

叶轮机周期性非定常流高效降阶数值 计算方法研究进展^{*}

吴航空¹, 王丁喜^{1,2}, 黄秀全^{1,2}

(1. 西北工业大学 动力与能源学院, 陕西 西安 710129;
2. 西北工业大学 航空发动机内流重点实验室, 陕西 西安 710129)

摘要: 简要介绍了叶轮机内非定常流对叶轮机性能的重要影响, 总结了叶轮机内动静相干和叶片振动诱发的非定常流的时空周期性特点, 并指出这些时空周期性特点可以加以利用, 发展分析这些非定常流的高效降阶数值计算方法。本文根据不同数值降阶方法的特点对其进行了归类, 详细分析了各自的优缺点及在气动弹性力学领域的应用, 并进一步展望了降阶数值方法在未来的几个关键技术及发展趋势。

关键词: 降阶数值计算方法; 非定常流动; 周期性; 气动弹性力学; 叶轮机; 综述

中图分类号: V231.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2021) 01-0039-14

DOI: 10.13675/j.cnki. tjjs. 200339

Progress in Efficient Reduced Order Methods for Temporal Periodic Unsteady Flows Within Turbomachinery

WU Hang-kong¹, WANG Ding-xi^{1,2}, HUANG Xiu-quan^{1,2}

(1. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;
2. Key Laboratory of Aeroengine Internal Flows, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: The paper starts with a brief introduction of the significant influence of unsteady flows on turbomachinery performance, then summarizes the time and space periodicities of turbomachinery unsteady flows arising from blade row interaction and blade vibration. The time and space periodicities can be made use of to develop efficient reduced order numerical methods for analysing these unsteady flows. This paper classifies these reduced order methods based upon their own features and provides detailed discussions about their pros and cons and their applications in turbomachinery aeroelasticity. Finally, the key technologies and the future development prospects of reduced order methods are outlined.

Key words: Reduced order methods; Unsteady flows; Periodicity; Aeroelasticity; Turbomachinery; Review

^{*} 收稿日期: 2020-05-19; 修订日期: 2020-08-04。

基金项目: 自然科学基金面上项目 (51976172); 国家科技重大专项 (2017-II-0009-0023)。

作者简介: 吴航空, 博士生, 研究领域为计算流体力学。E-mail: hangkong_wu@qq.com

通讯作者: 王丁喜, 博士, 教授, 博导, 研究领域为叶轮机气体动力学和气动弹性力学。

E-mail: dingxi_wang@nwpu.edu.cn

引用格式: 吴航空, 王丁喜, 黄秀全. 叶轮机周期性非定常流高效降阶数值计算方法研究进展[J]. 推进技术, 2021, 42(1): 39-52. (WU Hang-kong, WANG Ding-xi, HUANG Xiu-quan. Progress in Efficient Reduced Order Methods for Temporal Periodic Unsteady Flows Within Turbomachinery [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2021, 42 (1) : 39-52.)

1 引 言

叶轮机属于流体机械,通过叶片和其绕流的相互作用实现其热功转换的功能。由于叶片的转动和振动,叶轮机内的流动具有很强的非定常特性。非定常流也是叶轮机实现其热功转换功能不可或缺的流动现象。非定常流对叶轮机的气动和气弹等性能都有重要的影响。1987年北约 AGARD 会议制定的轴流叶轮机气弹手册第一卷《叶轮机非定常气体动力学》序言^[1]指出:进一步提升先进轴流叶轮机的性能将来自对其非定常流更深刻的理解和控制;非定常流对压缩系统的效率、气动稳定性、气弹稳定性、强迫响应和噪声有重要影响。Wennerstrom^[2]在1989年撰文指出:在非定常进口条件下,超/跨声速压气机具有更大的流通能力;非定常流影响压气机的级间匹配。国内学者对叶轮机非定常流也有深刻认识^[3]。季路成等^[4]更是指出,叶轮机性能的进一步提升必须考虑叶轮机内流场的非定常流特性,把时间维度纳入设计体系,进而提出叶轮机设计准四维和四维设计体系。将非定常流作为一个设计自由度加以利用,能够提高高负荷多级压气机设计过程中的级间匹配,实现设计的高可靠性,以及进一步提高叶轮机的性能。

尽管人们很早就对叶轮机内非定常流有很深刻和比较全面的定性认识,但是对非定常流利用的进展却似乎远远地落在后面。这主要在于非定常流的利用是需要建立在对其定量分析的基础上,而对非定常流定量分析的一个重要手段是求解非定常流控制方程。对叶轮机械而言,非定常流控制方程的求解严重依赖于计算机硬件水平和数值计算方法的发展。

叶轮机非定常流数值分析最为直接的方法为时域多通道(甚至整周)方法。即采用多通道计算域,在时域采用时间推进方法求解流动控制方程。尽管这种方法具有高保真和非线性的特点,能够解析流场中的各种时间尺度成分,但是由于叶轮机具有多通道和多排的几何特点,该方法计算量大(多排多通道计算域,内存消耗大),计算耗时长(过滤流场计算中的初始值影响需要消耗很长时间)。日常工程设计通常有着极为紧迫的时间节点要求,对数值分析的耗时性有严格要求,所以这种时域多通道方法不适用于工程日常设计。

所幸的是,尽管叶轮机内流动具有固有非定常的特点,但是在很多情况下其非定常特性在时间方

向上具有很强的周期特性,并且周期(频率)通常事先可知。比如,转静干涉引起的非定常流是叶轮机内最为常见的非定常流,存在于所有工况,相应的非定常流频率为叶片通过频率和其倍频。对于具有三排及以上叶排的叶轮机,中间叶排通道内的非定常流频率还会包括上下游通过频率的散射频率(上下游通过频率的和差组合)。叶片振动引起的非定常流是叶轮机气动弹性问题中最为关注的流动现象,其频率为叶片振动固有频率(由于叶轮机叶片振动固有频率高,流固耦合振动频率和叶片振动固有频率差别可以忽略)。这种事先可知的周期特性可以加以利用来发展高效降阶数值分析方法。具体操作为采用截断傅里叶级数对周期性非定常流进行逼近。借助于截断傅里叶级数,可以将一个非定常问题转化为准定常问题,求解时可以避免时域求解过程中过滤初始化影响所需要的漫长耗时,从而实现数值分析的收敛加速,减少数值分析耗时。此外,叶轮机的几何结构在周向具备循环周期对称性。特别是在数值分析中,假设一排叶片的几何结构完全相同,并且周向均布。在这种假设下,通常可以假设叶轮机内的时均流场在同排不同通道内完全一致,而其非定常组分则具有幅值相同、相位不同的特点。这种流场和几何的时空周期性特点可以进一步加以利用,将计算域从多通道或者整周减少为单通道,从而大大减少计算量,进一步减少计算耗时。当然,在采用单通道计算域时,除非非定常流的叶间相位角为0,否则在几何周向周期边界上不能采用周期边界条件,而是需要采用移相边界条件。

基于叶轮机流动的时空周期特性和叶轮机几何的周向循环对称特性,在过去40年间,出现了一系列高效降阶数值计算方法。这些方法可以基本上归纳为四类:时域降阶方法、频域降阶方法、时频域混合方法和其他。下面主要对前三类方法进行阐述,明确各自的优缺点,以及现状和发展趋势。

2 时域降阶方法

需要指出的是时域降阶方法并不是最早发展的降阶方法,它们的发展和其他降阶方法基本都是同时进行的。时域降阶方法的发展更多是针对早期计算机内存资源不足而开展的。因此这些方法发展的目标就是要减小计算域,将整周计算域减少为有限的几个通道,甚至是单通道。时域降阶方法主要包括直接存储法、修形法和时间倾斜法。

2.1 计算域缩放方法

在阐述直接存储法、修形法和时间倾斜法之前,有必要介绍一下计算域缩放方法。计算域缩放方法通常用于转静干涉非定常流计算。该方法也算是最早使用的时域降阶方法。通过改变叶排叶片数目,使得不同叶排的叶片数具有一个较大的公约数。为了减少叶片数改变引入的误差,通常叶片数改变很小,理想情况为增加或者减少一个叶片。比如,压气机的转子叶片和静子叶片数分别为36和46。在转静干涉流动数值分析中,转静叶片所需要的通道数至少为18和23。如果将静子叶排的叶片数改为45,那么相应的转静计算域可分别采用4和5个通道。同时,在改变叶片数时,会适当改变叶片弦长,以保证叶片的稠度不变,以减少叶片数改变带来的气动性能改变。计算域缩放法的优点在于可以采用现有的数值计算方法,缺点在于有时候难以通过对叶片数进行很小改变而实现计算域的大大减少,同时叶片数(哪怕是增加或者减少一个叶片)改变对非定常流影响很大^[5-6]。特别是在强迫振动数值分析中,改变叶片数目将改变共振点工况,难以对原有共振问题进行准确评估。

2.2 直接存储法

直接存储法和修形法的共同特点就是可以采用单通道计算域,为此需要在计算域的周向几何周期边界采用移相边界条件。直接存储方法(Direct store method)于1977年由Erdos等^[7]提出,应用于风扇级的转静干涉非定常流。为了实现移相边界条件,直接存储法将几何周期边界处的流场信息存储一个周期。所需要的边界条件信息通过从匹配的边界处插值获得。可见,直接存储法比较适合单基频情形。如果流场中存在多个基频时,需要存储的数据会相当多,失去了该方法的本来目的。此外,由于直接存储法在周期边界存储的流场信息更新频率低,一个周期才完全更新一次,因此该方法收敛比较缓慢。在转静干涉非定常流分析中,在动静交界面也可以采用直接存储法。此时,在交界面处,除了需要存储计算域所在通道的流场数据时间序列,还需要存储相邻数个通道在交界面处的流场,相邻通道数目的多少由上下游叶排叶片数比例决定。

直接存储法原始文献^[7-8]把该方法叫做循环步骤(Cyclic procedure),而不是直接存储法。文献调研表明,直接存储法的叫法起源于文献^[9],后来的引用文献也更多地将之称为直接存储法。尽管针对直接存储法的他引文献都无一例外是文献^[7],该文

献只是对直接存储法做了简要说明,更详细的阐述出于文献^[8]。文献^[8]基于扰动传播的图例,对直接存储方法进行了十分详细但过于冗长的阐述。在当时,由于计算机内存属于稀缺资源,直接存储法需要存储的大量数据不是存储在内存中,而是存储在硬盘或者磁带中,需要使用的时候再读入。需要指出,直接存储法的内存需求对目前的计算机而言不再是个问题,可以直接存储于内存。Burgos等^[10]对直接存储法和多通道法进行了对比,基于非结构化网格和高压涡轮级的计算表明,在上下游叶排叶片数公约数大的时候(计算域通道数少,上下游通道数为2和3),直接存储法比多通道方法计算收敛更快,当上下游叶排叶片数公约数变小时(上下游通道数为7和6),直接存储法计算收敛速度反而比多通道计算方法慢了。这个结论似乎有悖于直观的感觉。

2.3 修形法

He^[9]于1988年提出修形法(Shape correction method)。该方法在几何周期边界采用截断傅里叶级数逼近周期性非定常流。与直接存储法不同的是,该方法只存储有限几个傅里叶系数,因此存储量比直接存储法要小。该方法后来得到进一步发展,可以采用单通道计算域对多基频非定常流进行模拟,成为通用修形法(Generalized shape correction method)^[11]。为了加速求解的收敛,Grelymos等^[12]采用移动平均方法来计算几何周期边界的时间傅里叶系数。尽管如此,修形法收敛速度较慢,需要比整周计算需要更多的迭代步数才能获得收敛的流场。Burgos等^[10]也对直接存储法和修形法进行了对比,针对阵风扰动的直板算例表明,直接存储法计算收敛速度通常比修形法更快,而修形法的收敛速度依赖于傅里叶系数的更新频率,其收敛速度随着傅里叶系数更新频率的增高而逼近直接存储法。商业软件ANSYS CFX具有修形法,叫做傅里叶变换方法(Fourier transformation method)^[13]。此外ANSYS CFX修形法需要双通道计算域,移相边界条件所需要的数据不是对应于双通道计算域的几何周期边界处,而是对应于两个通道搭界处。这种做法主要是源于ANSYS CFX采用基于格点的混合有限体积-有限元方法,在几何周期边界的控制体积只有半个位于计算域内,另一半在对应周期边界的计算域侧,采用双通道计算域更易于移相边界条件的编程实现。

2.4 时间倾斜法

Dannenhoffer等^[14]提出一种完全不同的降阶方法,即时间倾斜法。该方法采用坐标变换,周向不同

坐标处求解不同时刻的解,从而可以在几何周期边界采用周期边界条件。与修形法相比,时间倾斜方法具有更快的收敛速度。其缺点在于只能处理一个基频,并且其使用范围依赖于流场周向马赫数,也需要通过后处理才能获得需要的流场信息。时间倾斜法在商业软件 ANSYS CFX 也有实现,叫做时间变换方法(Time transformation method)^[13]。

3 频域降阶方法

通过减小计算域,这些时域方法具备计算量小的特点,大大减少计算所需要的内存消耗。在计算机内存资源极为稀缺的 20 世纪 70~80 年代,这些方法能够将本来不可能进行的数值分析得以进行,发挥了其历史性的作用。尽管如此,这些方法存在收敛速度慢,或者对频率组分有苛刻要求的缺点。为了进一步提高数值分析效率,频域降阶数值计算方法得到了蓬勃发展。频域方法主要包括线性谐波方法、非线性谐波方法和经典谐波平衡方法。

3.1 线性谐波方法

最先提出的频域方法是线性谐波方法。最初,线性谐波方法和一些较简单的模型相结合,比如与势方程。1989 年, Hall 等^[15]将线性谐波方法扩展到二维欧拉方程中,并且针对振荡叶栅算例和管道算例开展了非定常分析。计算结果表明:该方法与时域方法得到的结果吻合较好,而且计算效率要比时域方法高。1993 年, Hall 等^[16]又将该方法扩展到三维欧拉方程,结论与二维方程的应用一致。Holmes 等^[17]用该方法解析颤振及强迫响应流场,进一步证明了线性谐波方法的高效性。Marshall 等^[18]对这些方法和应用进行了总结。最后 Hall 等将这种方法应用于雷诺平均 Navier-Stokes(RANS)方程^[19]。线性谐波方法的研究和应用很广,时间跨度很长。从公开文献来看,这种方法的提出更多是集体研究成果的体现,而不是归功于一个或者少数几个人。

线性谐波方法的基本思想是将非定常流动的解分解为时均解和脉动解,将非定常流控制方程分解为脉动方程和时均方程。通过假设脉动解幅值远远小于时均解,从而可以忽略时均方程中的确定性应力项,将时均方程退化为定常方程。采用截断傅里叶级数对脉动解进行逼近,代入脉动方程,通过谐波平衡可以获得线性谐波方程。此时线性谐波方程不再显式依赖于时间,属于准定常方程,可采用求解定常方程的数值计算方法进行求解,计算收敛速度快,大大减少计算耗时。对于线性谐波方法,基于脉动

量小量的假设和忽略时均方程中的确定性应力项,时均方程和脉动方程实现了解耦。在方程求解过程中,先求解时均方程,然后求解线性谐波方程。

3.2 非线性谐波方法

当流场中非线性特性较强时,比如存在移动激波,紧凑上下游叶排之间的转静干涉,流场中的非线性特性对时均流场和脉动流场都有不可忽略的影响,因此线性谐波方法的前提假设也就不成立。为了克服线性谐波方法的这一缺点, He 等^[20-21]提出了非线性谐波方法。非线性谐波方法保留了时均方程中的确定性应力,利用谐波方程的解去近似计算确定性应力。当流场中的非线性特性很强时,还有必要考虑除基频之外的谐波,此时高阶谐波起源于低阶谐波,低阶谐波为高阶谐波输送能量。

张威^[22]基于准一维拉瓦尔喷管对比研究了线性谐波方法和非线性谐波方法。该喷管中存在激波,非定常扰动起源于给定的非定常背压。图 1 对比了线性(LHM)与非线性谐波方法(NLHM)的计算结果。从图中可以看出,在激波附近,流场中的非线性较强,线性谐波计算结果严重偏离时域(Time domain)计算结果,而非线性谐波方法与时域结果吻合度更好,计算结果精度更高。该结论与 He 等^[21]基于三维扩压器算例得到的结论一致。

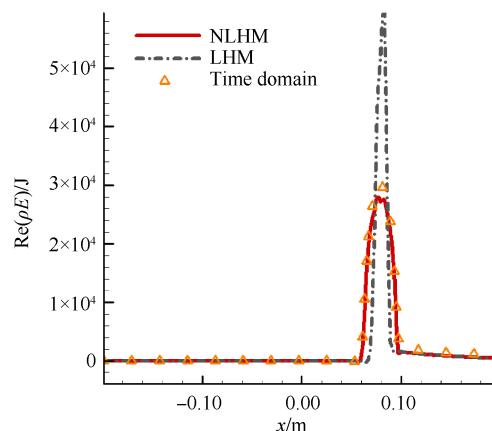


Fig. 1 Comparison between the LHM and the NLHM for quasi one dimensional Laval nozzle^[22]

2001 年, Chen 等^[23]采用非线性谐波方法解析转静干涉流场,结果表明:在转静交界面处,当采用两个谐波解析尾迹的时候,非线性谐波方法可以恢复 90% 的掺混损失,而且计算速度要比传统的时域方法快 20 倍。2002 年, He 等^[24]将非线性谐波方法应用于动/静干涉非定常流场。该方法只需要单一通道计算域并且一次非定常流场计算就可以获得由动/静干涉所引起的周向非均匀流场信息,计算效率

高。2005年, Li等^[25]采用非线性谐波方法研究了不同叶顶间隙对气动阻尼的影响, 数值模拟结果表明: 不同的叶顶间隙可以使得气动阻尼改变达100%, 并且存在最佳的叶顶间隙使得气动阻尼高, 强迫响应。除此之外, 商业软件FINE/TURBO中集成了该方法。2013年, Vilmin等^[26]利用商业软件NUMECA中的非线性谐波模块解析了多排压气机流场, 进一步验证了该方法的有效性。

3.3 经典谐波平衡方法

除非线性谐波方法之外, 经典谐波平衡方法也是一种非线性的谐波方法^[27], 适合于非线性特性较强的流动。经典谐波平衡方法不仅对流场的解采用截断傅里叶级数逼近, 也将方程中的通量项和源项等也采用截断傅里叶级数进行逼近, 然后基于谐波平衡的思想获得时均方程和谐波方程。Hall等^[28]指出, 该方法随着谐波数的增加变得越来越复杂, 并且计算量也快速增加。由于Hall本人很快提出更好的时域谐波平衡方法, 该方法鲜有应用。

4 时频混合方法

时频域混合方法主要包括时域谐波平衡法(也称时间谱方法, 高维谐波平衡法)和非线性频域方法。不同于频域方法, 时频域混合方法不需要重新编写谐波求解器, 其很容易在现有的定常求解器上扩展而实现, 这大大减少了程序开发的工作量, 因而应用较为广泛。

4.1 时域谐波平衡法

时域谐波平衡法最初由Hall等^[28]在2002年提出。该方法与时域双时间步长法类似, 先求解守恒变量在一个周期内不同时刻点处的值, 然后再通过离散傅里叶变换将时域流场变量转化到频域, 从而获得傅里叶系数。与双时间步长法不同的是, 时域谐波平衡法采用谱方法而不是差分方法离散时间偏导数项。由于谱方法的离散精度要高于差分方法, 因而在一个周期内采样点较少的情况下, 时域谐波平衡法就能获得较高的求解精度。此外, 时域谐波平衡方法用时间谱源项替代时间偏导数项, 将非定常控制方程转化为准定常控制方程, 因此可以采用一些求解定常方程的加速技术(当地时间步长法、隐式残差光顺方法和多重网格方法等)对时域谐波平衡方程的求解过程进行加速。该方法还可以与移相周期性边界条件结合使用, 将多通道计算域甚至整周计算域减少为单通道计算域, 从而进一步减少计算量, 节省计算时间。

时域谐波平衡法提出之后, 得到迅速的发展和广泛的应用。2002年Hall等^[28]采用时域谐波平衡法解析了二维振荡叶栅的流场, 计算结果表明该方法不仅能准确地模拟具有较强非线性特性的周期性非定常流场, 而且计算速度要比时域方法快1~2个量级。Ekici等^[29-30]将时域谐波平衡法扩展到解析叶轮机内部的转静干涉流场中, 与时域结果对比发现在采样点较少的情况下, 该方法依然能获得准确的流场信息, 这很大程度上节省了计算时间; 之后, Ekici等又分别用该方法预测直升机机翼的气动性能^[31]、解析叶轮机械内部的多基频流场^[32]和极限环振荡流^[33]。2005年van der Weide等^[33]简要分析了奇偶不同采样点数对时域谐波平衡方法计算稳定性的影响, 发现奇数个采样点的稳定性要高于偶数个采样点的情况, 偶数个采样点容易导致奇偶失联问题, 特别是对于叶轮机内部非定常流频率较大的情形。2008年He^[34]用时域谐波平衡方法对涡轮叶片的流动分离问题进行了分析。为了缩短时间谱源项矩阵计算的时间, 在一个周期内采用 0° , -90° 和 90° 这三个采样点, 简化了时间谱源项的计算, 进一步缩短了时域谐波平衡法的计算时间。数值结果还表明, 时域谐波平衡法的非线性特性有利于稳定流场求解。Gopinath等^[35]和Sicot等^[36]采用滑移动网格技术处理交界面处的数据传递问题, 为了消除交界面处的混叠效应, 采用了滤波技术。计算结果显示, 时域谐波平衡法不仅能精确地捕捉转静干涉流场信息, 而且其计算效率要比传统的时域方法高。2014年, Huang等^[37]采用隐式残差光顺方法和多重网格方法等对二维时域谐波求解器进行加速。对于标准二维叶栅算例, 时域法大概需要一个小时才能获得收敛的结果, 而时域谐波平衡法只需要9min。相比于时域方法, 后者在计算时间方面的优势非常明显。Gomar等^[38]对时域谐波平衡法解析叶轮机尾迹传播问题的收敛性进行了评估。研究表明, 尾迹的形状决定了傅里叶频谱分析的结果, 尾迹越狭窄, 其傅里叶频谱越宽, 收敛速度越慢。2016年, Djeddi等^[39]提出了一种基于时域谐波平衡法的低速预处理技术, 并用NACA0015和NACA0012(马赫数为0.2和0.3)对该低速预处理技术进行了验证。计算结果表明, 虽然增加低速预处理会提高时域谐波平衡法每一步的计算时间(大约9%到11%), 但是在达到相同精度的时候, 使用低速预处理会使得总的迭代步数减少50%~60%。2018年, Djeddi等^[40]又将自适应网格技术应用到时域谐波平衡法的研究中, 进一步提高了该方法

的求解效率。

相比于国外,国内在谐波平衡方面的研究工作起步稍微晚一些。2008年,黄秀全等^[41]利用时域谐波平衡法模拟了三维振荡叶栅流场,数值结果表明频域计算结果不仅与实验结果吻合较好,而且计算效率非常高。2012年,杜鹏程等^[42]用时域谐波平衡法分析了跨声速风扇周向进气畸变流场,发现该方法得到的结果不仅与时域结果吻合较好,而且计算速度提高了将近7倍。2015年,马灿等^[43]混合使用隐式块雅可比及显式多阶龙格-库塔方法求解谐波平衡方程,并将其应用到单级轴流压气机的非定常计算中,计算结果也验证了时域谐波平衡方法在解析周期性非定常流场的高效性。2016年,刘南等^[44]基于达芬振子方程对时域谐波平衡法中非物理解的来源进行了详细的分析及推导,并提出了相应的改进措施。2017年,王丁喜等^[45]提出了基于傅里叶变换和坐标变换的频域交界面处理方法,具有普适性,可用于多排颤振分析和转静相干流场分析。2019年, Sun 等^[46]混合使用差分法和时域谐波平衡法对轴流压气机的喘振进行了预测,计算结果表明,该方法所获得的效率曲线和压比曲线与实验结果吻合较好。

虽然时域谐波平衡法在解析周期性非定常流场的时候效率高,有着广泛的应用,但是同时也存在一些问题:

(1) 对于多基频非定常流,如何进行时刻采样来提高时域谐波平衡法的求解稳定性和效率

对于时域谐波平衡法,不同的采样点通过影响傅里叶变换矩阵的条件数来影响方程求解的稳定性。因此如何进行时刻采样对时域谐波平衡法的稳定求解和求解效率至关重要。如果流场中只有一个基频,那么最佳的采样策略为均匀采样。针对 n 个谐波,采样点数为 $2n+1$,采样区间为基频对应的时间长度。如果流场中存在多个基频,首先存在采样区间的选取问题,即采样区间和多个基频之间的关系,其次是如何在采样区间进行采样。如果仍然均匀采样,并且针对 n 个谐波采样点数还是限制在 $2n+1$,那么对应的傅里叶变换矩阵条件数通常很大,将导致求解不稳定。

Zhang 等^[47]基于 NASA Rotor 67 颤振非定常流计算,系统地研究了傅里叶变换矩阵条件数对计算收敛情况的影响,结果如图2所示。图中 CN 代表傅里叶速变换条件数, CFL 代表库朗数。从图中可以看出,随着条件数的增加,时域谐波平衡方法的收敛速度下降,残差收敛特性变差。

为了提高时域谐波平衡方法的求解稳定性,一

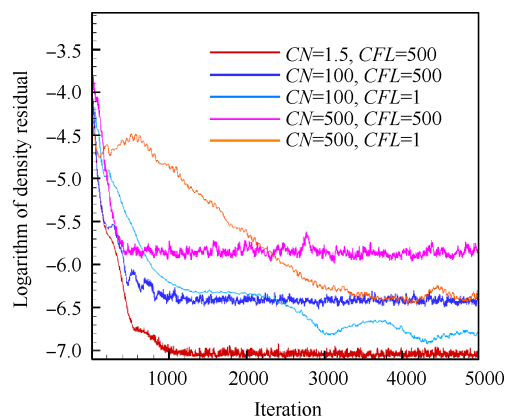


Fig. 2 Effect of the condition number of Fourier transformation matrix on solution convergence characteristic^[47]

种方法是增加采样点数,如Ekici等增加了50%的采样点数^[48];另一方法是采用非均匀采样,这种方法通过改变采样点的分布降低矩阵的条件数,并且通常情况下不需要额外增加采样点数就能获得较高的求解精度。2013年,Guédeney等^[49]提出了两种非均匀采样策略:近似周期傅里叶变换算法(APFT)和梯度优化算法(OPT)。前者通过提高傅里叶变换矩阵的正交性从而降低条件数,而后者是通过梯度优化算法降低矩阵的条件数。一维管道算例和多级轴流压气机算例都验证了这两种非均匀采样策略的有效性。

(2) 对于非线性较强的算例,如何减轻混叠效应对计算结果精度的影响

时域谐波平衡法的时间谱源项耦合了不同时刻点处的值,这会导致混叠效应。对于非线性较强的算例,混叠效应对计算结果的精度影响较大(如图3所示)。图3中展示了一阶谐波幅值与角频率的关系。蓝色实线为时域结果(Time domain),黑色虚线为时域谐波平衡法(HB)的结果。从图中可以看出,时域谐波平衡法的计算结果与时域相比,偏差较大。2006年,Liu等^[50]详细对比了时域谐波平衡方法和经典的谐波平衡方法,并且通过达芬振子方程详细说明了时域谐波平衡法的混叠效应的具体来源和混叠项的表达式,清楚展示了混叠效应的产生根源,为后续采用不同的策略减轻甚至消除混叠效应提供了理论基础。

为了减轻甚至消除混叠效应对计算结果精度的影响,一种直接的策略就是增加时刻采样点个数,但是这会增加时域谐波平衡法的计算时间。Ekici等^[48]提出的过采样点方法虽然在一定程度上能减少计算

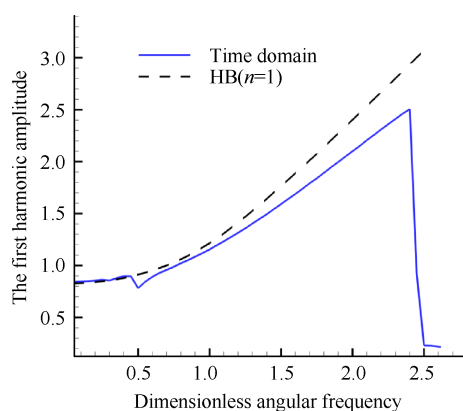


Fig. 3 Effect of aliasing errors on solution accuracy for Duffing oscillator case

时间,但是仍然比较低效。2004年,Maple等^[51]提出了一种自适应谐波平衡方法。这种方法通过预先定义的准则来判断不同网格点处流场的非线性的强弱。在非线性较强的网格点增加采样点个数,而在非线性较弱的网格点减少采样点个数,这样实现谐波在不同网格点处的自适应。这种方法能节省计算时间,但是由于每个网格点都要判断流场的非线性特性,程序实现起来相当繁琐。2010年Gentilli^[52]在硕士论文中也应用了这种自适应谐波方法,但是由于程序算法实现的困难性和复杂性,该方法发展较为缓慢,目前未见其他应用。另一种减轻混叠效应的措施就是应用谱黏性方法。该方法通过增加时间方向的黏性来耗散未知高阶谐波的影响,从而提高求解精度。2014年,Huang等^[53]将谱黏性方法应用到时域谐波平衡方法中来提高计算结果精度。他指出谱黏性方法能一定程度上提高求解的精度,但是该方法对谱黏性系数的依赖性太大,在实际应用中应该注意该参数的选取。2018年,Wu等^[54]研究发现对于不同的算例,最佳谱粘性系数的选取差别很大,因而引入了一个对计算结果精度和稳定性更加敏感参数:角频率指数。并采用线性稳定性分析方法详细分析了不同的角频率指数对计算稳定性的影响。弹簧振子算例,准一维喷管和二维叶栅算例的数值结果与稳定性分析的结果一致。此外,结果还表明在数值结果精度基本一致的前提下,采用谱粘性方法可以减少解析非定常流场所需要的谐波个数,从而减少计算时间,节省计算量。

(3) 对于网格折合频率较大的情形,如何提高时域谐波平衡法的求解稳定性

网格折合频率是一个无量纲化参数,大小与网格尺寸、谐波个数、流场对流速度及非定常流频率有

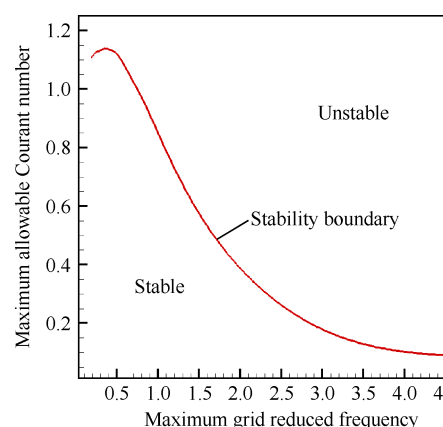


Fig. 4 Relationship between the maximum grid reduced frequency and the maximum allowable Courant number^[55]

关。这个无量纲化参数可用来衡量谐波平衡方程谱源项的刚性大小。网格折合频率越大,谱源项的刚性问题越严重。Gentilli^[52]和Hall等^[27]得出了网格折合频率与最大许用的Courant数的关系。Wu等^[55]基于准一维直管道算例画出了最大网格折合频率与最大许用Courant数的关系(如图4所示),时间推进采用显式多阶龙格-库塔方法,空间离散采用中心格式加标量人工粘性。从图中可以看出,随着网格折合频率的不断增大,最大许用的Courant数急剧下降。这严重影响了时域谐波平衡法的求解效率。

为了稳定谐波平衡方程的求解过程,一些隐式方法先后被提出。2008年,Sicot等^[56]提出了块雅可比超松弛(BJ-SOR)迭代方法。该方法采用块雅可比方法隐式处理时间谱源项,其它项的处理采用LU-SOR方法。相比于未隐式处理时间谱源项的LU-SOR方法,BJ-SOR方法允许使用更大的Courant数,收敛速度更快。但是该方法的缺点是流场求解的稳定性与雅可比的迭代次数相关,雅可比迭代次数越多,稳定性越好。而随着雅可比迭代次数的增加,该方法的计算时间会极速增加,计算效率下降。而且作者所得出的结论也仅仅适合折合频率较小的外流算例。2014年,Ma等^[57]将块雅可比方法扩展到叶轮机械内流计算中,并且与多阶显式龙格-库塔方法混合使用。对于非定常流频率小的算例,和其他方法相比,该方法能稳定计算结果。然而随着非定常流频率的不断增大,该方法在稳定流场求解方面的优势将会完全丧失。2011年,Weiss等^[58]通过近似因式分解方法将不同时刻点处的结果进行隐式耦合,提出了一种隐式耦合的时域谐波平衡法。该方法不仅能获得准确的计算结果,而且计算时间相比于时域方法也减少了。但是同样对于折合频率较大的算

例,这种方法也不适用。2016年,Zhan等^[59]提出的时空LU-SGS方法将时间耦合项当作另一个维度的空间项,然后进行隐式处理。这种处理改善了雅可比矩阵的对角占优特性,提高了流场求解的稳定性。虽然这种方法对于小折合频率算例能起到一定的扩稳作用,但是对于叶轮机内部折合频率较大的情形,该方法仍然面临很多稳定性问题。2017年,Wang等^[60-61]提出的BJ/LU-SGS方法,通过将LU-SGS方法与块雅可比方法结合使用,一方面提高了流场求解的稳定性,并且其稳定性要强于前述几种隐式处理方法,另一方面加速了计算结果的收敛。此外,这种方法很容易在现有的LU-SGS程序中扩展而实现,应用起来非常方便。但是这种方法的缺点是在每次雅可比迭代过程中都要进行LU-SGS计算,而且还要存储新产生的变量,因此会消耗额外的计算时间和计算存储。2018年,Huang等^[62]提出的Gauss-Seidel/LU-SGS迭代方法,通过近似因式分解使得空间项与时间项分开,对于空间项仍然采用LU-SGS进行处理,而时间项采用Gauss-Seidel迭代。无论Gauss-Seidel迭代次数设置为多少,该方法只需要处理一次LU-SGS,并且不需要存储额外的变量,因此其在计算时间和计算存储方面的优势更加明显。但是必须要指出的是,无论是BJ/LU-SGS方法还是Gauss-Seidel/LU-SGS方法,其都是半隐式处理方法,对某些算例仍然会失效。2010年,Su等^[63]发现时间谱源项会使得雅可比矩阵的对角占优特性变差,这是使得时域谐波平衡法计算稳定性变差的根本原因。因此他们用GMRES方法来稳定时域谐波平衡方程的求解过程,预处理采用多重网格。计算结果表明该方法的稳定性更好,并且时域谐波平衡法的稳定性对非定常流的基频大小及谐波个数不敏感。随后,Mundis等^[64-65]和贡伊明等^[66]又分别用GMRES方法对时域谐波平衡法的求解过程进行稳定。虽然GMRES方法相比于前述几种隐式处理方法的稳定效果好,但是该方法对计算存储的需求巨大,对于三维多排叶轮机算例,其应用起来特别困难,并且其程序算法复杂,并行效率低。这些缺点限制了GMRES方法在叶轮机械中的应用前景。

前面已经指出,网格折合频率的大小与网格尺寸成正相关。当采用多重网格方法加速时域谐波平衡方程求解过程的时候,随着网格的粗化,其计算稳定性会变差,并且通常这种不稳定性最先源于最粗的网格。如果通过降低粗网格上的Courant数来提高时空多重网格方法的求解稳定性,这会减弱多重网

格方法的加速效果。2018年,Wu等^[67]提出的时空多重网格方法不仅稳定了谐波平衡求解过程,而且也能节省计算量和计算时间。

(4) 如何消除由吉布斯现象所产生的非物理解问题

采用时域谐波平衡法进行叶轮机动静相干非定常流分析时,如果用于解析尾迹的谐波个数较少,吉布斯现象会导致湍流变量出现非物理解(负值)。图5展示了跨声速压气机转子叶片50%叶高尾缘后某处湍流变量沿周向的分布情况。当采用五个谐波重构流场变量的时候(绿色实线),湍流变量会出现严重的振荡现象。如果对这种现象不加任何处理会导致数值分析失稳。为了抑制数值失稳现象,最简单的处理是在计算中强制湍流变量不低于某一个阈值,但是在时频域混合方法求解中势必会减慢收敛速度,甚至使得结果进入极限环状态。如果直接通过增加谐波个数消除吉布斯现象,一方面使得计算量大大增加,抵消了时频域混合方法高效率求解的优点,同时高阶谐波的高频会使得时间谱源项的刚性问题更加突出,从而引起求解收敛缓慢,甚至求解不稳定性。

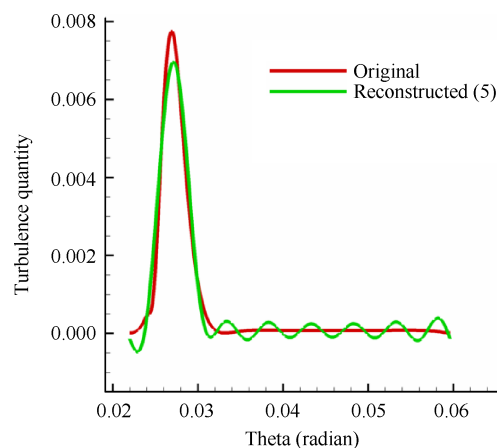


Fig. 5 Distribution of turbulence quantity at the 50% span location for a transonic compressor rotor

针对吉布斯现象,Djeddi等^[68]基于西格玛近似技术,采用Lanczos西格玛因子对所有流场变量都进行了近似处理。二维可压和不可压流算例研究表明,该方法不仅可以提高求解稳定性,而且可以提高求解精度。但是随着数值分析中谐波数的增加,该方法反而对求解有负面影响。

(5) 如何实现多排叶轮机动-动/静-静相干高效数值分析

时频域混合方法在应用过程中有两个假设:同排不同通道内时均流场相同,同排不同通道内任意频率组分的非定常流幅值相同。在动-动/静-静相干

中,如果对应的转子或者静子叶片数不同,那么这两个假设都不成立。因此时频域混合方法本身是不能直接用于动-动/静-静相干数值分析的。如果直接应用其解析动-动/静-静干涉问题,会导致交界面处的流场不连续,如图6所示。

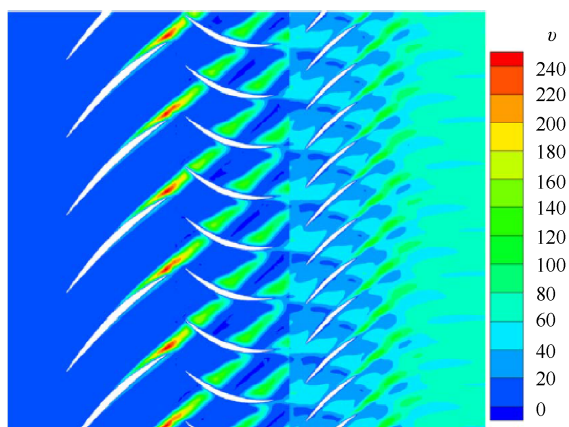


Fig. 6 Turbulence quantity contours at 50% span location for a multi-row compressor using the single passage to analyze the rotor-rotor/stator-stator interaction flow field^[69]

为了将时频谐波平衡方法应用于动-动/静-静相干数值分析中,Subramanian等^[70]提出转速扰动方法。即对转子/静子施加一个很小的转速扰动,使得原来相对静止的两个叶排有了相互转动,从而将动-动/静-静相干转化为动静相干。虽然这种方法得到了一定的应用。但是存在一些问题。首先,扰动转速的选取是亟待解决的问题。如果转速太大会引起比较大的误差,太小又给稳定求解带来困难(由于不同非定常流组分周期的最小公倍数太大)。其次,在Subramanian等的计算中,为了保证稳定求解,增加了50%的采样点数,这也意味着计算量上升了50%。2018年,Frey等^[71-72]提出的谐波组方法是另一种解析动-动/静-静相干流场的思路。该方法将非定常流组分依据其基频进行分组求解,这样空间谐波可以自成一组。这种方法的缺点是假设不同组流场可以线性叠加,因此忽略了它们之间的非线性耦合效应。此外,由于有些频率组分可能会同时属于不同非定常流组,这样会造成计算成本的上升。2019年,黄秀全等^[69]提出的时空耦合谱方法是一种高效解析动-动/静-静相干的数值方法。该方法通过引入伪转频和复合频率,初步解决了时空样本耦合选取和时空谐波耦合求解的问题。

4.2 非线性频域方法

McMullen等^[73-74]对守恒变量和残差同时做傅里

叶展开,然后通过谐波平衡的思想获得了非线性频域方法(NLFD)的控制方程。不同于时域谐波平衡方法,该方法的求解变量为谐波系数。虽然这两种方法的求解变量不同,但是时域谐波平衡方法所存在的问题,该方法也同样存在,上面已经详细阐述,此处不再赘述。2003年,Nadarajah等^[75]发展了一种离散非线性频域伴随代码,对二维振荡翼型进行优化;2006年,McMullen等^[76]又采用谱粘性方法对非线性频域方法进行加速。为了防止谱粘性项对计算结果精度的影响,他们只在粗网格层上应用谱粘性。计算结果显示应用谱粘性之后,可以使得非线性频域方法拥有定常收敛效果。2017年,Wu等^[77]对比研究了非线性频域方法与时域谐波平衡法,结果表明时域谐波平衡法在计算时间方面的优势更加明显(如图7所示),并且对于多基频算例,混叠效应对非线性频域方法的影响也更大。2019年,Wu等^[55]采用时空多重网格方法对非线性频域方法进行加速。该方法不仅能起到扩稳作用,而且计算时间更短。相比于时空多重网格方法在时域谐波平衡方法中的应用,采用时空多重网格方法加速非线性频域控制方程求解,其在计算时间节省方面的优势更加明显。这是由于离散傅里叶变换及其逆变换(DFT/IDFT)是非线性频域方法原始迭代过程就需要的,不会产生额外的时间消耗。

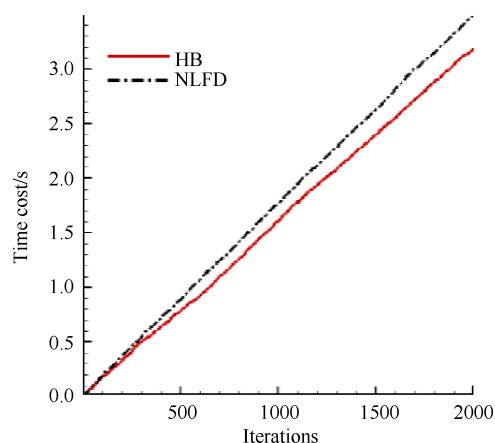


Fig. 7 Comparison of computational time between the HB and NLFD^[77]

5 其他数值降阶方法

除了上述三类方法之外,还有一些无法归纳到上面三类方法的数值计算方法,比如杨体浩等提出基于Chebyshev的谱方法^[78],宁方飞等提出的时间拟合方法^[79],He提出的时空梯度方法^[80-81]。下面对时

间拟合方法和时空梯度方法进行阐述。

5.1 时间拟合方法

无论是时频域混合法还是非线性频域方法,其都是采用傅里叶级数对非定常流场进行逼近。虽然谱方法离散时间偏导数的精度较高,但是其耗散太小,在某些情况下其求解稳定性较差,前面已经详细指出。2014年,杜鹏程等^[79]提出的时间拟合方法(TCM)采用三次B样条曲线对守恒变量进行逼近,然后在时间方向上采用周期性边界条件。该方法与时域谐波平衡法类似,前者采用多项式作为基函数,而后者采用三角基函数作为基函数。两者方法都很容易在现有的定常求解器上扩展而实现,编程实现相对容易。但是与时域谐波平衡法相比,时间拟合方法的耗散更大,数值求解精度低,在实现相同数值求解精度的前提下,需要更多的采样点(图8)。其优点在于该方法的稳定性更好,对于某些情况,可以使用更大的 Courant 数,结果如图9所示。杜鹏程等分别采用进气畸变算例及转静干涉流场算例验证了时间拟合方法的有效性。2019年,Wu等^[82]将时间拟合方法扩展到三维流固耦合算例中,并通过矩阵分析详细对比了时间拟合方法与时域谐波平衡法的稳定性。矩阵分析的结论与杜鹏程等人的数值实验结果一致。

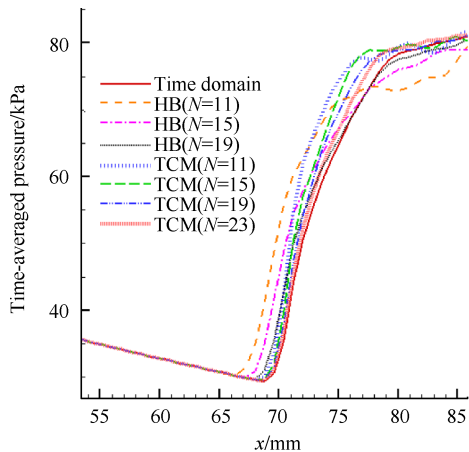


Fig. 8 Comparison of solution accuracy using different time samples between the TCM and HB^[82]

时间拟合方法的另一个缺点是难以用于多基频非定常流。作者目前还未见公开文献有相关报告。其中通讯作者从与时间拟合方法提出人宁方飞的交流中获知,他本人也没有打算将该方法用于多基频非定常流分析。

5.2 时空梯度方法

时空梯度方法是 He 等最近提出来的方法^[80-81]。

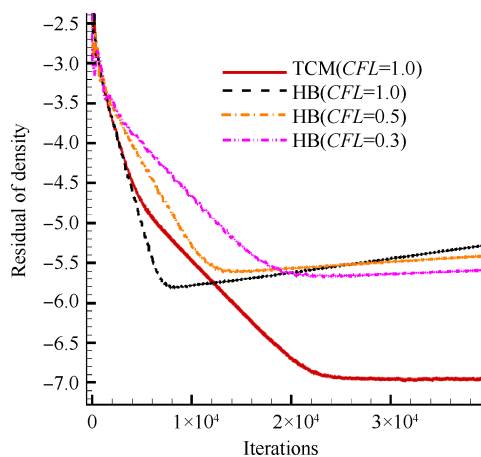


Fig. 9 Comparison of solution convergence characteristics between the HB and TCM^[82]

该方法适用于转静相干非定常流计算,计算量和对多通道定常计算或者冻结转子计算的计算量相当,但是能够捕捉到转静相干产生的非定常流。其基本思想是采用空间梯度来近似时间梯度,从而将非定常计算转化为准定常计算。基于不同通道流场对应于同一通道内不同时刻流场的假设,空间梯度的构造采用不同通道的计算结果进行。为此,数值分析中计算域需要采用多通道甚至整周,通道数越多,时间梯度的计算越精确。由于时间梯度计算采用二阶后插格式,在进行时间梯度计算之前,需要对所有通道重新进行排序,即将所有通道的流场映射到同一个叶片通过周期内。

在转静相干非定常流计算中,转静交界面的处理极为重要。在单通道定常计算中,转静交界面采用掺混面方法;在频域或者时频域混合方法中,需要更为复杂的方法,比如时空模态分解和匹配方法^[46];而时域多通道非定常计算需要采用滑移面方法。时空梯度方法计算可以完全采用时域多通道计算的滑移面方法。因此如果流场求解已经具备滑移面模块,那么时空梯度方法的扩展就显得相当容易。

如果计算域中叶片通道数太少(上下游叶排叶片数的最大公约数太大),采用二阶后插格式计算时间梯度将带来很大误差(时间步长过大),此时可以采用谱方法进行时间梯度计算。对于多基频非定常流计算(比如中间叶排的上下游叶排叶片数目不同,对应的叶片通过频率也不一样),该方法需要针对不同基频分别进行计算,然后将计算结果进行叠加。

图10展示了由时空梯度方法解析转静干涉流场时所得到的50%叶高处的熵云图。从图中可以看出,上游叶排的尾迹能够通过交界面输运到下游叶

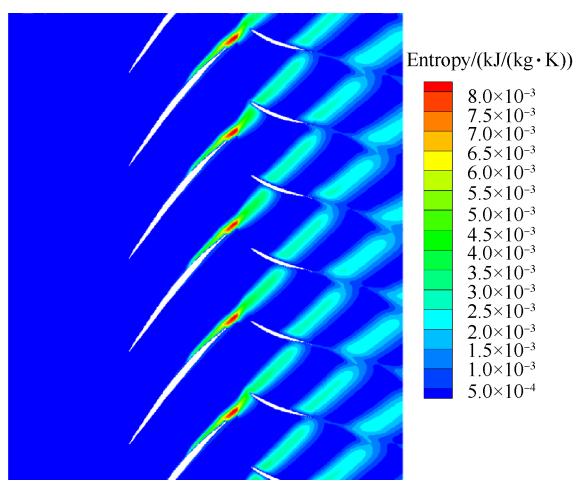


Fig. 10 Entropy contours at 50% span location from the space-time gradient method

排。由于该计算中下游叶排计算域只有23个通道,上游尾迹通过交界面后存在比较明显的差别。这是由于下游计算域通道数不够,导致尾迹解析精度不高所致。

6 总 结

根据上面的阐述,各种数值降阶方法的主要特点总结如下:

(1)时域降阶方法主要是通过减小计算域来减少计算量,其中直接存储法、修形法和时间倾斜法通过采用移相边界条件将计算域减小为单通道,从而实现节省计算时间的目的。直接存储法和时间倾斜法只适用于单基频非定常流,而修形法可以适用于多基频非定常流。需要指出的是,这三种方法都不能直接应用于动动/静静相干流场。

(2)频域降阶方法主要有线性谐波方法、非线性谐波方法和经典谐波平衡方法。针对每一个频率组分,都有一组对应的谐波方程。其中线性谐波方法适用于小幅值非定常流,而其他两种方法可适用于非线性非定常流。由于每个频率组分有单独的控制方程,这些方法不存在混叠效应。但是谐波控制方程的求解需要重新编写对应求解器,工作量大,妨碍了其广泛应用。

(3)时频域混合方法主要包括时域谐波平衡法和非线性频域方法。它们由于可以重用定常求解器的许多关键代码,具有编程易实现的特点,其应用较为广泛。但是存在混叠效应、源项刚性(大网格折合频率)和吉布斯现象引起的求解失稳或求解精度下降的问题。

(4)相比于时域谐波平衡法,时间拟合方法的求

解稳定性更好,但是在采样点相同的条件下,其求解精度较低,并难以用于多基频非定常流。

(5)时空梯度方法基于叶轮机内同排不同通道内非定常流等效于同一通道不同时刻非定常流的前提,将时间梯度转化为空间梯度。该方法的使用需要多通道计算域,并且通道越多越好。计算结果的精度也是随着通道数的增加而提高。该方法的计算耗时和冻结转子方法相当,但是能够比较准确地捕捉到动静相干非定常流。在动静相干数值分析中,动静交界面可以采用时域计算的滑移面。该方法也不能直接处理动动/静静相干和多基频非定常流。

针对这些降阶数值方法,还存在下面亟待解决的问题:

(1)发展一种更好的减轻甚至消除时域谐波平衡法的混叠效应问题的方法,进一步提高时域谐波平衡法的求解效率。

(2)针对刚性较大的情形,发展一种更加高效的普适性更强的时域谐波平衡方程稳定求解方法。

(3)将时间拟合方法扩展到多基频非定常流应用中。

(4)将自动微分技术与频域降阶方法结合使用,减少谐波求解器开发工作量,确保谐波求解器和时均求解器的一致性。

(5)对于时空耦合的谱方法,提出一种选取时空谐波个数的准则,从而提高该方法的求解效率。

(6)寻找更好的 Lanczos 西格玛因子参数或者寻找更好的西格玛因子,使得西格玛近似技术更加有效。

致 谢:感谢自然科学基金面上项目及国家重大科技专项的资助。

参考文献

- [1] Platzer M, Carta F. AGARD Manual on Aeroelasticity in Axial-Flow Turbomachines Volume I: Unsteady Turbomachinery Aerodynamics [R]. AGARD-AG-298, 1987.
- [2] Wennerstrom A. Low Aspect Ratio Axial Flow Compressors: Why and What It Means[J]. *Journal of Turbomachinery*, 1989, 111: 357-365.
- [3] 刘永泉,刘太秋,季路成. 航空发动机风扇/压气机技术发展的若干问题与思考[J]. *航空学报*, 2015, 36(8): 2563-2576.
- [4] 季路成,陈江,黄海波,等. 关于叶轮机时均(准四维)和非定常(四维)气动设计体系的初步诠释[J]. *工程热物理学报*, 2003, 24(4): 570-574.

- [5] Yao J X, Davis R L, Alonso J J, et al. Massively Parallel Simulation of the Unsteady Flow in an Axial Turbine Stage[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2002, 18(2): 465–471.
- [6] Mayorca M A, De Andrade J A, Vogt D M, et al. Effect of Scaling of Blade Row Sectors on the Prediction of Aerodynamic Forcing in a Highly Loaded Transonic Compressor Stage[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2011, 133(2).
- [7] Erdos J, Alzner E, McNally W. Numerical Solution of Periodic Transonic Flow Through a Fan Stage[J]. *AIAA Journal*, 1977, 15(11): 1559–1568.
- [8] Erdos J, Alzner E. Computation of Unsteady Transonic Flows Through Rotating and Stationary Cascades I—Method of Analysis[R]. *NASA CR-2900*, 1997.
- [9] He L. An Euler Solution for Unsteady Flows Around Oscillating Blades[J]. *Journal of Turbomachinery*, 1989, 112: 714–722.
- [10] Burgos M A, Corral R. Application of Phase-Lagged Boundary Conditions to Rotor/Stator Interaction [C]. *ASME GT 2001-0586*.
- [11] He L. Method of Simulating Unsteady Turbomachinery Flows with Multiple Perturbations [J]. *AIAA Journal*, 1992, 30(11): 2730–2735.
- [12] Gerolymos G A, Michon G J, Neubauer J. Analysis and Application of Choro Chronic Periodicity in Turbomachinery Rotor/Stator Interaction Computations[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2002, 18(6): 1139–1152.
- [13] ANSYS Inc. ANSYS CFX—Solver Theory Guide, Release 14.0[M]. *Canonsburg: Springer*, 2011.
- [14] Dannenhoffer J F, Giles M B. Accelerated Convergence of Euler Solutions Using Time Inclining[J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(8): 1457–1463.
- [15] Hall K C, Crawley E F. Calculation of Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Euler Equations [J]. *AIAA Journal*, 1989, 27(6).
- [16] Hall K C, Clark W S, Lorence C B. A Linearized Euler Analysis of Unsteady Transonic Flows in Turbomachinery [J]. *Journal of Turbomachinery*, 1994, 116(3).
- [17] Holmes D G, Chuang H A. 2D Linearized Harmonic Euler Flow Analysis for Flutter and Forced Response [C]. *New York: Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustic, and Aeroelasticity of Turbomachines and Propellers*, 1993.
- [18] Marshall J G, Imregun M. A Review of Aeroelasticity Methods with Emphasis on Turbomachinery Applications [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1996, 10: 237–267.
- [19] Clark W S, Hall K C. A Time-Linearized Navier-Stokes Analysis of Stall Flutter[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2000, 122(3): 467–476.
- [20] He L, Ning W. An Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines[J]. *AIAA Journal*, 1998, 36(11): 2005–2012.
- [21] Ning W, He L. Computation of Unsteady Flows Around Oscillating Blades Using Linear and Nonlinear Harmonic Euler Methods [J]. *Journal of Turbomachinery*, 1997, 120(3).
- [22] 张 威. 基于自动微分方法的非线性谐波求解器开发与验证[D]. 西安: 西北工业大学, 2020.
- [23] Chen T, Vasanthakumar P, He L. Analysis of Unsteady Blade Row Interaction Using Nonlinear Harmonic Approach [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2001, 17(3): 651–658.
- [24] He L, Chen T, Wells R G, et al. Analysis of Rotor-Rotor and Stator-Stator Interferences in Multi-Stage Turbomachines[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2002, 124(4): 564–571.
- [25] Li H D, He L. Blade Aerodynamic Damping Variation with Rotor-Stator Gap: A Computational Study Using Single-Passage Approach [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2005, 127(3): 573–579.
- [26] Vilmin Stéphane, Lorrain Éric, Tartinville Benoît. The Nonlinear Harmonic Method: from Single Stage to Multi-Row Effects[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2013, 27(2): 88–99.
- [27] Hall K C, Ekici K, Thomas J P, et al. Harmonic Balance Methods Applied to Computational Fluid Dynamics Problems [J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2013, 27(2): 52–67.
- [28] Hall K C, Thomas J P, Clark W S. Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique [J]. *AIAA Journal*, 2002, 40(5): 879–886.
- [29] Ekici K, Hall K C. Nonlinear Analysis of Unsteady Flows in Multistage Turbomachines Using Harmonic Balance[J]. *AIAA Journal*, 2007, 45(5): 1047–1057.
- [30] Ekici K, Hall K C, Kielb R E. Harmonic Balance Analysis of Blade Row Interactions in a Transonic Compressor [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2010, 26(2): 335–343.
- [31] Ekici K, Hall K C, Dowell E H. Computationally Fast Harmonic Balance Methods for Unsteady Aerodynamic Predictions of Helicopter Rotors[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(12): 6206–6225.
- [32] Ekici K, Hall K C. Harmonic Balance Analysis of Limit Cycle Oscillations in Turbomachinery[J]. *AIAA Journal*, 2011, 49(7): 1478–1487.
- [33] van der Weide E, Gopinath, Jameson A. Turbomachinery Applications with the Time Spectral Method[C]. *Toronto: 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Confer-*

- ence, 2005.
- [34] He L. Harmonic Solution of Unsteady Flow Around Blades with Separation [J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(6): 1299–1307.
- [35] Gopinath A, van der Weide E, Alonso J, et al. Three Dimensional Unsteady Multi-Stage Turbomachinery Simulations Using the Harmonic Balance Technique[C]. *Reno: 45th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2007.
- [36] Sicot F, Dufour G, Gourdain N A. Time-Domain Harmonic Balance Method for Rotor/Stator Interactions [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2012, 134(1): 1–13.
- [37] Huang H, Ekici K. An Efficient Harmonic Balance Method for Unsteady Flows in Cascades[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2013, 29(1): 144–154.
- [38] Gomar A, Bouvy Q, Sicot F, et al. Convergence of Fourier-Based Time Methods for Turbomachinery Wake Passing Problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 278: 229–256.
- [39] Djeddi R, Howison J, Ekici K. A Fully Coupled Turbulent Low-Speed Preconditioner for Harmonic Balance Applications[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 53: 22–37.
- [40] Djeddi R, Ekici K. Solution-Based Adaptive Mesh Redistribution Applied to Harmonic Balance Solvers [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 13(39): 1–22.
- [41] 黄秀全, 周星海. 利用傅立叶方法求解振荡叶栅非定常流[J]. 西北工业大学学报, 2008, 26(3): 357–361.
- [42] 杜鹏程, 宁方飞. 跨声风扇周向畸变流动的谐波平衡法计算, 推进技术, 2012, 33(3): 391–397. (DU Peng-cheng, NING Fang-fei. Numerical Simulation of Transonic Fan under Circumferential Inlet Distortion Using Harmonic Balance Method[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2012, 33(3): 391–397.)
- [43] 马 灿, 苏欣荣, 袁 新. 用于非定常流动的谐波平衡方法研究[J]. 工程热物理学报, 2015, 36(4): 739–743.
- [44] 刘 南, 白俊强, 华 俊, 等. 高阶谐波平衡方法中非物理解来源分析及改进方法研究[J]. 力学学报, 2016, 48(4): 897–906.
- [45] Wang D, Huang X. A Complete Rotor-Stator Coupling Method for Frequency Domain Analysis of Turbomachinery Unsteady Flow[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 70(11): 367–377.
- [46] Sun H, Wang M, Wang Z, et al. Numerical Investigation of Surge Prediction in a Transonic Axial Compressor with a Hybrid BDF/Harmonic Balance Method[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 90(6): 401–409.
- [47] Zhang S, Huang X, Li Y, et al. Effect of the Condition Number of the Inverse Fourier Transform Matrix on the Solution Behavior of the Time Spectral Equation System [R]. *ASME GT 2020–14754*.
- [48] Ekici K, Hall K C. Nonlinear Frequency-Domain Analysis of Unsteady Flows in Turbomachinery with Multiple Excitation Frequencies [J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(8): 1912–1920.
- [49] Guédeney T, Gomar A, Gallard F, et al. Non-Uniform Time Sampling for Multiple-Frequency Harmonic Balance Computations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 236(2): 317–345.
- [50] Liu L, Thomas J P, Dowell E H, et al. A Comparison of Classical and High Dimensional Harmonic Balance Approaches for Duffing Oscillator[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 215(1): 298–320.
- [51] Maple R C, King P I, Orkwis P D, et al. Adaptive Harmonic Balance Method for Nonlinear Time-Periodic Flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 193(2): 620–641.
- [52] Gentili N C. Efficient Solution of Unsteady Nonlinear Flows Using a Multiple-Zone Harmonic Balance Technique[D]. *Durham: Duke University*, 2010
- [53] Huang H, Ekici K. Stabilization of High-Dimensional Harmonic Balance Solvers Using Time Spectral Viscosity [J]. *AIAA Journal*, 2014, 52(8): 558–574.
- [54] Wu H, Wang D, Huang X, et al. Investigation of Spectral Vanishing Viscosity for Stabilizing and Accelerating Solution of Time Spectral Equation System [R]. *ASME GT 2018–76011*.
- [55] Wu H, Wang D, Huang X. Solution Stabilization and Convergence Speedup for Non-Linear Frequency Domain Equation System Using a Time-Space Multigrid Method [C]. *Beijing: Global Power and Propulsion Forum*, 2019.
- [56] Sicot F, Puigt G, Montagnac M. Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(12): 3080–3089.
- [57] Ma C, Su X, Gou J, et al. Runge-Kutta/Implicit Scheme for the Solution of Time Spectral Method [R]. *ASME GT 2014–26474*.
- [58] Weiss J M, Subramanian V, Hall K C. Simulation of Unsteady Turbomachinery Flows Using an Implicitly Coupled Nonlinear Harmonic Balance Method [R]. *ASME GT 2011–46367*.
- [59] Zhan L, Xiong J, Liu F. A Space-Time Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Scheme for the Time-Spectral Method[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2016, 30(5): 337–355.
- [60] Wang D, Huang X. Solution Stabilization and Convergence Acceleration for the Harmonic Balance Equation

- System[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines & Power*, 2017, 139(9).
- [61] 吴航空, 王丁喜, 黄秀全, 等. 时间谱方法的扩稳与加速技术研究[J]. *工程热物理学报*, 2018, (9): 1929-1934.
- [62] Huang X, Wu H, Wang D. Implicit Solution of Harmonic Balance Equation System Using the LU-SGS Method and One-Step Jacobi/Gauss-Seidel Iteration[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2018, 32(5): 1-15.
- [63] Su X, Yuan X. Implicit Solution of Time Spectral Method for Periodic Unsteady Flows[J]. *Journal of Engineering Thermo Physics*, 2010, 63(7): 860-876.
- [64] Mundis N L, Mavriplis J D. GMRES Applied to the Time-Spectral and Quasi-Periodic Time Spectral Methods[C]. *San Diego: In Proceedings of 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2013.
- [65] Mundis N L, Mavriplis J D. Wave-Number Independent Preconditioning for GMRES Time-Spectral Solvers[C]. *Kissimmee: In Proceedings of 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2015.
- [66] 贡伊明, 刘战合, 刘溢浪, 等. 时间谱方法中的高效 GMRES 算法[J]. *航空学报*, 2017, 38(7): 196-204.
- [67] Wu H, Wang D, Huang X. Development of a Time-Space Multigrid Method for Efficient Solution of the Time Spectral Equation System[C]. *Chongqing: Chinese International Turbomachinery Conference*, 2018.
- [68] Djeddi R, Ekici K. Resolution of Gibbs Phenomenon Using a Modified Pseudo-Spectral Operator in Harmonic Balance CFD Solvers[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2016, 10(6): 495-515.
- [69] Huang X, Wang D. Time-Space Spectral Method for Rotor-Rotor/Stator-Stator Interactions[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2019, 141(11): 1-20.
- [70] Subramanian V, Custer C H, Weiss J M, et al. Unsteady Simulation of a Two-Stage Cooled High Pressure Turbine Using an Efficient Non-Linear Harmonic Balance Method[R]. *ASME GT 2013-94574*.
- [71] Frey C, Ashcroft G, Kersken H P, et al. A Harmonic Balance Technique for Multistage Turbomachinery Applications[R]. *ASME GT 2014-25230*.
- [72] Frey C, Ashcroft G, Kersken H P, et al. Simulation of Indexing and Clocking with Harmonic Balance[J]. *International Journal of Turbomachinery Propulsion and Power*, 2018, 3(1): 1-12.
- [73] McMullen M, Jameson A, Alonso J J. Application of a Non-Linear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier-Stokes Equation[R]. *AIAA 2002-120*.
- [74] McMullen M, Jameson A, Alonso J J. Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods[J]. *AIAA Journal*, 2006, 44(7): 1428-1435.
- [75] Nadarajah S, McMullen M, Jameson A. Optimal Control of Unsteady Flows Using Time Accurate and Non-Linear Frequency Domain Methods[R]. *AIAA 2003-3875*.
- [76] McMullen M, Jameson A. The Computational Efficiency of Non-Linear Frequency Domain Methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 212(2): 637-661.
- [77] Wu H, Wang D. Comparison of Different Frequency Domain Methods for Efficient Analysis of Temporal Periodic Flow Field[C]. *Shanghai: Global Power and Propulsion Forum*, 2017.
- [78] 杨体浩, 白俊强, 史亚云, 等. 适用于非周期流固耦合问题的时间谱方法[J]. *航空学报*, 2018, 39(5): 1-13.
- [79] Du P, Ning F. Simulating Periodic Unsteady Flows Using a Cubic-Spline-Based Time Collocation Method[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2014, 136(4).
- [80] Yi J, He L. Space-Time Gradient Method for Unsteady Blade Row Interaction, Part I: Basic Methodology and Verification[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2015, 137(11).
- [81] He L, Yi J, Adami P, et al. Space-Time Gradient Method for Unsteady Blade Row Interaction, Part II: Further Validation, Clocking, and Multi Disturbance Effect[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2015, 137(12).
- [82] 吴航空, 王丁喜, 黄秀全. 时间拟合方法与谐波平衡方法的对比研究[C]. 昆明: 中国航天第三专业信息网第四十届技术交流会暨第四届空天动力联合会议, 2019.

(编辑: 张 贺)