta-y) (-\overline{v'\Theta'}) dy - \frac{\beta-\alpha}{Re_\delta Pr} \bar{\Theta}_{y=\alpha}, \quad (9)$$

其中, 系数 C_3 为:

$$C_3 = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 + \frac{2}{5}\alpha^{5/2}(\beta-\alpha) - \frac{4}{35}(\beta^{7/2} - \alpha^{7/2}). \quad (10)$$

类似地, 对式(1)沿壁面法向方向从任意下限 α 到任意上限 β 进行二次积分, 即 $\int_\alpha^\beta \int_0^y f(v_1) dv_1 dy$, 用总热流密度梯度 $\partial q / \partial y$ 替换 T_x , 并将提出的总热流密度模型(8)代入二次积分方程中, 得到基于二次积分的壁面热流预测方程:

$$C_2 St = \frac{1}{Re_\delta Pr} (\bar{\Theta}_{y=\beta} - \bar{\Theta}_{y=\alpha}) + \int_\alpha^\beta (-\overline{v'\Theta'}) dy, \quad (11)$$

其中, 系数 C_2 为:

$$C_2 = (\beta-\alpha) - \frac{2}{5}(\beta^{5/2} - \alpha^{5/2}). \quad (12)$$

为了评估本文提出的湍流边界层壁面热流预测模型的精度, 定义壁面热流预测的相对误差为:

$$\varepsilon(\%) = \frac{St_p - St_t}{St_t} \times 100, \quad (13)$$

其中 St_p 表示壁面热流预测结果, St_t 表示壁面热流真实值.

3 模型参数影响

本文提出了基于三次积分的壁面热流预测方程(9)和基于二次积分的壁面热流预测方程(11). 这两个积分模型都与积分下限 α 和积分上限 β 有关. 此外, 积分区间内的数据点个数对模型预测误差也会产生影响. 本节研究了积分上下限、积分次数和积分区间数据量对湍流边界层壁面热流预测模型的影响, 并给出了这些模型参数的取值范围. 需要指出的是, 本文采用的直接数值模拟和实验数据均来自零压力梯度平板湍流边界层流动.

3.1 积分上下限影响

由于当前实验测量技术分辨率的限制, 湍流边界层近壁面数据往往难以准确获得, 并且实验测量区域往往不能覆盖整个边界层, 因此我们需要研究积分上下限对壁面热流预测的影响.

图2采用Wu等人^[39]的直接数值模拟数据展示了壁面热流积分恒等式(6)中各项随积分上限 β 的变化规律. 如图2所示, 层流项、湍流项和非均匀项在整个边界层范围内的变化依赖于积分上限. 在黏性底层区域, $y^+ \leq 5$, 层流项的作用占主导. 随着法向距离的增加, 层流项对壁面热流的贡献逐渐降低, 而湍流项的贡献逐渐增大. 在边界层缓冲区和部分对数区中, $5 \leq y^+ \leq 100$, 层流项与湍流项彼此平衡, 而非均匀项几乎为零. 在 $y/\delta > 0.1$ 的区域, 非均匀项逐渐增大, 湍流项的作用仍占主导地位, 但层流项的贡献不能忽略.

采用Li等人^[37] $Re_\theta=1840$, $Pr=0.71$ 的直接数值模拟数据, 图3比较了基于二次积分和三次积分得到的壁面热流预测模型的相对误差. 在 $0 \leq \alpha^+ \leq 100$ 整个范围内, 基于本文提出的壁面热流模型受积分下限的影响较小. 当积分下限 α^+ 固定时, 相对误差随着积分上限 β/δ 的增加缓慢提高. 对比图3(a)和图3(b), 可以明显看到, 基于三次积分的壁面热流预测模型的精度显著高于采用二

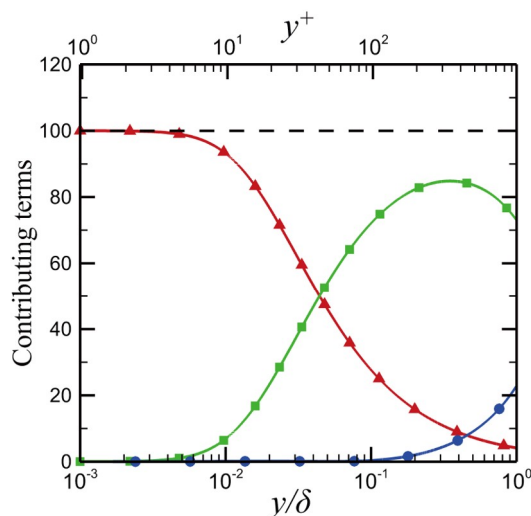


图2 (网络版彩图)壁面热流积分恒等式(6)中层流项(三角形)、湍流项(方形)、非均匀项(圆形)所占比重沿法向的分布规律. 虚线表示三项之和. 图中采用Wu等人^[39]在 $Re_\theta=2900$, $Pr=1$ 处的直接数值模拟数据

Figure 2 (Color online) Contributions of the laminar term (triangle), the turbulent term (square), and the inhomogeneous term (circle) in the right hand side of Eq. (6) plotted as a function of wall-normal position. The sum of the three terms is indicated by the dashed line. The DNS data are from Wu et al. [39] at $Re_\theta=2900$, $Pr=1$.

次积分的壁面热流模型.

为了进一步研究积分上限对壁面热流预测的影响, 图4显示了不同雷诺数和普朗特数情况下壁面热流预测模型的相对误差随积分上限 β/δ 的变化曲线. 图中的壁面热流预测采用基于三次积分的预测公式(9), 且积分下限固定为 $\alpha=0$. 采用的直接数值模拟数据库以及相应的动量厚度雷诺数和普朗特数详见表1. 由图可知, 当积分上限 $\beta/\delta \leq 0.4$ 时, 湍流边界层壁面热流预测的相对误差 ε 保持在 $\pm 2\%$ 以内. 因此, 本文提出的壁面热流预测方法对积分上限的变化不敏感. 当实验测量范围无法覆盖整个边界层时, 该方法仍然可以准确地预测壁面热流.

与积分上限影响规律不同, 积分下限对壁面热流预测有着显著的影响. 图5给出了壁面热流预测的相对误差随积分下限 α^+ 的变化曲线. 壁面热流预测仍然采用式(9), 积分上限固定为 $\beta/\delta=0.4$. 整体而言, 相对误差随着积分下限的提高逐渐增大, 与预期一致. 这是由于壁面热流 q_w 作为一个壁面量, 显然与近壁面的统计量密切相关. 当积分下限提高时, 必然会影响其预测精度. 由于当前测量仪器分辨率的限制, 实验获得的

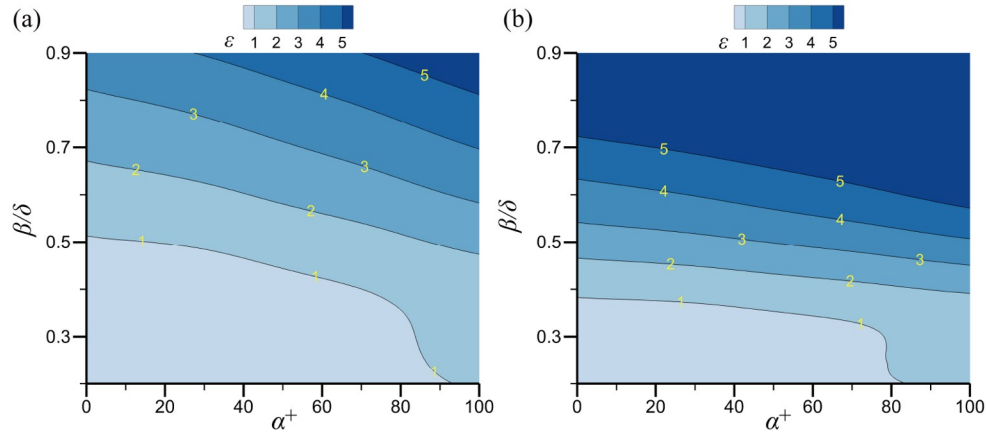


图 3 (网络版彩图)壁面热流预测模型相对误差云图的比较: (a) 基于三次积分预测模型(9); (b) 基于二次积分预测模型(11). 采用Li等人^[37]在 $Re_\theta=1840$, $Pr=0.71$ 处的直接数值模拟数据

Figure 3 (Color online) Comparison of the contour plots of the relative error in wall heat flux between the model using Eq. (9) in (a) and that using Eq. (11) in (b). The DNS data are from Li et al. [37] at $Re_\theta=1840$, $Pr=0.71$.

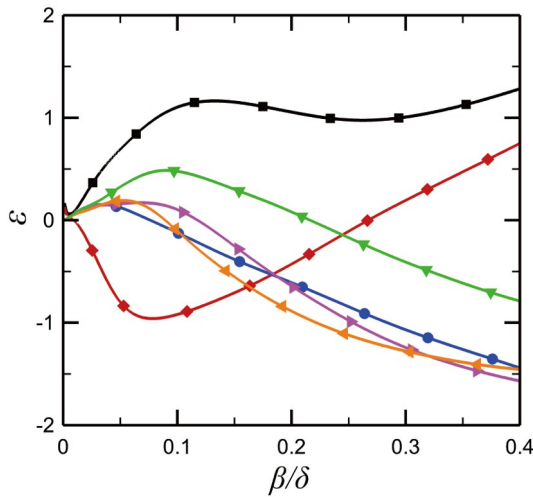


图 4 (网络版彩图)壁面热流预测模型的相对误差随积分上限的变化曲线. 符号含义见表 1

Figure 4 (Color online) Relative error in wall heat flux as a function of the upper limit of integration. Symbols are defined in Table 1.

近壁面数据不够准确. Vallikivi等人^[40]指出, 对于高雷诺数湍流边界层, 近壁面 $y^+ \leq 100$ 的实验数据几乎不可靠. 因而我们希望提高壁面热流预测模型的积分下限, 以降低对近壁面数据的依赖性. 如图5所示, 在不同雷诺数和普朗特数下, 当积分下限 $\alpha^+ \leq 100$ 时, 壁面热流预测的相对误差始终保持在4%以内.

结合图4和5, 本文提出的壁面热流预测模型(9)的积分下限取为 $\alpha^+=100$, 积分上限取为 $\beta/\delta=0.4$. 需要说明的是, 在该积分区间内, 壁面热流的层流项、湍流项和

表 1 (网络版彩图)直接数值模拟数据库列表

Table 1 (Color online) List of utilized DNS datasets

数据库	Re_θ	Pr	方法	符号
Li et al. [37]	1100	0.71	DNS	—■—
Li et al. [37]	1410	0.71	DNS	—◆—
Wu et al. [39]	1750	1.0	DNS	—●—
Wu et al. [39]	2000	1.0	DNS	—▶—
Wu et al. [39]	2540	1.0	DNS	—◀—
Wu et al. [39]	2900	1.0	DNS	—▼—

非均匀项都不能忽略(见图2), 因而本文对非均匀项的模化是必要的. 此外, 湍流边界层沿法向存在分层结构. 在近壁面, 黏性和壁面切应力是起重要作用的物理量, 因此采用黏性尺度作为特征尺度, 即积分下限 α 采用黏性尺度进行无量纲化. 在边界层外层, 湍流流动强烈依赖于其几何尺度, 此时采用边界层厚度 δ 作为特征尺度, 因此积分上限 β 采用边界层厚度进行无量纲化. 显然, 与Ebadi等人^[29]提出的预测模型相比, 本文提出的壁面热流预测模型显著降低了对近壁面数据的依赖性. 该模型特别适用于近壁面数据误差较大的情形.

3.2 积分次数影响

本文通过对雷诺平均能量方程沿壁面法向进行二次和三次积分, 得到不可压缩湍流边界层的壁面热流预测方程(11)和(9). 自然我们可以对雷诺平均能量方

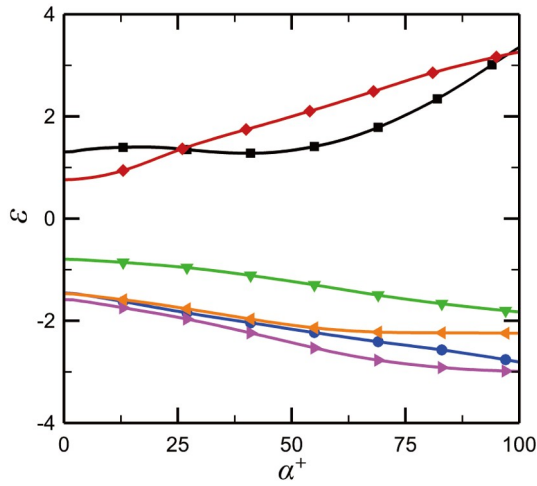


图 5 (网络版彩图)壁面热流预测模型的相对误差随积分下限的变化曲线. 符号含义见表 1

Figure 5 (Color online) Relative error in wall heat flux as a function of the lower limit of integration. Symbols are defined in Table 1.

程沿法向进行任意更高次积分, 从而得到更一般的表达式.

根据柯西重复积分公式, 任意连续函数 $f(y)$ 的 n 次积分可以表示为一次积分, 即

$$\int_0^\beta \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_{n-1}} f(y_n) dy_n \cdots dy_2 dy_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\beta (\beta-y)^{n-1} f(y) dy. \quad (14)$$

利用上式可以得到基于 n 次积分 ($n \geq 3$) 的壁面热流预测方程:

$$C_n St = \frac{n-2}{Re_\delta Pr} \int_\alpha^\beta (\beta-y)^{n-3} \overline{\Theta} dy + \int_\alpha^\beta (\beta-y)^{n-2} (-\overline{v' \Theta'}) dy - \frac{(\beta-\alpha)^{n-2}}{Re_\delta Pr} \overline{\Theta}_{y=\alpha}, \quad (15)$$

其中系数 C_n 表示为:

$$C_n = 6 \beta^{n-1} \frac{(2n-4)!!}{(2n+1)!!} (\alpha^{3/2} - \beta^{3/2}) - \int_0^\alpha \left[(\beta-y)^{n-2} - (\alpha-y)^{n-2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1} \right] \times (1-y^{3/2}) dy. \quad (16)$$

需要说明的是, 式(16)右端第二项表示 $[0, \alpha]$ 区间内的积分项, 其被积函数与积分上下限 α 和 β 有关, 而与

温度、法向热流密度等湍流统计量无关. 因此, 对于固定的积分上下限, 该积分项为常数.

图6展示了积分次数对湍流边界层壁面热流预测误差的影响. 壁面热流的相对误差 ε 首先随着积分次数 n 的增加逐渐缓慢地降至最低点. 然后, ε 随着积分次数的增加显著提高. 因此, 相对误差随积分次数的变化曲线存在最小值. 然而, 不同雷诺数下相对误差 ε 最小值 (这里指绝对值) 对应的积分次数 n 不同. 总体而言, ε 最小值对应的积分次数随着雷诺数的增加逐渐提高. 换言之, 对于高雷诺数湍流边界层流动, 可以采用更高次的积分模型来预测壁面热流. 需要说明的是, 本文提出的壁面热流预测公式不是数学恒等式, 其误差主要来源于对总热流密度的模化 (见式(8)). 该模型在高雷诺数情况下误差较小 (图1), 因而当积分次数 n 相对较高时仍然可以保持较低的误差.

3.3 积分数据量影响

在预测湍流边界层壁面热流时, 本文提出的积分方法需要同一流向位置处的多个实验测量数据点. 我们自然希望采用的数据量尽可能少, 但是数据点减少时会对模型的误差产生重要影响. 本节采用表1的直接数值模拟数据库, 研究了积分区间内数据点个数对壁面热流预测误差的影响, 并试图确定壁面热流预测所需的最少数据量.

图7显示了基于不同积分次数 n 得到的壁面热流预

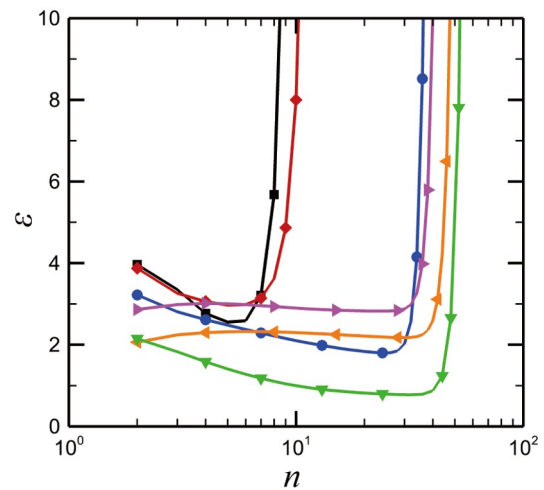


图 6 (网络版彩图)壁面热流预测模型的相对误差随积分次数的变化曲线. 符号含义见表 1

Figure 6 (Color online) Relative error in wall heat flux as a function of the number of repeated integrations. Symbols are defined in Table 1.

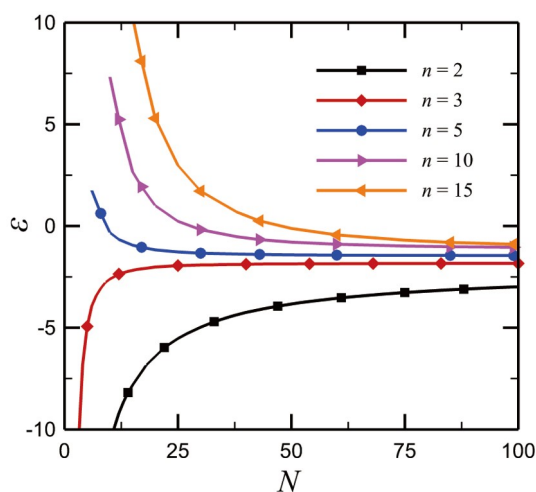


图 7 (网络版彩图)不同积分公式得到的壁面热流预测误差随数据量的变化曲线. 采用Wu等人^[39]在 $Re_\theta=2900$, $Pr=1$ 处的直接数值模拟数据

Figure 7 (Color online) Relative error in wall heat flux as a function of the number of points using the proposed models with different number of integrations. The DNS data are from Wu et al. [39] at $Re_\theta=2900$, $Pr=1$.

测模型的相对误差随积分区间内数据量 N 的变化曲线. 其中积分下限固定为 $\alpha^+=100$, 积分上限固定为 $\beta/\delta=0.4$. 从图中可以明显看出, 当数据量过少时, 基于二次积分的预测模型误差显著提高. 与更高次($n>3$)积分模型相比, 基于三次积分的预测模型对数据点个数最不敏感, 因此可显著降低所需的数据量. 由于三次积分预测模型形式简单, 误差较小(图6), 且对积分区间数据量不敏感(图7), 因而本文主要采用三次积分模型对壁面热流进行预测, 并与二次积分预测模型进行对比.

为了确定基于三次积分的壁面热流模型所需的最少数据量, 图8展示了不同雷诺数和普朗特数情况下, 采用该模型的相对误差随数据量的变化曲线. 如图所示, 基于三次积分的预测模型在积分区间数据点个数 $N=25$ 时, 其相对误差趋于稳定. 为了达到预期精度, 本文后续在验证基于三次积分的壁面热流模型时将选取至少25个数据点.

4 模型验证

本节采用文献中大量的湍流边界层直接数值模拟和实验数据库验证壁面热流预测方法的精度和可靠性. 表2列出了参考的数据库来源以及对应的动量厚度雷诺数和普朗特数. 需要说明的是, 尽管本文提出的壁

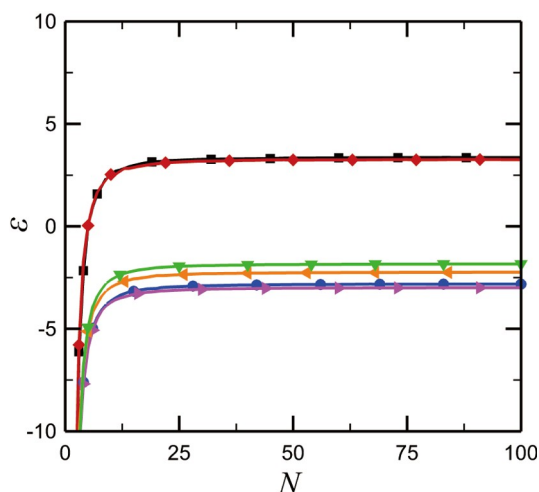


图 8 (网络版彩图)基于积分公式(9)的壁面热流预测误差随数据量的变化曲线. 符号含义见表1

Figure 8 (Color online) Relative error in wall heat flux as a function of the number of points using Eq. (9). Symbols are defined in Table 1.

表 2 (网络版彩图)直接数值模拟和实验数据库列表

Table 2 (Color online) List of utilized DNS and experimental datasets

数据库	Re_θ	Pr	方法	符号
Li et al. [37]	1100–1840	0.71	DNS	■
Araya and Castillo [41]	2290	0.71	DNS	◆
Araya and Castillo [42]	2900	0.71	DNS	●
Wu et al. [39]	1750–2900	1.0	DNS	▲
Balasubramanian et al. [43]	830, 1070	2–6	DNS	▼
Houra and Nagano [15]	1620	0.71	Exp.	◀
Nagata et al. [44]	1310, 2330	0.71	Exp.	▶

面热流预测模型(9)和(11)采用的是边界层厚度雷诺数 Re_δ , 但文献中常用的是基于动量厚度的雷诺数 Re_θ , 因而表2给出了数值模拟和实验数据的 Re_θ 值.

图9比较了湍流边界层壁面热流的预测值 St_p 和文献中给出的参考值 St_r , 虚线表示相对误差为 $\pm 4\%$. 其中, 图9(a)展示的是基于三次积分预测公式(9)的预测结果, 图9(b)展示的是基于二次积分预测公式(11)的预测结果. 从图中可以看出, 本文提出的壁面热流预测方法的相对误差普遍在 $\pm 4\%$ 以内.

为了进一步比较二次积分和三次积分预测模型的精度, 图10(a)和(b)分别展示了不同动量厚度雷诺数 Re_θ 下式(9)和式(11)预测结果的相对误差. 需要注意的是, 为了方便比较不同模型的精度, 图10给出的是相对误差的绝对值, 其中图10(a)中的虚线表示模型相对误

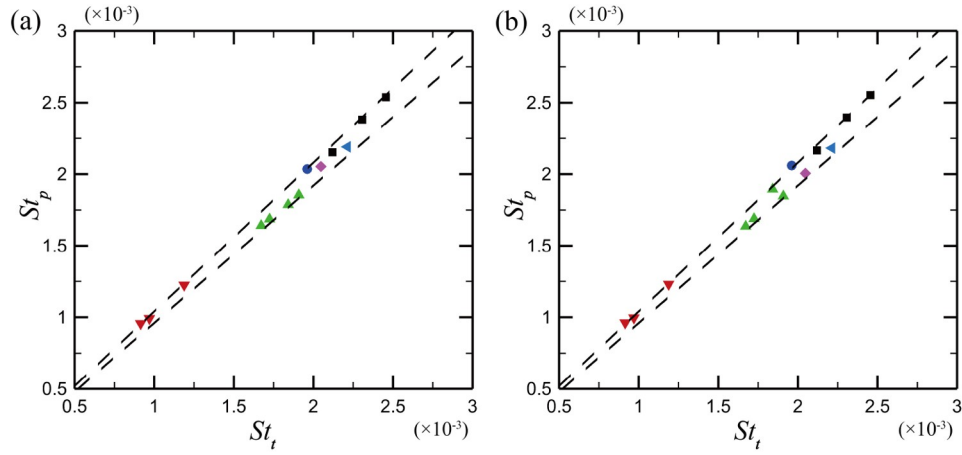


图 9 (网络版彩图)壁面热流预测值与文献中参考值的对比: (a) 式(9)预测结果; (b) 式(11)预测结果. 符号含义见表2

Figure 9 (Color online) Wall heat flux predicted using Eq. (9) in (a) and using Eq. (11) in (b) plotted against the published values. Symbols are defined in Table 2.

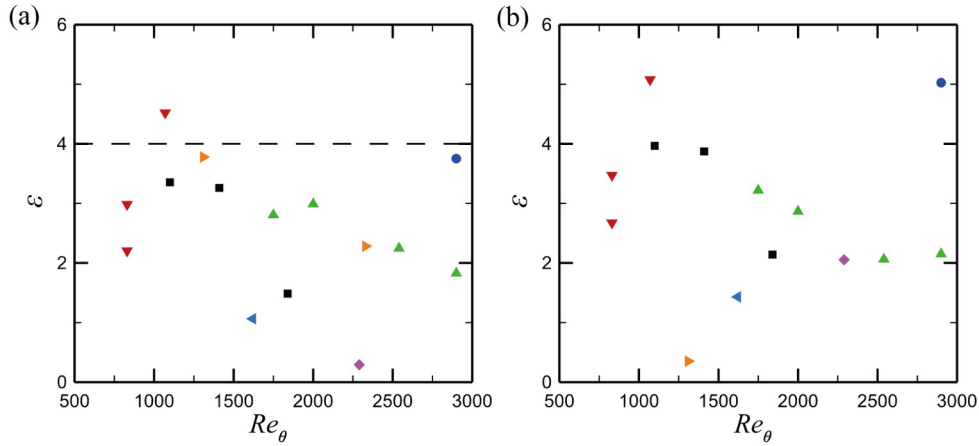


图 10 (网络版彩图)壁面热流预测的相对误差: (a) 式(9)预测结果; (b) 式(11)预测结果. 符号含义见表2

Figure 10 (Color online) Relative error in wall heat flux using eq. (9) in (a) and using eq. (11) in (b). Symbols are defined in Table 2.

差为4%. 从图中可以明显观察到, 基于三次积分的壁面热流预测模型(9), 其相对误差普遍小于4%.

图10(b)中基于Nagata等人^[44] $Re_\theta=2330$ 的实验数据, 采用本文二次积分预测模型得到的相对误差达到8%(由于纵轴范围限制, 图中未显示), 而采用三次积分预测模型得到的相对误差仅为2.3%. 整体而言, 基于三次积分得到的壁面热流预测模型(9)的精度显著高于基于二次积分得到的预测模型(11).

5 结论

壁面热流的精准预测具有重要的科学意义和工程

应用价值. 本文基于不可压缩零压力梯度湍流边界层总热流密度的分布规律, 根据不同雷诺数和普朗特数的直接数值模拟数据, 提出了一种高精度的总热流密度模型. 利用该模型并结合雷诺平均能量方程提出了一种积分形式的湍流边界层壁面热流预测方法. 该方法仅提供一个流向位置处的平均温度和法向热流密度剖面. 此外, 采用本方法预测壁面热流仅需要边界层外层的平均流场分布, 较传统方法显著降低了对近壁面数据的依赖性. 本文提出的高精度壁面热流预测模型适用于零压力梯度湍流边界层流动, 对于逆压梯度边界层或者高普朗特数流动, 模型精度需要进一步验证. 主要结论如下:

(1) 通过研究积分上下限对壁面热流预测模型的影响, 发现积分上限和积分下限对模型相对误差的影响较小.

(2) 通过研究积分次数对壁面热流预测模型的影响, 发现模型精度与积分次数密切相关, 并且本文提出的壁面热流模型并不适用于积分次数过大的情形.

(3) 通过研究积分区间数据点个数对壁面热流预

测模型的影响, 发现采用三次积分的壁面热流预测模型可显著降低所需的数据量.

(4) 经文献中的直接数值模拟和实验数据验证, 当积分下限取 $\alpha^+=100$, 积分上限取 $\beta/\delta=0.4$ 时, 基于三次积分的壁面热流模型相对误差在 $\pm 4\%$ 以内.

(5) 综合对比发现, 基于三次积分的壁面热流预测模型具有形式简单、精度高、鲁棒性强等优点.

参考文献

- Wang Y N, Lu C, Wang G L. Influencing mechanism of rock thermal resistance on convective heat transfer of fracture (in Chinese). *Coal Geol Explor*, 2023, 51: 113–122 [王亚宁, 陆川, 王贵玲. 岩石导热热阻对裂隙对流换热的影响机制. *煤田地质与勘探*, 2023, 51: 113–122]
- Zeng P P, Chen S S, Feng C, et al. Effect of lateral jet on local aerodynamic heating characteristics of missile rudders (in Chinese). *Acta Aerodyn Sin*, 2023, 41: 70–81 [曾品棚, 陈树生, 冯聪, 等. 侧向喷流对导弹方向舵局部气动热特性的影响. *空气动力学学报*, 2023, 41: 70–81]
- Pan L S, Hao H L, Yao Z K, et al. Current status of research on reducing drag and cooling of high-speed aircraft (in Chinese). *Adv Mech*, 2023, 53: 793–818 [潘利生, 郝亨隆, 姚子康, 等. 高速飞行器减阻降热研究进展. *力学进展*, 2023, 53: 793–818]
- Shi Y, Zhang Y, Wen H, et al. Comprehensive analysis method of acquiring wall heat fluxes in rotating detonation combustors. *Exp Therm Fluid Sci*, 2024, 152: 111120
- Gui Y W. Combined thermal phenomena of hypersonic vehicle (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 139–153 [桂业伟. 高超声速飞行器综合热效应问题. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2019, 49: 139–153]
- Yue L J, Lu H B, Xu X, et al. Aerothermal characteristics of bleed slot in hypersonic flows. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2015, 58: 104703
- Zhu G Y, Zhang Y W, Guo C, et al. Long-term cooling process of melt in crucible type core catcher (in Chinese). *Sci Technol Eng*, 2024, 24: 1060–1065 [朱光昱, 张伟王, 郭超, 等. 坩埚式堆芯捕集器熔融物长期冷却过程. *科学技术与工程*, 2024, 24: 1060–1065]
- Lu F, Su X, Li H, et al. Global thermal network model for oil-immersed transformers (in Chinese). *Acta Metrol Sin*, 2024, 45: 9–17 [鲁非, 苏翔, 李化, 等. 油浸式变压器的全域热网络模型. *计量学报*, 2024, 45: 9–17]
- Grossmann S, Lohse D. Scaling in thermal convection: A unifying theory. *J Fluid Mech*, 2000, 407: 27–56
- Howland C J, Ng C S, Verzicco R, et al. Boundary layers in turbulent vertical convection at high Prandtl number. *J Fluid Mech*, 2022, 930: A32
- Childs P R N, Greenwood J R, Long C A. Heat flux measurement techniques. *Proc Inst Mech Eng Part C-J Mech Eng Sci*, 1999, 213: 655–677
- Moreira T A, Colmanetti A R A, Tibiriçá C B. Heat transfer coefficient: A review of measurement techniques. *J Braz Soc Mech Sci Eng*, 2019, 41: 1–25
- Blackwell B F, Kays W M, Moffat R J. The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients. Technical Report, Stanford University, 1972
- Han S, Goldstein R J. The heat/mass transfer analogy for a simulated turbine endwall. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, 51: 3227–3244
- Houra T, Nagano Y. Effects of adverse pressure gradient on heat transfer mechanism in thermal boundary layer. *Int J Heat Fluid Flow*, 2006, 27: 967–976
- Tsuji T, Nagano Y. Turbulence measurements in a natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int J Heat Mass Transfer*, 1988, 31: 2101–2111
- Naylor D. Recent developments in the measurement of convective heat transfer rates by laser interferometry. *Int J Heat Fluid Flow*, 2003, 24: 345–355
- Tanda G, Fossa M, Misale M. Heat transfer measurements in water using a schlieren technique. *Int J Heat Mass Transfer*, 2014, 71: 451–458
- Eltaweel A, Hassan I. Experimental and numerical investigation of a single-phase microchannel flow under axially non-uniform heat flux. *Int J Heat Mass Transfer*, 2023, 216: 124602
- Foroozan F, Güemes A, Raiola M, et al. Synchronized measurement of instantaneous convective heat flux and velocity fields in wall-bounded flows. *Meas Sci Technol*, 2023, 34: 125301
- Neal S B H C. The development of the thin-film naphthalene mass-transfer analogue technique for the direct measurement of heat-transfer

- coefficients. [Int J Heat Mass Transfer](#), 1975, 18: 559–567
- 22 Wu H T, Cui Z S, Xu Z A. A method for measuring duct wall heat flux based on inverse problem algorithm (in Chinese). *Acta Metrol Sin*, 2007, 28: 237–238 [吴洪潭, 崔志尚, 许祝安. 一种基于反问题算法的管道壁面热流密度测量技术. *计量学报*, 2007, 28: 237–238]
- 23 Wang X. Inverse estimation of heat flux and temperature field for a nonlinear heat transfer system using step-renewed two-stage Kalman filter. [Int J Heat Mass Transfer](#), 2024, 222: 125161
- 24 Hendricks T, Ghandhi J. Estimation of surface heat flux in IC engines using temperature measurements: Processing code effects. [SAE Int J Engines](#), 2012, 5: 1268–1285
- 25 Kulkarni K S, Madanan U, Mittal R, et al. Experimental validation of heat/mass transfer analogy for two-dimensional laminar and turbulent boundary layers. [Int J Heat Mass Transfer](#), 2017, 113: 84–95
- 26 Alfredsson P H, Örlü R, Schlatter P. The viscous sublayer revisited-exploiting self-similarity to determine the wall position and friction velocity. [Exp Fluids](#), 2011, 51: 271–280
- 27 Lee J, Jung S Y, Sung H J, et al. Turbulent thermal boundary layers with temperature-dependent viscosity. [Int J Heat Fluid Flow](#), 2014, 49: 43–52
- 28 Fukagata K, Iwamoto K, Kasagi N. Contribution of Reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows. [Phys Fluids](#), 2002, 14: L73–L76
- 29 Ebadi A, Mehdi F, White C M. An exact integral method to evaluate wall heat flux in spatially developing two-dimensional wall-bounded flows. [Int J Heat Mass Transfer](#), 2015, 84: 856–861
- 30 Zhang P, Xia Z. Contribution of viscous stress work to wall heat flux in compressible turbulent channel flows. [Phys Rev E](#), 2020, 102: 043107
- 31 Zhang P, Song Y, Xia Z. Exact mathematical formulas for wall-heat flux in compressible turbulent channel flows. [Acta Mech Sin](#), 2022, 38: 321403
- 32 Ricco P, Duan L. Decomposition of the wall-heat flux of compressible boundary layers. [Phys Fluids](#), 2023, 35: 065117
- 33 Sun D, Guo Q, Yuan X, et al. A decomposition formula for the wall heat flux of a compressible boundary layer. [Adv Aerodyn](#), 2021, 3: 33
- 34 Li D, Luo K, Fan J. Direct numerical simulation of turbulent flow and heat transfer in a spatially developing turbulent boundary layer laden with particles. [J Fluid Mech](#), 2018, 845: 417–461
- 35 Chen X, She Z S. Analytic prediction for planar turbulent boundary layers. [Sci China-Phys Mech Astron](#), 2016, 59: 114711
- 36 Kong H, Choi H, Lee J S. Direct numerical simulation of turbulent thermal boundary layers. [Phys Fluids](#), 2000, 12: 2555–2568
- 37 Li D, Luo K, Fan J. Direct numerical simulation of heat transfer in a spatially developing turbulent boundary layer. [Phys Fluids](#), 2016, 28: 105104
- 38 Wu X, Moin P. Transitional and turbulent boundary layer with heat transfer. [Phys Fluids](#), 2010, 22: 085105
- 39 Wu X, Moin P, Wallace J M, et al. Transitional-turbulent spots and turbulent-turbulent spots in boundary layers. [Proc Natl Acad Sci USA](#), 2017, 114: E5292–E5299
- 40 Vallikivi M, Hultmark M, Smits A J. Turbulent boundary layer statistics at very high Reynolds number. [J Fluid Mech](#), 2015, 779: 371–389
- 41 Araya G, Castillo L. DNS of turbulent thermal boundary layers up to $Re_\theta=2300$. [Int J Heat Mass Transfer](#), 2012, 55: 4003–4019
- 42 Araya G, Castillo L. Direct numerical simulations of turbulent thermal boundary layers subjected to adverse streamwise pressure gradients. [Phys Fluids](#), 2013, 25: 095107
- 43 Balasubramanian A G, Guastoni L, Schlatter P, et al. Direct numerical simulation of a zero-pressure-gradient turbulent boundary layer with passive scalars up to Prandtl number $Pr = 6$. [J Fluid Mech](#), 2023, 974: A49
- 44 Nagata K, Sakai Y, Komori S. Effects of small-scale freestream turbulence on turbulent boundary layers with and without thermal convection. [Phys Fluids](#), 2011, 23: 065111

An integral method for estimating wall heat flux in spatially developing turbulent boundary layers

KANG ZeYu¹, MENG Xiang¹, LI Dong^{1,2*} & ZHANG Kai^{1,2}

¹ Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² Tangshan Research Institute, Beijing Institute of Technology, Tangshan 063000, China

*Corresponding author (email: bitld@bit.edu.cn)

A novel method based on an integral analysis of the Reynolds-averaged energy equation is proposed to determine the wall heat flux in a spatially developing turbulent boundary layer. The method requires the wall-normal profiles of the mean temperature and wall-normal heat flux at only one streamwise location. Moreover, only the mean profiles in the region far away from the wall are required for estimation of the wall heat flux, instead of the data within the whole boundary layer. The influences of integration limits on the accuracy of the method are investigated, showing that the lower and upper integration limits have insignificant effects on the relative error. A number of direct numerical simulation and experimental datasets available in the literature are employed to assess the accuracy of the present method over a wide range of Reynolds numbers. The wall heat flux determined using the proposed method is found to be within $\pm 4\%$ in agreement with the published values. The predictive model is shown to be robust and accurate in incompressible turbulent boundary layers under zero pressure gradient.

wall heat flux, turbulent boundary layer, predictive model, direct numerical simulation, experimental measurement

PACS: 47.27.E-, 47.27.nb, 44.20.+b

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0172](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0172)