doi:10.6043/j.issn.0438-0479.201905033

费米子-玻色子模型中金兹堡-朗道方程组的整体吸引子

熊春燕,陈淑红*
(闽南师范大学数学与统计学院,福建 漳州 363000)

摘要:从费米子-玻色子模型出发,研究超流体玻色-爱因斯坦凝聚(BCS-BEC)跨越中的金兹堡-朗道理论弱解的长时间行为. 结合 Gronwall 不等式及其他形式的不等式,建立适当的先验估计,得到解半群存在有界吸收集,证明了该方程组所生成的解半群的整体吸引子的存在性.

关键词:费米子-玻色子;金兹堡-朗道理论;Gronwall 不等式;吸收集;整体吸引子

中图分类号:O 175.29 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2020)01-0094-07

1 预备知识

玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)是指当温度低于某一临界值时,玻色子体系中大量粒子凝聚到一个或几个量子态的现象. 超流体玻色-爱因斯坦凝聚(BCS-BEC)跨越现象最早于1993年被发现[1],理论与实验研究表明,尽管费米子不能直接形成 BEC 现象,但通过 Cooper 配对等方式可形成费米子对. 这些费米子对如同(准)复合玻色子,从而可以呈现 BEC 现象. 而当粒子间的相互作用从吸引变为排斥时,费米子体系可以实现从 BCS 超流到 BEC 的转变,而 BCS 和 BEC 是 BCS-BEC 跨越现象中两个极限,近年来,这一有趣的现象引起了众多学者的关注[2-5].

金兹堡-朗道(Ginzburg-Landau)方程[6]是1950年由物理学家 Ginzburg 和 Landau 在朗道二级相变理论的基础上发现的一个可以用来描述超导现象的模型. 因为 Ginzburg-Landau 理论可以捕捉超流体在宏观上所呈现的几乎所有特征,使得它在原子费米子气体超流体的研究历史上扮演了重要的角色,基于此,Machida 等[3]建立了在费米子-玻色子模型中 Feshbach 共振附近费米子原子气体超流中所呈现的依赖于时间的 Ginzburg-Landau 方程模型,如下:

$$-\mathrm{i}d\,\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-\left[\frac{1}{U}-a\right]\Delta+\frac{c}{4m}\nabla^2\Delta-b\mid\Delta\mid^2\Delta,\tag{1}$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\varphi_B}{\partial t}=(2v-2\mu)\varphi_B-\frac{1}{4m}\nabla^2\varphi_B,\tag{2}$$

$$\Delta(x,0)=\Delta_0(x),\varphi_B(x,0)=\varphi_{B0}(x),x\in\Omega,\tag{3}$$

$$\Delta(x,t)=0,\varphi_B(x,t)=0,[0,\infty)\times\partial\Omega.\tag{4}$$

其中:Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界域,$\Delta_0(x)\in H^{1,2}(\Omega)$,$\varphi_{B0}(x)\in H^{1,2}(\Omega)$,$t\geqslant 0$;$\Delta$ 和 φ_B 是两个复值函数,分别指费米子对场和凝聚的玻色子场;$2v$ 为费什巴赫共振的初始能量;μ 为化学势;$U>0$ 为 BCS 耦合系数;系数 a、b、c 对应 Ginzburg-Landau 方程中的系数,除 d 以外其他系数皆为实数;令 $d=d_r+\mathrm{i}d_m$,则 $|d|^2=d_r^2+d_m^2$. 正如文献[3]中指出,系数 d 为复数,是该方程组构成系统的一个重要特征,它在很大程度上控制了超流体原子费米气体的动力学,在 BCS-BEC 的交叉区域 d 的实部和虚部都存在,然而在 BCS 限制下 d 为纯虚数,在 BCS 区域 d 的虚部通常消失,d 的实部控制了动力学,从而使得方程守恒.

对于方程(1)~(4),本文主要研究它的整体吸引子. 整体吸引子是指一个具有不变性的非空紧集,可以吸引任何有界集. 如果一个系统中存在吸引子,那么吸引子将会包含系统解的所有可能的极限状态. 因

收稿日期:2019-05-20 **录用日期**:2019-09-23
基金项目:国家自然科学基金(11571159)
* **通信作者**:shiny0320@163.com
引文格式:熊春燕,陈淑红. 费米子-玻色子模型中金兹堡-朗道方程组的整体吸引子[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2020,59(1):94-100.
Citation:XIONG C Y,CHEN S H. Global attractors of Ginzburg-Landau equations in the Fermion-Boson model[J]. J Xiamen Univ Nat Sci,2020,59(1):94-100.(in Chinese)

此，研究动力系统中的整体吸引子可以揭示系统内部许多信息. 对 Ginzburg-Landau 方程而言，其整体吸引子的研究已经取得了许多有价值的结果[7-12]. 其中 Fang 等[9]研究了复 Ginzburg-Landau 方程整体吸引子的存在性. Jiang 等[10]讨论了 Ginzburg-Landau 方程的整体吸引子及其维度. Lu[12]研究了 Ginzburg-Landau 方程的动力学行为.

目前对于本文所研究的方程(1)～(4)的结果主要集中于对解的性质，例如：陈淑红等对该方程组整体解的存在性进行研究[13]，对其解的柯西问题进行了讨论[14]，研究了该方程组存在古典解[15]，但其解的整体吸引子的存在性尚未被研究.

本文主要考虑利用先验估计及相关理论对 Ginzburg-Landau 方程组(1)～(4)整体吸引子的存在性进行探讨，并得到下列结果：

定理1　设 (Δ,φ_B) 为初边值问题(1)～(4)的整体弱解，$U>0$，$b<0$，$c>0$，v、μ 是实数，$m>0$，$\frac{1}{U}-a\geqslant 0$，$d=d_r+\mathrm{i}d_m$，$|d_r|\geqslant\sqrt{3}d_m$，$g>0$，且 $n=3$，$\Delta_0(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，$\varphi_{B_0}(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，则初边值问题(1)～(4)存在整体吸引子 A，且算子 A 满足：

(i) $S_tA=A$，对于 $t\in\mathbf{R}^+$ 成立；

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}(S_tB,A)=0$，其中 $B\subset H^{1,2}(\Omega)$，

$\mathrm{dist}(S_tB,A)=\sup\limits_{x\in B}\inf\limits_{y\in A}\|S_tx-y\|_E$，

其中 $E=H^{1,2}(\Omega)\times H^{1,2}(\Omega)$，$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 是由方程(1)～(4)产生的半群算子，

$A=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}S_tA}$.

2　基本引理

首先，引进一些函数空间和记号：

$L^q(D)$-范数为 $\|\cdot\|_{L^q}$ 的 Lebesgue 空间，$L^2(D)$ 范数形式为 $\|\cdot\|_{L^2}$，其内积形式为 $(\cdot,\cdot)$，而且

$$(u,v)=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x,\ \|u\|=\left(\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

接下来介绍一些本文需要用到的不等式和引理.

首先介绍本文对解进行估计时多次用到的一个不等式，

引理1　(Gronwall 引理[16])：

设 g、h、y 为定义在 (t_0,∞) 上的3个正的局部可积函数，同时 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 也是局部可积的，使得对所有的 $t\geqslant t_0$ 满足如下条件：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h$，则对所有的 $t\geqslant t_0$，成立

$$y(t)\leqslant y(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t g(t)\mathrm{d}t}+\int_{t_0}^t h(s)\mathrm{e}^{\int_s^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s.$$

引理2[17]　若 $1<p<\infty$，对任意函数 $u\in C^2(\overline{\Omega})$，有如下等式成立

$$\int_{\partial\Omega}|u|^{p-2}\,\bar{u}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0,$$

则

$$|\operatorname{Im}\langle\nabla^2u,|u|^{p-2}u\rangle|\leqslant\frac{p-2}{2\sqrt{p-1}}\operatorname{Re}\langle-\nabla^2u,|u|^{p-2}u\rangle,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法向量，$\langle u,v\rangle=\int u\bar{v}\,\mathrm{d}x$.

引理3[18]　Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有利普希茨边界的有界域，对于任意指数 $k>n/2$，且实数 $q\in[1,\infty)$，存在常数 $C_1(n,k,q)$ 使得下列不等式成立：

(i) $u\in H^k(\Omega)$，

$$\|\nabla^k(|u|^2u)\|_2\leqslant 3^kC_1(k,n,q)\|u\|_{k,2}^{\tau}\cdot\|u\|_q^{3-\tau},$$

其中 $\tau=\dfrac{\left(k-\frac{n}{2}\right)+\frac{3n}{q}}{\left(k-\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{q}}$.

(ii) $u,v\in H^k(\Omega)$，

$$\|\nabla^k(|u|^2u-|v|^2v)\|_2\leqslant 3^kC_2(k,n)\cdot(\|u\|_{k,2}^2+\|v\|_{k,2}^2)\|u-v\|_{k,2},$$

其中 $C_2(k,n)=16C_1(k,n,2)$.

下面介绍一下整体吸引子的定义.

引理4[19]　设 E 为 Banach 空间，$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$ 为半群算子，$S_t:E\to E$，$S_t\cdot S_\tau=S_{t+\tau}$，$t,\tau\geqslant 0$，$S_0=I$，其中 I 为恒等算子，如果紧集 $A\subset E$ 满足：

(i) 不变性：即在半群 S_t 作用下为不变集，

$S_tA=A$，$\forall t\geqslant 0$；

(ii) 吸引性：A 吸引 E 中一切有界集，即对任何有界集 $B\subset E$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{dist}(S_tB,A)=\operatorname*{Sup}_{x\in B}\inf_{y\in A}\|S_tx-y\|_E\to 0,\quad t\to\infty,$$

特别的，当 $t\to\infty$ 时，从 u_0 出发的一切轨线 S_tu_0 收敛于 A，即有

$$\mathrm{dist}(S_tu_0,A)\to 0,\quad t\to\infty,$$

那么，紧集 A 称为半群 S_t 的整体吸引子.

在介绍整体吸引子存在性引理前，需要引入吸收集的概念.

引理5[19]　对于有界集 $B_0\in E$，如果存在 $t_0(B_0)>0$，使得对任何有界集 $B\subset E$，有

$$S_tB\subset B_0,\ 对\ \forall\, t\geqslant t_0,$$

则称 B_0 为 E 中的有界吸收集.

引理 6[20] 设 E 为 Banach 空间，u 为未知函数，且 $u=u(t)$，$\{S_t,t\geqslant 0\}$ 为半群算子，$S_t:E\rightarrow E$，$S_t\cdot S_\tau=S_{t+\tau},t,\tau\geqslant 0,S_0=I$，其中 I 为恒等算子. 设半群算子 S_t 满足下列条件：

(i) 半群算子 S_t 在 E 中一致有界，即对一切 $R\geqslant 0$，存在常数 $C(R)$，使得当 $\|\vec{u}\|_E\leqslant R$ 时，$\|S_t\vec{u}\|_E\leqslant C(R),\forall\, t\in[0,\infty)$；

(ii) 在 E 中存在有界吸收集合 B_0，即对任意有界吸收集合 $B\subset E$，存在 T，使得当 $t\geqslant T$ 时，有 $S_tB\subset B_0$；

(iii) 当 $t>0$ 时，S_t 为全连续算子，则半群算子 S_t 具有紧的整体吸引子.

3 先验估计

本部分主要对初边值问题(1)～(4)建立先验估计. 首先，将方程组(1)～(4)改写为(5)～(8)，即

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=\frac{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{U}-a\right]\Delta}{d}+\frac{\mathrm{i}c}{4md}\nabla^2\Delta-\frac{\mathrm{i}b}{d}|\Delta|^2\Delta, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi_B}{\partial t}=-\mathrm{i}(2v-2\mu)\varphi_B+\frac{\mathrm{i}}{4m}\nabla^2\varphi_B, \tag{6}$$

$$\Delta(x,0)=\Delta_0(x),\varphi_B(x,0)=\varphi_{B0}(x),x\in\Omega, \tag{7}$$

$$\Delta(x,t)=0,\varphi_B(x,t)=0,[0,\infty)\times\partial\Omega. \tag{8}$$

首先来证明弱解的 L^2 -模有界，得到下列结论：

定理 2 假设 $U>0,b<0,m>0,c>0,\sqrt{3}d_m\leqslant|d_r|,g>0,\frac{1}{U}-a\geqslant 0,(\Delta,\varphi_B)$ 是初边值问题(1)～(4)的弱解，$\Delta(x)\in H^{1,2}(\Omega),\varphi_B(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，则

$$\|\nabla\Delta\|^2\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_mt}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2,$$

$$\|\nabla\varphi_B\|^2\leqslant\|\nabla\varphi_{B_0}\|^2,$$

$$\overline{\lim_{t\rightarrow+\infty}}(\|\nabla\Delta\|^2+\|\nabla\varphi_B\|^2)=\|\nabla\varphi_{B_0}\|^2=E_1.$$

其中 E_1 是不依赖于 t 的常数.

证明 将式(5)在 $H^{1,2}$ 中与 $-\nabla^2\Delta$ 作内积，可得

$$\int\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x=\int\frac{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{U}-a\right]}{d}\Delta\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x+\int\frac{c\mathrm{i}}{4md}\nabla^2\Delta\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{i}b}{d}|\Delta|^2\Delta\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x.$$

分部积分并取实部得，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x=-\frac{\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m}{|d|^2}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x-\frac{cd_m}{4m|d|^2}\int|\nabla^2\Delta|^2\mathrm{d}x-\frac{bd_m}{|d|^2}\mathrm{Re}\int|\Delta|^2\Delta\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x+\frac{bd_r}{|d|^2}\mathrm{Im}\int|\Delta|^2\Delta\cdot(-\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x. \tag{9}$$

利用引理 2，可得 $\mathrm{Re}\int|\Delta|^2\Delta\cdot(-\nabla^2\Delta)\mathrm{d}x\geqslant 0$，

并由等式 $|\Delta|^2|\nabla\Delta|^2=\frac{1}{4}\left|\nabla|\Delta|^2\right|^2+\frac{1}{4}\left|\Delta\nabla\bar{\Delta}-\bar{\Delta}\nabla\Delta\right|^2$ 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}b}{d}\int|\Delta|^2\Delta\cdot(\nabla^2\bar{\Delta})\mathrm{d}x\right]=\\
&-\mathrm{Re}\left[\left(\frac{bd_m}{|d|^2}+\frac{\mathrm{i}bd_r}{|d|^2}\right)\int(|\Delta|^2|\nabla\Delta|^2+\Delta(\nabla\bar{\Delta})\nabla|\Delta|^2)\mathrm{d}x\right]=\\
&-\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{bd_m}{|d|^2}+\frac{\mathrm{i}bd_r}{|d|^2}\right)\int\left[|\Delta|^2|\nabla\Delta|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla|\Delta|^2\right|^2+\frac{1}{2}[\Delta\nabla\bar{\Delta}-\bar{\Delta}\nabla\Delta]\nabla|\Delta|^2\right]\mathrm{d}x\right\}=\\
&-\frac{bd_m}{|d|^2}\int|\Delta|^2|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x-\frac{bd_m}{2|d|^2}\int\left|\nabla|\Delta|^2\right|^2\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{i}bd_r}{2|d|^2}\int[\Delta\nabla\bar{\Delta}-\bar{\Delta}\nabla\Delta]\nabla|\Delta|^2\mathrm{d}x=\\
&-\frac{b}{4|d|^2}\int\left\{3d_m\left|\nabla|\Delta|^2\right|^2+2\mathrm{i}d_r[\Delta\nabla\bar{\Delta}-\bar{\Delta}\nabla\Delta]\nabla|\Delta|^2+d_m|\Delta\nabla\bar{\Delta}-\bar{\Delta}\nabla\Delta|^2\right\}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{10}$$

若使上式非正，只需被积函数非正，则由二次型函数的性质得系数矩阵

$\begin{pmatrix}3d_m & d_r\\ d_r & d_m\end{pmatrix}$ 非正定，即 $3d_m^2-d_r^2\leqslant 0$，

由已知条件 $\sqrt{3}d_m\leqslant|d_r|$ 即证.

方程(9)可转换为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x\leqslant-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m}{|d|^2}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x-\frac{cd_m}{2m|d|^2}\int|\nabla^2\Delta|^2\mathrm{d}x. \tag{11}$$

注意到 $-\dfrac{cd_m}{2m|d|^2}\leqslant 0$，进一步可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x\leqslant-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m}{|d|^2}\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x,$$

由 Gronwall 不等式可知

$$\|\nabla\Delta\|^2\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2. \tag{12}$$

然后对 $\|\nabla\varphi_B\|^2$ 进行先验估计.

将式(6)在 $H^{1,2}$ 中与 $-\nabla^2\overline{\varphi_B}$ 作内积，得

$$\int\frac{\partial\varphi_B}{\partial t}\cdot(-\nabla^2\overline{\varphi_B})\mathrm{d}x=-\mathrm{i}(2v-2\mu)\int\varphi_B\cdot(-\nabla^2\overline{\varphi_B})\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}}{4m}\int\nabla^2\varphi_B\cdot(-\nabla^2\overline{\varphi_B})\mathrm{d}x.$$

利用分部积分，并两边同时取实部，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla\varphi_B|^2\mathrm{d}x=0.$$

两边分别对 t 在 $(0,T)$ 上积分，可得

$$\|\nabla\varphi_B\|^2\leqslant\|\nabla\varphi_{B0}\|^2.$$

接下来，分别对 $\|\Delta\|^2$ 及 $\|\varphi_B\|^2$ 进行先验估计，并得到下述定理.

定理 3　在定理 2 的假设条件下，(Δ,φ_B) 是初始值问题(1)～(4)的弱解，

$\Delta(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，$\varphi_B(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，则有下列结果：

$$\|\Delta\|^2\leqslant\lambda\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2,$$

$$\|\varphi_B\|^2\leqslant\|\varphi_{B0}\|^2,$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}(\|\Delta\|^2+\|\varphi_B\|^2)\leqslant\lambda\|\nabla\Delta_0\|^2+\|\varphi_{B0}\|^2=E_2.$$

其中，λ 为 poincare′系数，E_2 是不依赖于 t 的常数.

证明　由式(12)可知

$$\|\nabla\Delta\|^2\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2.$$

利用 poincare′不等式可知 $\|\Delta\|^2\leqslant\lambda\|\nabla\Delta\|^2$，则

$$\|\Delta\|^2\leqslant\lambda\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2.$$

其中 λ 为 poincare′不等式系数.

然后，对 $\|\varphi_B\|^2$ 进行先验估计.

用式(6)在 $H^{1,2}$ 中与 $\overline{\varphi}_B$ 作内积，可得

$$\int\frac{\partial\varphi_B}{\partial t}\cdot\overline{\varphi}_B\mathrm{d}x=-\mathrm{i}(2v-2\mu)\int\varphi_B\cdot\overline{\varphi}_B\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}}{4m}\int\nabla^2\varphi_B\cdot\overline{\varphi}_B\mathrm{d}x. \tag{13}$$

利用分部积分，并两边同时取实部，式(13)可转化为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int|\varphi_B|^2\mathrm{d}x=0.$$

等式两边分别在 $(0,t)$ 上积分，可得

$$\|\varphi_B\|^2=\|\varphi_{B0}\|^2.$$

其次，可以对 $\|\nabla^2\Delta\|^2$ 及 $\|\nabla^2\varphi_B\|^2$ 进行先验估计并得到下述定理.

定理 4　在定理 3 的假设条件下，设 (Δ,φ_B) 是初边值问题(1)～(4)的弱解，$\Delta(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，$\varphi_B(x)\in H^{1,2}(\Omega)$，则存在常数 C_1 使得

$$\|\nabla^2\Delta\|^2\leqslant\|\nabla^2\Delta_0\|^2\mathrm{e}^{\int_0^t M(t)\mathrm{d}t}+\int_{t_0}^t L(s)\mathrm{e}^{\int_s^t M(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,$$

$$\|\nabla^2\varphi\|^2\leqslant\|\nabla^2\varphi_0\|^2.$$

其中：

$$M(t)=-\frac{2d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right],$$

$$L(t)=C_1\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2\right)^{\frac{4-\tau}{2-\tau}},\tau<3.$$

证明　用式(5)与 $\nabla^4\overline{\Delta}$ 式作内积，可得

$$\int\frac{\partial\Delta}{\partial t}\cdot\nabla^4\overline{\Delta}\mathrm{d}x=\frac{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{U}-a\right]}{d}\int\Delta\cdot\nabla^4\overline{\Delta}\mathrm{d}x+\frac{c\mathrm{i}}{4md}\int\nabla^2\Delta\cdot\nabla^4\overline{\Delta}\mathrm{d}x-\frac{b\mathrm{i}}{d}\int|\Delta|^2\Delta\cdot\nabla^4\overline{\Delta}\mathrm{d}x.$$

分部积分，并两边同时取实部

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^2\Delta\|^2+\frac{cd_m}{4m|d|^2}\|\nabla^3\Delta\|^2\leqslant-\frac{d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right]\|\nabla^2\Delta\|^2+\frac{|b|}{|d|}\int\left|\nabla^3(|\Delta|^2\Delta)\right|\left|\nabla\overline{\Delta}\right|\mathrm{d}x. \tag{14}$$

利用 Hölder 不等式，并结合定理 3，可得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{b}{d}\right|\left|\int\left|\nabla^3(|\Delta|^2\Delta)\right|\left|\nabla\Delta\right|\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left|\frac{b}{d}\right|\left(\int\left|\nabla^3(|\Delta|^2\Delta)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int|\nabla\Delta|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\\ &\left|\frac{b}{d}\right|\|\nabla^3(|\Delta|^2\Delta)\|_2\|\nabla\Delta\|_2\leqslant\\ &\left|\frac{b}{d}\right|27c(3,n,2)\|\Delta\|_{3,2}^{\tau}\cdot\|\Delta\|_2^{3-\tau}\|\nabla\Delta\|_2\leqslant\varepsilon\|\Delta\|_{3,2}^2+\\ &C(\varepsilon)\left(\left|\frac{b}{d}\right|27c(3,n,2)\|\Delta\|_2^{3-\tau}\|\nabla\Delta\|_2\right)\frac{2}{2-\tau}.\end{aligned} \tag{15}$$

这里 $n<6$，意味着 $\tau=\dfrac{3+n}{3}<3$，且 $\|\Delta\|_{3,2}^2=\int(\nabla^3\Delta)^2\mathrm{d}x$.

取 $\varepsilon=\frac{cd_m}{4m|d|^2}$，结合式(14)，(15)及定理 2 和 3 可知

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^2\Delta\|^2\leqslant-\frac{2d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right]\|\nabla^2\Delta\|^2+2C(\varepsilon)\left(\left|\frac{b}{d}\right|27c(3,n,2)\|\Delta\|_2^{3-\tau}\|\nabla\Delta\|_2\right)^{\frac{2}{2-\tau}}\leqslant-\frac{2d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right]\|\nabla^2\Delta\|^2+C_1\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2\right)^{\frac{4-\tau}{2-\tau}},\tag{16}$$

其中 $-\frac{2d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right]\leqslant 0$，$C_1$ 是与 t 无关的常数.

记

$$M(t)=-\frac{2d_m}{|d|^2}\left[\frac{1}{U}-a\right],$$

$$L(t)=C_1\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2\right)^{\frac{4-\tau}{2-\tau}},$$

则式(16)可转化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^2\Delta\|^2\leqslant M(t)\|\nabla^2\Delta\|^2+L(t).$$

利用 Gronwall 不等式，可得

$$\|\nabla^2\Delta\|^2\leqslant\|\nabla^2\Delta_0\|^2\mathrm{e}^{\int_0^t M(t)\mathrm{d}t}+\int_{t_0}^t L(s)\mathrm{e}^{\int_s^t M(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.$$

下面，进一步对 $\|\nabla^2\varphi_B\|$ 进行估计.

用式(6)与 $\nabla^4\overline{\varphi_B}$ 作内积，分部积分，并取实部可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla^2\varphi_B\|^2=0.$$

两边同时对 t 在 $(0,T)$ 积分可得

$$\|\nabla^2\varphi_B\|^2\leqslant\|\nabla^2\varphi_{B0}\|^2.$$

定理 5 在定理 2～4 的条件下，$n=3$，问题(5)～(8)的解满足

$$\Delta_t\in L^\infty\left([0,+\infty,L^2(\Omega))\right),$$

$$\varphi_{Bt}\in L^\infty\left([0,+\infty,L^2(\Omega))\right).$$

证明 用式(5)与 $\overline{\Delta_t}$ 作内积，可得

$$\int\Delta_t\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{i}\left[\frac{1}{U}-a\right]}{d}\int\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}c}{4md}\int\nabla^2\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{i}b}{d}\int|\Delta|^2\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x.$$

选取实部可得

$$\|\Delta_t\|_2^2=\mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}\left[\frac{1}{U}-a\right]}{d}\int\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}c}{4md}\int\nabla^2\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x\right)+\mathrm{Re}\left(-\frac{\mathrm{i}b}{d}\int|\Delta|^2\Delta\cdot\overline{\Delta_t}\mathrm{d}x\right)\leqslant$$

$$\frac{\frac{1}{U}-a}{|d|}\int|\Delta|\cdot|\overline{\Delta_t}|\mathrm{d}x+\frac{c}{4m|d|}\int|\nabla^2\Delta|\cdot|\overline{\Delta_t}|\mathrm{d}x+\frac{|b|}{|d|}\int|\Delta|^3|\overline{\Delta_t}|\mathrm{d}x.\tag{17}$$

利用 Young 不等式，式(17)可转化为

$$\|\Delta_t\|^2\leqslant\frac{\frac{1}{U}-a}{|d|}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\Delta\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta_t\|^2\right)+\frac{c}{4m|d|}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla^2\Delta\|+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta_t\|^2\right)+\left|\frac{b}{d}\right|\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\Delta\|_6^6+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta_t\|^2\right).$$

所以，

$$\left(1-\left(\frac{\frac{1}{U}-a}{2|d|}+\frac{c}{8m|d|}+\frac{|b|}{2|d|}\right)\varepsilon\right)\|\Delta_t\|^2\leqslant\frac{\frac{1}{U}-a}{2|d|\varepsilon}\|\Delta\|^2+\frac{c}{8m|d|\varepsilon}\|\nabla^2\Delta\|^2+\frac{|b|}{2|d|\varepsilon}\|\Delta\|_6^6.$$

令 $k=1-\left(\frac{\frac{1}{U}-a}{2|d|}+\frac{c}{8m|d|}+\frac{|b|}{2|d|}\right)\varepsilon$，取 ε 足够小，使得 $k\geqslant 0$，

由定理 2～4 可得

$$\|\Delta_t\|^2\leqslant C(\varepsilon)\|\nabla^2\Delta_0\|^2+\frac{|b|}{2|d|\varepsilon}\|\Delta\|_6^6.\tag{18}$$

当 $n=3$ 时，利用 Sobolev 嵌入定理，并结合 poincare′不等式及定理 3，可得

$$\|\Delta\|_6^6\leqslant C_2\|\nabla\Delta\|_2^2\leqslant C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|^2.\tag{19}$$

注意到 $-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m}{|d|^2}\leqslant 0$，$t\in[0,+\infty)$，结合式(18)与(19)可知 $\|\Delta_t\|^2\leqslant C(\varepsilon)\|\nabla^2\Delta_0\|^2$，即

$$\Delta_t\in L^\infty\left([0,+\infty,L^2(\Omega))\right).$$

接下来对 $\|\varphi_{Bt}\|^2$ 进行估计.

用 $\overline{\varphi}_{Bt}$ 与式(6)作内积可得

$$\int\varphi_{Bt}\cdot\overline{\varphi}_{Bt}\mathrm{d}x=-\mathrm{i}(2v-2\mu)\int\varphi_B\cdot\overline{\varphi}_{Bt}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{i}}{4m}\int\nabla^2\varphi_B\cdot\overline{\varphi}_{Bt}\mathrm{d}x.$$

两边分别取实部可得

$$\|\varphi_{Bt}\|^2=(2v-2\mu)\mathrm{Im}\left[\int\varphi_B\cdot\varphi_{Bt}\mathrm{d}x\right]-\frac{1}{4m}\mathrm{Im}\left[\int\nabla^2\varphi_B\cdot\varphi_{Bt}\mathrm{d}x\right],\tag{20}$$

利用 Young 不等式可知

$$(2v-2\mu)\mathrm{Im}\left[\int\varphi_B\cdot\varphi_{Bt}\mathrm{d}x\right]\leqslant |2v-2\mu|\left[\frac{1}{2\varepsilon}\|\varphi_B\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi_{Bt}\|^2\right],$$

$$-\frac{1}{4m}\mathrm{Im}\left[\int\nabla^2\varphi_B\cdot\varphi_{Bt}\mathrm{d}x\right]\leqslant \frac{1}{4m}\left[\frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla^2\varphi_B\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\varphi_{Bt}\|^2\right].$$

所以式(20)可转化为

$$\left[1-\left(|v-\mu|+\frac{1}{8m}\right)\varepsilon\right]\|\varphi_{Bt}\|^2\leqslant |v-\mu|\frac{1}{\varepsilon}\|\varphi_B\|^2+\frac{1}{8m\varepsilon}\|\nabla^2\varphi_B\|^2.$$

取 ε 充分小，使得 $1-\left(|v-\mu|+\frac{1}{8m}\right)\varepsilon\geqslant 0$，并结合定理 2～4 可知

$$\varphi_{Bt}\in L^\infty([0,+\infty,L^2(\Omega))).$$

4　整体吸引子的存在性

最后，利用引理 6，结合定理 2～4 证明本文中的主要结论定理 1.

定理 1 的证明　在定理 2～4 的假设条件下，方程(1)～(4)的弱解在 $L^2(\Omega)$ 中存在半群算子 $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$，形式如下：$S_t:H^{1,2}(\Omega)\to H^{1,2}(\Omega)$，即 $S_t\vec{u}(x,t)=\vec{u}(x,t)$，$\vec{u}_0=(\Delta_0,\varphi_{B0})$.

因此建立 Banach 空间 $E=H^{1,2}(\Omega)$，$\|(\Delta_1\ \varphi_B)^{\mathrm{T}}\|\in E$，$\|(\Delta_0\varphi_B)^{\mathrm{T}}\|_E^2=\|\Delta\|_{H^{1,2}}^2+\|\varphi_B\|_{H^{1,2}}^2$，且 $S_t:E\to E$. 利用定理 2～4 结论并假设 $B\subset E$ 属于球 $\{\|(\Delta,\varphi_B)^{\mathrm{T}}\|_E\leqslant R\}$. 可得到

$$\|\Delta\|_{L^2}^2\leqslant\lambda\mathrm{e}^{\frac{-2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|_{L^2}^2,$$

$$\|\nabla\Delta\|_{L^2}^2\leqslant\mathrm{e}^{\frac{-2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\nabla\Delta_0\|_{L^2}^2,$$

$$\|\varphi_B\|_{L^2}^2\leqslant\|\varphi_{B0}\|_{L^2}^2,$$

$$\|\nabla\varphi_B\|_{L^2}^2\leqslant\|\nabla\varphi_{B0}\|_{L^2}^2,$$

$$\|S_t(\Delta,\varphi_B)^T\|_E^2\leqslant\|\Delta(\cdot,t)\|_{H^{1,2}}^2+\|\varphi_B(\cdot,t)\|_{H^{1,2}}^2\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}\|\Delta_0\|^2+\lambda\mathrm{e}^{-\frac{2\left[\frac{1}{U}-a\right]d_m t}{|d|^2}}+\|\varphi_{B0}\|^2+\|\nabla\varphi_{B0}\|^2\leqslant CR^2(t\geqslant 0,(\Delta_0,\varphi_{B0})^{\mathrm{T}}\in B).$$

意味着 S_t 在 E 中一致有界，则引理 6 中的条件(i)满足.

其次，从定理 2～4 的结果可以得到：

$$\|S_t(\Delta,\varphi_B)^{\mathrm{T}}\|_E^2\leqslant\|\Delta(\cdot,t)\|_{H^{1,2}}^2+\|\varphi_B(\cdot,t)\|_{H^{1,2}}^2\leqslant 2(E_1+E_2),\forall t\geqslant t_0.$$

因此 $\overline{A}=\{(\Delta,\varphi_B)^{\mathrm{T}}\in E,\|(\Delta,\varphi_B)^{\mathrm{T}}\|_E\leqslant 2(E_1+E_2)\}$ 是半群算子 S_t 的有界吸收集，$H^{1,2}$ 中存在弱紧性，则引理 6 中的条件(ii)得证.

最后，由定理 2～5 知当 $t>0$ 时，

$$\varlimsup_{t\to+\infty}(\|\Delta\|_{L^2}^2+\|\varphi_B\|_{L^2}^2)\leqslant\|\varphi_{B0}\|_{L^2}^2=E_2,$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty}(\|\nabla\Delta\|_{L^2}^2+\|\nabla\varphi_B\|_{L^2}^2)\leqslant\|\nabla\varphi_{B0}\|_{L^2}^2=E_1.$$

$$\Delta_t\in L^\infty([0,+\infty,L^2(\Omega))),$$

$$\varphi_{Bt}\in L^\infty([0,+\infty,L^2(\Omega))).$$

故 $t>0$ 时，S_t 为全连续算子，引理 6 中条件(iii)满足.

综上所述，半群算子 S_t 具有紧的整体吸引子 $A=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}S_tA}$.

定理 1 得证.

参考文献：

[1] DE SÁ MELO C, RANDERIA M, ENGELBRECHT J. Crossover from BCS to Bose superconductivity: transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory [J]. Physical Review Letters, 1993, 71(19): 3202-3205.

[2] HOLLAND M. Resonance superfluidity in a quantum degenerate fermi gas[J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(12): 120406-120409.

[3] MACHIDA A, KOYAMA M. Time-dependent Ginzburg-Landau theory for atomic fermi gases near the BCS-BEC crossover[J]. Phy Rev A, 2006, 74: 033603.

[4] OHASHI Y, GRIFFIN A. The BCS-BEC cross over in a gas of fermi atoms with feshbach resonance [J]. Phys Rev Lett, 2002, 89 (13): 130402-130406.

[5] TIMMERMANS E. Prospect of creating a composite Fermi-Bose superfluid [J]. Phys Lett A, 2001, 285: 228-233.

[6] GINZBURG V L, LANDAU L D. On the theory of superconductivity [J]. Janural of Experimental and Theoretical Physics (USSR), 1950, 20: 1064.

[7] DOERING C, GIBBON J D, HOLM D, et al. Low-demensional behavior in the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Nonlinearity, 1988(1): 279-309.

[8] GHIDAGLIA J M, HERON B. Dimension of the attractor associated to the Ginzburg-Landau equation[J]. Phys D, 1987, 28: 282-304.

[9] FANG L, BO Y. Global attractors for the complex Ginzburg-

Landau equation [J]. J Math Anal Appl 2014,415(1):14-24.
[10] JIANG J,WU H,GUO B L. Finite dimensional global and exponential attractors for a class of coupled time-dependent Ginzburg equations [J]. Science China Mathematics,2012,55(1):141-157.
[11] KARACHALIOS N I,ZOGRAPHOPOULOS N B. Global attractors and convergence to equilibrium for degenerate Ginzburg-Landau and parabolic equations[J]. Nonlinear Anal,2005,63: 1749-1768.
[12] LU S. The dynamical behavior of the Ginzburg-Landau equation and its fourier spectral approximationn [J]. Numer Math,2000,22:1-9.
[13] 陈淑红,郭柏灵. 费米子气体附近 BCS-BEC 跨越的 Ginzburg-Landau 方程组整体解的存在性[J]. 数学物理学报,2011,31(5):1359-1368.
[14] CHEN S H,GUO B L. On the cauchy problem of the Ginzburg-Landau equations for atomic Fermi gases near the BCS-BEC crossover[J]. J Partial Differ Equ,2009,22(3):218-233.
[15] CHEN S H,GUO B L. Classical solutions of time-dependent Ginzburg-Landau equation-s for atomic fermigases near the BCS-BEC crossover [J]. J Differ Equ,2011,251(6):1359-1368.
[16] GRONWALL T H. Note on the derivative with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations[J]. Annals of Mathematics (Second Series),1919,20(4):292-296.
[17] HENRY D. Genmetric theory of semilinear parabolic equations[M]. New York:Springer Veklag,1981:188.
[18] HUANG S Z,TAKAC P. Global smooth solutions of the complex Ginzburg-Landau equation and their daynamical properties [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,1999,5(4):825-848.
[19] HALE J K,MAGALHAESS I,OLIVA W. An introduction to infinite dimentional dynamical systems[M]. New York:Springer-Verlag,1984:195.
[20] TEMAM R. Infinite-dimensional dynamical syatems in mechanics and physics[M]. New York:Springer-Verlag,1997:23.

Global attractors of Ginzburg-Landau equations in the Fermion-Boson model

XIONG Chunyan,CHEN Shuhong*
(School of Mathematics and Statistics,Minnan Normal University,Zhangzhou 363000,China)

Abstract:Based on the Fermion-Boson model,we have studied longtime behavior of the weak solution of the Ginzburg-Landau theory in Bardeen-Cooper-Schrieffer theory-Bose-Einstein Condensation (BCS-BEC) crossover. Combining Gronwall inequality and other forms of inequalities,we establish a suitable prior estimate,obtain the bounded absorption set of solution semigroups,and further prove the existence of solution semigroups generated by these equations.

Keywords: Fermion-Boson;Ginzburg-Landau theory;Gronwall inequality;absorbing set;global attractors