



右三角范畴的八面体公理

何婧¹, 李江沙², 周潘岳^{3*}

1. 湖南工商大学理学院, 长沙 410205;

2. 湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006;

3. 长沙理工大学数学与统计学院, 长沙 410114

E-mail: jinghe1003@163.com, jiangshali322@163.com, panyuezhou@163.com

收稿日期: 2023-11-19; 接受日期: 2024-05-21; 网络出版日期: 2024-06-07; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12371034) 和湖南省自然科学基金 (项目编号: 2023JJ40217 和 2023JJ30008) 资助项目

摘要 右三角范畴是三角范畴的自然推广, 继承了三角范畴的基本性质, 增加了一些新的结构. 它将范畴论的研究视角进一步推广到更宽泛的层次, 有助于深化对范畴论与代数、几何和拓扑等数学分支的理解. 本文给出右三角范畴的八面体公理两个等价刻画, 但证明方法不同于三角范畴的情形.

关键词 三角范畴 右三角范畴 八面体公理 映射锥公理

MSC (2020) 主题分类 18G80

1 引言

三角范畴由 Verdier [9] 于 20 世纪 60 年代中期提出, 最初目的是解决代数几何和代数拓扑中的某些对偶性问题. 现在它已经发展成为许多数学学科中不可或缺的一部分. 它在代数几何、代数拓扑 (稳定同伦理论)、交换代数、微分几何 (Fukaya 范畴)、微局部分析以及表示论 (导出范畴和稳定模范畴) 等领域中有重要应用. 有关三角范畴的详细介绍可参考章璞教授的专著 [10]. 后来, Assem 等 [1]、Beligiannis 和 Marmaridis [2] 引入了右三角范畴的概念, 可以看作是三角范畴的自然推广. 类似于三角范畴的定义, 右三角范畴由 4 条公理构成, 其中八面体公理起到了非常重要的作用.

本文主要目的是给出右三角范畴的八面体公理两个等价刻画. 具体而言是: 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴, 则八面体公理 (RTR4)、(RTR4-1) 和 (RTR4-2) 三者等价.

(RTR4-1) (映射锥公理) 给定实线部分交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A', \end{array}$$

英文引用格式: He J, Li J S, Zhou P Y. The octahedral axiom for right triangulated categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1–14, doi: [10.1360/SSM-2023-0315](https://doi.org/10.1360/SSM-2023-0315)

其中行为 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则存在态射 $\gamma: C \rightarrow C'$ 使得上图交换, 且映射锥

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

(RTR4-2) 给定实线部分交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ A & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{c} & \Sigma A, \end{array}$$

其中行为 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则存在态射 $\gamma: C \rightarrow Y$ 使得上图交换, 且

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ \beta \end{pmatrix}} C \oplus X \xrightarrow{(\gamma, b)} Y \xrightarrow{\Sigma f \circ c} \Sigma B$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

众所周知, 八面体公理 (RTR4)、(RTR4-1) 和 (RTR4-2) 在三角范畴中等价 (参见文献 [5, 6, 8]), 并且在解决问题时, 这些等价刻画经常被使用. 然而, 在右三角范畴 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 中, 自函子 Σ 并非自同构, 因此无法全部采用原本针对三角范畴的证明方法证明上述所有结论 (参见文献 [5, 6, 8]). 基于此, 本文给出新方法证明上述结论成立. 本文方法主要利用右三角对直和以及直和项封闭等基本事实, 而不依赖函子的自同构.

2 预备知识

本节回顾右三角范畴的定义, 并给出一些在主要结果中会用到的结论.

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是加法自函子. $\mathcal{C}$ 中的一个六元组由对象 $A, B, C \in \mathcal{C}$ 以及对象间的态射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow \Sigma A$ 组成, 或可以表示为

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A.$$

六元组 (A, B, C, f, g, h) 和 (A', B', C', f', g', h') 之间的态射为对象之间的态射的三元组 (α, β, γ) , 满足如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A'. \end{array}$$

若 α, β 和 γ 为 $\mathcal{C}$ 中的同构, 则称 (α, β, γ) 为一个同构.

Assem 等 [1]、Beligiannis 和 Marmaridis [2] 给出的右三角范畴定义如下.

定义 2.1 右三角范畴是一个三元组 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$, 其中 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是加法自函子, ∇ 是六元组构成的类 (其中元素称为右三角), 且满足如下公理:

(RTR1) (a) ∇ 在同构的意义下封闭;

(b) 对于任意对象 $A \in \mathcal{C}$, 平凡序列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0$$

是一个右三角;

(c) 任意态射 $f: A \rightarrow B$ 都可以嵌入一个右三角, 且 f 为第一个态射.

(RTR2) 若

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$$

是一个右三角, 则它的平移

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma B$$

也是右三角.

(RTR3) 若有如下行为右三角的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

则存在态射 $\gamma: C \rightarrow C'$, 使得 (α, β, γ) 为六元组之间的态射.

(RTR4) (八面体公理) 给定实线部分交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow a & & \downarrow s & & \parallel \\ A & \xrightarrow{af} & X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{e} & \Sigma A \\ \downarrow f & & \parallel & & \downarrow t & & \downarrow \Sigma f \\ B & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Z & \xrightarrow{c} & \Sigma B \end{array}$$

其中行为右三角, 则存在态射 $s: C \rightarrow Y, t: Y \rightarrow Z$ 使得上图交换, 且

$$C \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{\Sigma g \circ c} \Sigma C$$

是一个右三角.

现在给出一些右三角范畴的例子.

例 2.1 (1) 三角范畴 $\mathcal{C}$ 是一个右三角范畴, 其中加法自函子 Σ 是自同构. 在这种情形下, $\mathcal{C}$ 中的右三角称作三角. 换言之, 右三角范畴是三角范畴当且仅当加法自函子 Σ 是自同构.

(2) 设 $\mathcal{B}$ 是有足够多的投射对象和内射对象的正合范畴, 记 $\mathcal{I}$ 是所有内射对象构成的子范畴, 则商范畴 $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ 是一个右三角范畴 (参见文献 [4]).

(3) 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴, 如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的共变有限子范畴, 则商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{X}$ 是一个右三角范畴 (参见文献 [3]).

(4) 设 $\mathcal{C}$ 是一个三角范畴, 如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的共变有限子范畴, 则商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{X}$ 是一个右三角范畴 (参见文献 [7]).

现在给出一些右三角范畴的性质, 有些来自文献 [1], 为了方便读者, 都给出了详细的证明.

引理 2.1 (参见文献 [1, 推论 1.3]) 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴. 任给 $\mathcal{C}$ 中的右三角

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A,$$

则有

$$gf = 0, \quad hg = 0,$$

即连续两个态射的合成等于 0.

证明 由 (RTR2) 知, 我们只需要验证 $gf = 0$. 应用 (RTR3) 得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{1} & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A, \end{array}$$

其中第一行为对象 $A \in \mathcal{C}$ 的平凡序列的平移. 因此有 $gf = 0$. □

引理 2.2 (参见文献 [1, 推论 1.4(a)]) 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴. 任给

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则对于任意 $X \in \mathcal{C}$, 有如下长正合列:

$$\cdots \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma C, X) \xrightarrow{\Sigma g^*} \mathcal{C}(\Sigma B, X) \xrightarrow{\Sigma f^*} \mathcal{C}(\Sigma A, X) \xrightarrow{h^*} \mathcal{C}(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathcal{C}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}(A, X).$$

证明 由 (RTR2) 知, 我们只需要验证在 $\mathcal{C}(B, X)$ 处正合.

由引理 2.1 知 $gf = 0$, 则有

$$\text{Im } g^* \subseteq \text{Ker } f^*.$$

任取 $\alpha \in \text{Ker } f^*$, 即有 $\alpha f = 0$, 则有如下实线部分交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{1} & X & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

应用 (RTR3) 知, 存在态射 $\beta : C \rightarrow X$ 使得 $\beta g = \alpha$, 即有 $\text{Ker } f^* \subseteq \text{Im } g^*$. □

引理 2.3 (参见文献 [1, 推论 1.5]) 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴. 给定如下 $\mathcal{C}$ 中行为右三角的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A'. \end{array} \tag{2.1}$$

若 α 和 β 是同构, 则 γ 也是同构.

证明 任取对象 $X \in \mathcal{C}$, 用上同调函子 $\mathcal{C}(-, X)$ 作用在 (2.1) 上, 则有如下行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{C}(\Sigma B', X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Sigma A', X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(C', X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(B', X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(A', X) \\ \downarrow \Sigma\beta^* & & \downarrow \Sigma\alpha^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \alpha^* \\ \mathcal{C}(\Sigma B, X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Sigma A, X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(C, X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(B, X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(A, X). \end{array}$$

由于 α 和 β 是同构, 则 α^* 、 β^* 、 $\Sigma\alpha^*$ 和 $\Sigma\beta^*$ 均是同构. 由五引理知 γ^* 是同构. 由 X 的任意性知 γ^* 是函子同构, 再由 Yoneda 引理知 γ 是同构. $\square$

引理 2.4 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴, 则 $\mathcal{C}$ 中两个右三角的直和仍是右三角.

证明 设

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A, \quad A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中两个右三角. 由 (RTR1)(c) 知, 存在如下右三角:

$$A \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} B \oplus B' \xrightarrow{s} D \xrightarrow{t} \Sigma A \oplus \Sigma A'.$$

考虑如下两个实线部分交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{s} & D & \xrightarrow{t} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \downarrow (1, 0) & & \downarrow (1, 0) & & \downarrow u & & \downarrow (1, 0) \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A, \end{array} \quad (2.2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{s} & D & \xrightarrow{t} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \downarrow (0, 1) & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow v & & \downarrow (0, 1) \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A'. \end{array} \quad (2.3)$$

对 (2.2) 和 (2.3) 应用 (RTR3) 知, 存在态射

$$u: D \rightarrow C, \quad v: D \rightarrow C'$$

使得上述两个图均交换. 令

$$\varphi := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{s} & D & \xrightarrow{t} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & C \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A'. \end{array} \quad (2.4)$$

证明 设

$$A \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} B \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} C \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

由 (RTR1)(c) 知, 可将态射 f 和 f' 分别嵌入到右三角

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{u} D \xrightarrow{v} \Sigma A \quad \text{和} \quad A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{u'} D' \xrightarrow{v'} \Sigma A'.$$

对于如下实线部分交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & C \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \downarrow (1, 0) & & \downarrow (1, 0) & & \downarrow (s, t) & & \downarrow (1, 0) \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{u} & D & \xrightarrow{v} & \Sigma A, \end{array}$$

应用 (RTR3) 可知, 存在态射

$$(s, t): C \oplus C' \rightarrow D$$

使得上图可交换.

同理有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & C \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \downarrow (0, 1) & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow (r', s') & & \downarrow (0, 1) \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{u'} & D' & \xrightarrow{v'} & \Sigma A'. \end{array}$$

从而有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & C \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix} & & \parallel \\ A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}} & D \oplus D' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A'. \end{array}$$

由引理 2.3 知 $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix}$ 是同构, 故 s 和 s' 是同构. 由如下两个交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow s & & \parallel \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{u} & D & \xrightarrow{v} & \Sigma A, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow s' & & \parallel \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{u'} & D' & \xrightarrow{v'} & \Sigma A', \end{array}$$

可知 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ 和 $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} \Sigma A'$ 均是 $\mathcal{C}$ 中的右三角. $\square$

3 主要结果的证明

本节给出 (RTR4) 的两个等价刻画, 但证明方法不同于三角范畴的情形 (参见文献 [6, 8]). 因为右三角范畴中的自函子不是自同构函子.

定理 3.1 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是三元组, 其中 $\mathcal{C}$ 是右三角范畴, Σ 是加法自函子, ∇ 是六元组的构成类. 如果 ∇ 满足 (RTR1)、(RTR2) 和 (RTR3), 则下列的陈述等价:

- (1) ∇ 满足 (RTR4);
- (2) ∇ 满足 (RTR4-1): 给定实线部分交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A', \end{array}$$

其中行为 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则存在态射 $\gamma: C \rightarrow C'$ 使得上图可交换, 且映射锥

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

证明 首先证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 假设有行为右三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A'. \end{array}$$

由引理 2.4 知, 三个平凡右三角

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A, \\ 0 &\rightarrow B \xrightarrow{1} B \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow A' \xrightarrow{1} A' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

的直和

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} A \oplus B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} B \oplus A' \xrightarrow{0} \Sigma A$$

仍为右三角. 由交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} & A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & B \oplus A' & \xrightarrow{0} & \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\ A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}} & A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}} & B \oplus A' & \xrightarrow{0} & \Sigma A \end{array} \quad (3.1)$$

可知 (3.1) 的第二行是右三角, 因为 ∇ 在同构意义下是封闭的.

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & C \oplus B' & \xrightarrow{(h, 0)} & \Sigma A \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ \beta f \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}} & C \oplus B' & \xrightarrow{(h, 0)} & \Sigma A,
 \end{array} \quad (3.2)$$

其中第一行由以下 2 个右三角直和得到:

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A, \\
 0 &\rightarrow B' \xrightarrow{1} B' \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

由此可得 (3.2) 的第二行也是右三角, 因为 ∇ 在同构意义下是封闭的.

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma B \oplus \Sigma A' \\
 \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Sigma f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma B \oplus \Sigma A',
 \end{array} \quad (3.3)$$

其中第一行由如下 3 个右三角的直和得到:

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A \xrightarrow{1} \Sigma A, \\
 B &\xrightarrow{1} B \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma B, \\
 A' &\xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} \Sigma A'.
 \end{aligned}$$

由此可得 (3.3) 的第二行也是右三角, 因为 ∇ 在同构意义下是封闭的.

对于如下实线部分交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}} & A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}} & B \oplus A' & \xrightarrow{0} & \Sigma A \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} & & \downarrow u & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ \beta f \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}} & C \oplus B' & \xrightarrow{(h, 0)} & \Sigma A \\
 \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \Sigma \alpha \end{pmatrix} \\
 A \oplus B \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}} & B \oplus B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma B \oplus \Sigma A',
 \end{array} \quad (3.4)$$

应用 (RTR4) 可知, 存在态射 $u: B \oplus A' \rightarrow C \oplus B', v: C \oplus B' \rightarrow \Sigma A \oplus C'$ 使得上图可交换, 且

$$B \oplus A' \xrightarrow{u} C \oplus B' \xrightarrow{v} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角. 由 (3.4) 交换可得

$$u = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma: C \rightarrow C'$ 满足

$$h'\gamma = \Sigma\alpha \circ h, \quad \gamma g = g'\beta,$$

即有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma\alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

且

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma\alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

现在证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 假设有行为右三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow a & & & & \parallel \\ A & \xrightarrow{af} & X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{e} & \Sigma A \\ \downarrow f & & \parallel & & & & \downarrow \Sigma f \\ B & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Z & \xrightarrow{c} & \Sigma B. \end{array} \quad (3.5)$$

对 (3.5) 上半部分应用 (RTR4-1) 知, 存在态射 $s: C \rightarrow Y$ 使得 (3.5) 上半部分可交换, 且

$$B \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ a & af \end{pmatrix}} C \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ s & d \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

由引理 2.5 和如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ a \end{pmatrix}} & C \oplus X & \xrightarrow{(s, d)} & Y & \xrightarrow{\Sigma f \circ e} & \Sigma B \\ \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} -e \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B \oplus A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ a & af \end{pmatrix}} & C \oplus X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ s & d \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix}} & \Sigma B \oplus \Sigma A \\ \downarrow (1, f) & & \parallel & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow (1, \Sigma f) \\ B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ a \end{pmatrix}} & C \oplus X & \xrightarrow{(s, d)} & Y & \xrightarrow{\Sigma f \circ e} & \Sigma B, \end{array} \quad (3.6)$$

可知

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ a \end{pmatrix}} C \oplus X \xrightarrow{(s, d)} Y \xrightarrow{\Sigma f \circ e} \Sigma B \quad (3.7)$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

对如下实线部分交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ a \end{pmatrix}} & C \oplus X & \xrightarrow{(s, d)} & Y & \xrightarrow{\Sigma f \circ e} & \Sigma B \\
 \parallel & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow t & & \parallel \\
 B & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Z & \xrightarrow{c} & \Sigma B,
 \end{array} \quad (3.8)$$

应用 (RTR4-1) 知, 存在态射 $t: Y \rightarrow Z$ 使得 (3.8) 可交换, 且

$$C \oplus X \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} -s & -d & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}} Y \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f \circ e & 0 \\ t & b \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} \Sigma g & 0 \\ -\Sigma a & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}} \Sigma C \oplus \Sigma X \oplus \Sigma B$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

由 (3.8) 交换, 有

$$td = b, \quad ct = \Sigma f \circ e,$$

即有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{af} & X & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{e} & \Sigma A \\
 \downarrow f & & \parallel & & \downarrow t & & \downarrow \Sigma f \\
 B & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Z & \xrightarrow{c} & \Sigma B.
 \end{array}$$

由引理 2.5 和如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{t} & Z & \xrightarrow{\Sigma g \circ c} & \Sigma C \\
 \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 C \oplus X \oplus B & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -s & -d & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}} & Y \oplus X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f \circ e & 0 \\ t & b \end{pmatrix}} & \Sigma B \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \Sigma g & 0 \\ -\Sigma a & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}} & \Sigma C \oplus \Sigma X \oplus \Sigma B \\
 \downarrow (-1, 0, g) & & \downarrow (1, d) & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow (-1, 0, \Sigma g) \\
 C & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{t} & Z & \xrightarrow{\Sigma g \circ c} & \Sigma C,
 \end{array}$$

可知

$$C \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{\Sigma g \circ c} \Sigma C$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角. □

定理 3.2 设 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是三元组, 其中 $\mathcal{C}$ 是右三角范畴, Σ 是加法自函子, ∇ 是六元组的构成类. 如果 ∇ 满足 (RTR1)、(RTR2) 和 (RTR3), 则下列的陈述等价:

- (1) ∇ 满足 (RTR4-1);
- (2) ∇ 满足 (RTR4-2): 给定实线部分交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\
 \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{c} & \Sigma A,
 \end{array}$$

其中行为 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则存在态射 $\gamma: C \rightarrow Y$ 使得上图可交换, 且

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ \beta \end{pmatrix}} C \oplus X \xrightarrow{(\gamma, b)} Y \xrightarrow{\Sigma f \circ c} \Sigma B$$

是 $\mathcal{C}$ 中的右三角.

证明 首先证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 此结论的证明与定理 3.1(2) $\Rightarrow$ 3.1(1) 中右三角 (3.7) 的证明相同, 因此将其省略.

现在证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 假设有如下行为右三角的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

由引理 2.4 知, 2 个右三角

$$\begin{array}{c} A \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A \xrightarrow{-1} \Sigma A, \\ A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{h'} \Sigma A' \end{array}$$

的直和

$$A \oplus A' \xrightarrow{(0, f')} B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus \Sigma A'$$

仍是右三角. 由 (RTR1)(a) 和如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{(\beta f, f')} & B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Sigma \alpha & 1 \end{pmatrix} \\ A \oplus A' & \xrightarrow{(0, f')} & B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \end{array} \quad (3.9)$$

可知 (3.9) 的第一行为右三角.

考虑如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A \oplus A' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & B \oplus A' & \xrightarrow{(g, 0)} & C & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \\ \parallel & & \downarrow (\beta, f') & & \parallel & & \parallel \\ A \oplus A' & \xrightarrow{(\beta f, f')} & B' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus C' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} & \Sigma A \oplus \Sigma A' \end{array} \quad (3.10)$$

其中第一行为 2 个右三角

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A, \\ A' \xrightarrow{1} A' \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A' \end{array}$$

的直和, 由引理 2.4 知它仍为右三角.

对 (3.10) 应用 (RTR4-2) 知, 存在

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \gamma \end{pmatrix} : C \rightarrow \Sigma A \oplus C'$$

使得 (3.10) 可交换, 且

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'$$

为右三角. 由 (3.10) 交换可得

$$\varphi = -h, \quad \gamma g = g' \beta, \quad h' \gamma = \Sigma \alpha \circ h,$$

即有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

和右三角

$$B \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g & 0 \\ \beta & f' \end{pmatrix}} C \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ \gamma & g' \end{pmatrix}} \Sigma A \oplus C' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma f & 0 \\ \Sigma \alpha & h' \end{pmatrix}} \Sigma B \oplus \Sigma A'.$$

证毕. □

注 3.1 一方面, 通过比较文献 [5,6,8] 中关于三角范畴的八面体公理等价刻画知, 定理 3.1 和 3.2 所用的方法不同于文献所给出的, 因为本文给出的方法不依赖于自函子是自同构函子. 另一方面, 也将三角范畴的八面体公理等价刻画的结果延拓到右三角范畴中.

致谢 衷心感谢审稿人细致的审查和宝贵的建议.

参考文献

- 1 Assem I, Beligiannis A, Marmaridis N. Right triangulated categories with right semi-equivalences. In: Algebras and Modules II. Providence: Amer Math Soc, 1998, 17–37
- 2 Beligiannis A, Marmaridis N. Left triangulated categories arising from contravariantly finite subcategories. *Comm Algebra*, 1994, 22: 5021–5036
- 3 Beligiannis A, Reiten I. Homological and Homotopical Aspects of Torsion Theories. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 188. Providence: Amer Math Soc, 2007
- 4 Happel D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1988
- 5 Holm T, Jørgensen P. Triangulated categories: Definitions, properties, and examples. In: Triangulated Categories. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 375. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010, 1–51
- 6 Hubery A. Notes on the octahedral axiom. <http://www.maths.leeds.ac.uk/ahubery>, 2015
- 7 Jørgensen P. Quotients of cluster categories. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2010, 140: 65–81
- 8 Neeman A. Triangulated Categories, vol. 148. Princeton: Princeton Univ Press, 2001
- 9 Verdier J. Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes. With a preface by Luc Illusie. Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. Astérisque No. 239. Providence: Amer Math Soc, 1996
- 10 Zhang P. Triangulated Categories and Derived Categories (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015]

The octahedral axiom for right triangulated categories

Jing He, Jiangsha Li & Panyue Zhou

Abstract A right triangulated category is a natural generalization of a triangulated category, inheriting its basic properties while adding some new structures. It further extends the study of category theory to a broader level, helping deepen our understanding of category theory in relation to algebra, geometry, topology, and other branches of mathematics. In this paper, we provide two equivalent characterizations of the octahedron axiom in the right triangulated category, but the methods of proof are significantly different from those used in the case of the triangulated category.

Keywords triangulated category, right triangulated category, octahedral axiom, mapping cone axiom

MSC(2020) 18G80

doi: 10.1360/SSM-2023-0315