

电流片的稳定性问题*

郑惠南 胡友秋

(中国科学技术大学地球和空间科学系, 合肥)

摘 要

本文从理想磁流体力学出发, 分析了固结在光球层上的半圆弧形电流片的线性稳定性. 主要结论是: 当沿电流方向的磁场小于某临界值时, 电流片将不稳定, 且最先引起不稳定的扰动模沿电流方向的波数近似为电流片圆弧直径的倒数.

关键词 太阳, 磁场, 电流片, 稳定性

一、引 言

人们认为, 电流片可能存在于太阳大气之中并作为耀斑贮能^[1]、日冕加热^[2,3]、耀斑爆发^[4]和日冕瞬变^[5,6]的重要机制. 各种有关电流片的理论模型都与电流片的稳定性有关. 耀斑贮能和日冕瞬变利用了在一定条件下电流片的稳定性, 日冕加热立足于电流片的不稳定性, 而耀斑爆发则是指超越稳定限之后电流片突然发生的重联不稳定过程. 因此, 电流片的稳定性一直是太阳物理的重要课题.

早期关于电流片的稳定性分析集中于撕裂模不稳定. 当电阻率很小时, 这类不稳定性的增长率很小, 太阳大气就是这方面的例子. 为获得较大增长率, 一般引入异常电阻, 它来源于电流片中的湍流效应和不稳定过程. 然而, 只有当电流片发展到一定强度才可能出现异常电阻. 在电流片形成和发展初期, 电流片应受理想磁流体力学方程控制.

Uchida 等人^[7]曾讨论过固结在光球层上的圆弧形电流片的理想磁流体力学稳定性, 分析了电流片两侧气压差、电流片的张角和沿电流方向的磁场 B_z 对稳定性的影响. 他们略去了电流片内部结构对稳定性的影响, 实际上这种影响是不能忽略的^[8]. 据此他们得出结论: 当两侧气压差为零时, 只要 B_z 稍异于零就可使电流片稳定. 本文将考虑电流片内部结构对稳定性的影响, 并指出对有限厚电流片来说, 上述结论是不对的.

为简化起见, 考虑固结在光球层上的半圆弧形电流片并忽略重力. 从理想磁流体力学能量原理出发, 先对电流片的稳定性进行解析分析, 然后数值求解欧勒方程, 给出电流片稳定的必要条件.

本文于1989年1月8日收到.

* 国家自然科学基金资助课题.

二、电流片模型和能量原理

取圆柱坐标 (r, θ, z) ; z 轴与光球层重合。在忽略重力时, 一维磁静平衡方程如下:

$$\mu \frac{dp}{dr} + \frac{B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} + B_z \frac{dB_z}{dr} = 0, \quad (1)$$

式中 p 为压强, B_θ 、 B_z 为磁场分量, 它们都只与 r 有关; μ 为真空磁导率。

下面考虑半圆弧电流片。设

$$B_\theta = \frac{B_0 r_0}{r} \tanh\left(\frac{r-r_0}{\delta}\right) \equiv -\frac{dF}{dr}, \quad B_z = \text{常数}, \quad (2)$$

$$F = \int_r^\infty B_\theta dr, \quad (3)$$

式中 r_0 为电流片中心圆弧半径, δ 为电流片的半厚度, B_0 为常数。将(2)和(3)代入(1)式, 可积分得

$$p = p_0 - \frac{B_0^2 r_0^2}{2\mu r^2} + \frac{B_0^2 r_0^2}{\mu} \int_r^\infty \frac{1}{r^3} \tanh^2\left(\frac{r-r_0}{\delta}\right) dr, \quad (4)$$

式中 p_0 为积分常数, 表示无穷远处即背景大气的压强。

对无限薄电流片 ($\delta \rightarrow 0$), 很容易从能量原理出发证明其稳定性。当不存在重力时, 磁静平衡态稳定的充分必要条件是对任意满足一定边界条件的扰动位移 ξ 成立^[9]

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2\mu} \int \{ [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B})]^2 + \gamma \mu p (\nabla \cdot \xi)^2 + \gamma \xi \cdot \nabla p \nabla \cdot \xi \\ & + \nabla \times \mathbf{B} \cdot [\xi \times \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})] \} dV \\ & + \frac{1}{2} \int_\sigma \xi_n^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) \right\rangle dS > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 γ 为绝热指数, σ 为间断面, 这里即电流片。由于穿过电流片气压和磁压及其法向微商连续, 式中面积分为零。又由于电流片外气压均匀且磁场有位, 体积分中后两项消失, 故(5)式恒满足。

对有限厚电流片, 当 $B_z = 0$ 时, 稳定的充分必要条件是沿任何磁力线 ($r = \text{常数}$), 下述常微分方程的最小本征值大于零^[10]:

$$-\frac{\partial^2 F_1}{\partial l^2} + V F_1 + \frac{V^2}{q J^2} \bar{F}_1 = \lambda F_1. \quad (6)$$

式中 $l = r\theta$, λ 为本征值,

$$F_1 = B_\theta \xi_r, \quad \bar{F}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_1 d\theta, \quad (7)$$

$$J = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta), \quad V = -\frac{2J}{r B_\theta}, \quad q = \frac{\gamma \mu p + B_\theta^2}{\gamma \mu p B_\theta^2}.$$

令 $F_2 = F_1 - V^2 \bar{F}_1 / [q J^2 (\lambda - V)]$, (6)式化为

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial l^2} = -\alpha^2 F_2, \quad (8)$$

式中 $\alpha^2 = \lambda - V$.

由光球层边界条件 $F_2|_{l=0, \pi r} = 0$, 可求出(8)式的本征解为 $F_2 = F_0 \sin(\alpha_n l)$, $\alpha_n = n/r$, ($n = 1, 2, \dots$). α_n 的最小值为 $\alpha_1 = r^{-1}$, 故稳定的充分必要条件($\lambda > 0$)为

$$\frac{4r}{\delta \sinh[2(r - r_0)/\delta]} < 1. \quad (9)$$

由上式可见, 电流片不稳定, 且不稳定区处于 $r_0 \leq r \leq r_c$ 或 $0 \leq r - r_0 \leq \varepsilon \delta$, 其中 r_c , $\varepsilon \equiv (r_c - r_0)/\delta$ 跟 r_0/δ 的关系如表 1 所示.

表 1

r_0/δ	5	10	20	50	100
r_c/δ	7.1	12.3	22.6	53.0	103.4
$\varepsilon \equiv (r_c - r_0)/\delta$	2.1	2.3	2.6	3.0	3.4

当 $B_z \approx 0$ 时, Schindler 等人^[11]给出了稳定的充分条件:

$$-B \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B}{B_\theta^2} \frac{\partial F_1}{\partial s} \right) + V F_1 = \lambda F_1, \quad \lambda > 0, \quad (10)$$

式中 F_1 、 V 同(7)式, B 为总磁场强度, s 为沿磁力线的弧长:

$$B = (B_\theta^2 + B_z^2)^{1/2}, \quad s = r \theta B / B_\theta.$$

在目前情况下, B 和 B_θ 沿力线为常数, (10)式化为

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial l^2} = -\alpha^2 F_1. \quad (11)$$

上式和(8)式形式相同, 故稳定条件仍为(9)式, 不过这里 $B_z \approx 0$, 该条件只是稳定的充分条件. 这等于说, $r < r_0$ 和 $r > r_c$ 是稳定区, 它们对能量积分的贡献非负; 电流片的稳定性取决于 $r_0 \leq r \leq r_c$ 区对能量积分的贡献. 显然, 这一稳定性与 δ , p_0 和 B_z 有关. 前面已证明, $\delta \rightarrow 0$ 时电流片是稳定的. 由于电流密度随 δ 的增加而减小, 故 δ 较大时电流片也趋于稳定, 即 δ 取某一中间值将最不稳定. 关于稳定性和 δ 的关系本文不作进一步分析, 而只对一特定 δ 值分析稳定性和 p_0 、 B_z 的关系.

从能量原理出发, 可估计在 p_0 - B_z 参数空间中稳定区与不稳定区的边界走向. 引入无量纲参数 $\beta = \gamma \mu p_0 / B_0^2$, 能量积分表达式为^[10]

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{1}{B_\theta^2} |\mathbf{B} \cdot \nabla F_1|^2 + V |F_1|^2 + |B_z \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_p - B_\theta \cdot \nabla \xi_z|^2 \right. \\ & + \left[\frac{1}{B_\theta} (\nabla F \cdot \nabla F_1 + J F_1) + B_z \frac{\partial \xi_{||}}{\partial z} - B_\theta \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right]^2 \\ & \left. + \gamma \mu (p - p_0) |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 \right\} dV + \frac{1}{2\mu} \beta B_0^2 \int |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 dV, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 ξ_z 为 z 向位移分量, $\xi_p = \xi - \xi_z \hat{z}$, $\xi_{||} = \xi_p \cdot \mathbf{B}/B_\theta$.

当存在一扰动 ξ 使得电流片不稳定时, 应有

$$W = W_0 + \frac{1}{2\mu} \beta B_0^2 \int |\nabla \cdot \xi|^2 dV < 0, \quad (13)$$

式中 W_0 为(12)式中右边第一项体积分, 它与 β 无关. 当 β 减小时, 对同一扰动 ξ , 不等式(13)仍然成立, 即电流片仍然不稳定. 因此可以预计, β - B_z 空间的稳定区与不稳定区的边界应取图 1 中锁线的形式. 该曲线左侧为不稳定区, 右侧为稳定区.

三、电流片稳定性的数值分析

取 $r_1 < r_0$, $r_2 > r_c$, 并以 $r = 0, r_1, r_2, \infty$ 为界将电流片分为三区, 对应能量积分分别为 W_I, W_{II} 和 W_{III} , 有 $W = W_I + W_{II} + W_{III}$. 由前节分析可知 W_I 和 W_{III} 非负, 故极小化位移为 $\xi = 0$, 它使 W_I 和 W_{III} 消失. 这时能量原理简化为对任意满足下述边界条件的 ξ , W_{II} 恒为正:

$$\xi_r|_{\theta=0} = \xi_r|_{\theta=\pi} = \xi_r|_{r=r_2} = 0, \quad (14)$$

$$\xi_r|_{r=r_1} = 0. \quad (15)$$

由于电流片中心 ($r = r_0$) 处 $B_\theta = 0$ 而形成奇点, 数值分析相当困难. 为避开这一奇点, 取

$$\xi_r|_{r=r_0} = 0 \quad (16)$$

代替(15), 这样做只能得到稳定性的必要条件.

对 II 区 ($r_0 \leq r \leq r_c$) 的能量积分求变分极值, 可得一欧勒方程组, 它将与 $\omega^2 = 0$ (ω 为扰动频率) 时的简正模方程一致. 当取

$$\xi \sim \xi(r, \theta) \exp(ikz), \quad (17)$$

欧勒方程如下:

$$\left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + ikB_z \right) \nabla \cdot \xi = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k^2 r^2 \right) \xi_1 = & - \frac{\gamma \mu p}{B^2} \left(B_z \frac{\partial}{\partial \theta} - ikr B_\theta \right) r \nabla \cdot \xi \\ & - B_z \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \theta \partial r} + ikr B_\theta \frac{\partial \xi_0}{\partial r} - 2ik B_\theta \xi_0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & r B^2 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial r^2} + (2r B_\theta B'_\theta - B^2) \frac{\partial \xi_0}{\partial r} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\gamma \mu p \nabla \cdot \xi) \\ & + \left(B_\theta^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2ikr B_\theta B_z \frac{\partial}{\partial \theta} + 2B_\theta^2 - k^2 r^2 B_z^2 - 2r B_\theta B'_\theta \right) \frac{\xi_0}{r} \\ & = -r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_z}{r} \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} \right) + ik \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_\theta \xi_1), \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $B'_\theta = dB_\theta/dr$, $\xi_0 = r\xi_r$, $\xi_1 = \xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta$. 进一步取 $\xi_2 = \xi_\theta B_\theta + \xi_z B_z$, 则

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_0}{\partial r} + \frac{1}{r B^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \xi_2 + B_z \xi_1) + \frac{ik}{B^2} (B_z \xi_2 - B_\theta \xi_1). \quad (21)$$

将(21)代入(18)式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B^2} \left(B_\theta^2 + 2ikr B_\theta B_z \frac{\partial}{\partial \theta} - k^2 r^2 B_z^2 \right) \xi_2 + \frac{B_\theta B_z}{B^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} + \frac{k^2 r^2 B_\theta B_z}{B^2} \xi_1 \\ & + \frac{ikr (B_z^2 - B_\theta^2)}{B^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} + r B_\theta \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \theta \partial r} + ikr B_z \frac{\partial \xi_0}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

对 II 区取 $(m+2) \times (l+2)$ 差分网格: θ 方向为均匀网格, 共 $(l+2)$ 个格点, 间距 $\Delta\theta = \pi/(l+1)$; r 方向为非均匀网格, 共 $(m+2)$ 个格点, 在 $r = r_0$ 附近间距约为 0.01δ , 往外按等比级数递增. 先将(19)–(22)对 θ 进行中心差分, 消去 ξ_1 和 ξ_2 得一常微分方程组, 自变数为 r ; 然后再对 r 进行中心差分, 利用边界条件(14)和(16), 可得一齐次线性方程组:

$$\Lambda \xi_0 = 0, \quad (23)$$

式中 Λ 为 $ml \times ml$ 矩阵, ξ_0 为 II 区的全部内点的 ξ_0 值构成的 ml 维列矢量, 其排列次序为

$\xi_0 = (\xi_{022}, \xi_{023}, \dots, \xi_{02(l+1)}; \dots; \xi_{0(m+1)2}, \dots, \xi_{0(m+1)(l+1)})$, Λ 的表达式及有关推导见附录.

方程(23)存在非平凡解的条件是

$$\det \Lambda = 0. \quad (24)$$

相应非平凡解将使能量积分取零, 从而对应着边际稳定. Hood 等人^[12-14]指出, 通过调节有关参数(k 、 β 和 B_z)使(24)满足, 即可得出参数空间中稳定区和不稳定区的边界. 进一步, Λ 为块三对角矩阵, 可采用高斯消去法使之化为上三角矩阵, 其对角元素为 $l \times l$ 矩阵, 设为

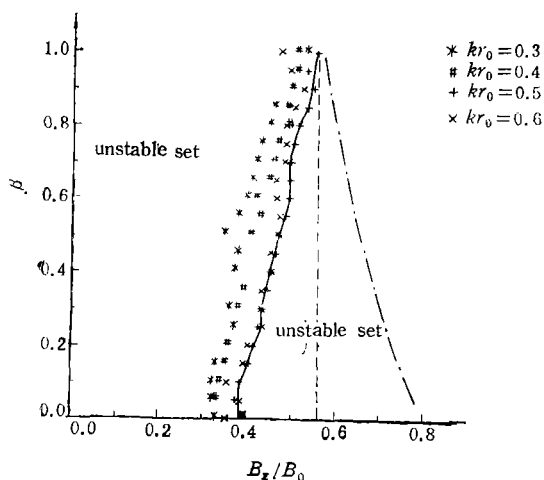
$$\Lambda_j (j = 1, 2, \dots, m).$$

于是

$$\det \Lambda = \prod_j \det \Lambda_j. \quad (25)$$

只要对某个 j 值 $\det \Lambda_j$ 与 $\det \Lambda_{j-1}$ 反号, 则表示系统不稳定. 这样我们不必计算整个矩阵 Λ , 而只需逐次算出 Λ_j , 一直算到 $\det \Lambda_j$ 变号为止. 若从参数空间的不稳定区算起, 上述处理方式可显著减少计算量.

本文就采用这种方法来计算不稳定区的边界. 如前所述, 由于采用了人为条件(16)限制了位移的普遍性, 上述边界只能作为稳定的必要条件.



— · — · — 定性估算结果 (estimated value)
—— 计算结果 (calculated value, necessary condition for stability)

图 1 β – (B_z/B_0) 空间中的稳定-不稳定边界

Fig.1 Boundary in β – (B_z/B_0) space separating stable and unstable sets

以下取 $\delta/r_0 = 0.01$, $l = m = 18$, 计算结果示于图 1, 主要结论如下。

1. 稳定性和 k 值的关系

图 1 示出了 $kr_0 = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ 的结果, 通过同一 kr_0 值的点的曲线左方肯定为不稳定区。 $kr_0 < 0.3$ 、 $kr_0 > 0.6$ 对应的曲线将分别随 $kr_0 \rightarrow 0$ 、 $kr_0 \rightarrow \infty$ 趋向 β 轴。由图可见, 最先引起不稳定的模的 kr_0 值近似为 0.5, 它对应的曲线(图 1 中的实线)将取作稳定的必要条件。图 1 中的锁线表示稳定-不稳定区的边界, 它是上节定性估计的, 目前我们还未定量确定其位置。

2. 稳定性和 B_z 的关系

B_z 越大, 稳定性越好。图 1 中实线上端的 $B_z \sim 0.56B_0$, 则 $B_z/B_0 > 0.56$ 将作为稳定的另一种必要条件。这一结论与文献[7]不同。按文[7], 当电流片两侧气压差为零时, 只要 B_z 稍异于零电流片就稳定。这说明, 他们给出的结果是比本文更加宽松的一种必要条件, 而不象他们所断言的那样是充分必要条件。从这个意义上说, 文[7]过高地估计了 B_z 的致稳作用。

四、结 论

本文给出的稳定必要条件表明, 不仅中性电流片 ($B_z = 0$) 是不稳定的, 而且 B_z 低于某临界值也是不稳定的, 这一临界值 B_{zc} 应大于 $0.56B_0$, B_0 为电流片外垂直于电流的磁场分量值。 B_z 的存在使得电流片两侧磁场不是严格反平行, 而是成某一角度 φ (见图 2)。只有当 φ 小于某临界值 $\varphi_c = 2\arctan(B_0/B_{zc})$ 时, 电流片才是稳定的。若把电流片的形成归因于相邻磁区的挤压, 则当两磁区磁场的夹角大于 φ_c 时, 电流片将因不稳定而耗散, 反之则能稳定地持续发展, 直到其强度超过一定限度引起其他类型的不稳定性爆发为止。

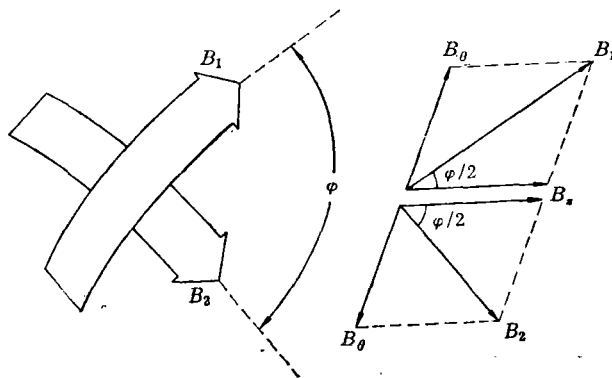


图 2 夹角 φ 的相邻磁场

Fig. 2 Adjacent magnetic fields at an angle φ

为数学处理简便, 本文对扰动位移作了特别限制, 要求它在电流片中心为零。这种处理方式只能得到稳定的必要条件。即便如此简化, 计算量仍然很大, 故对电流片厚度与稳

定性的关系未作数值分析. 对这两个问题有必要进行进一步的讨论.

附 录

将(19)–(22)式对 θ 进行中心差分. (22)式化为

$$\tilde{A}\tilde{\xi}_2 = \tilde{B}\tilde{\xi}_1 - iB^2\tilde{C}\frac{d\tilde{\xi}_0}{dr}, \quad (A1)$$

式中带 $\sim$ 的量为 $l \times l$ 三对角矩阵, 例如

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1^* & & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1^* & \\ & a_1 & a_0 & a_1^* \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, \quad (A2)$$

ξ_0 、 ξ_1 和 ξ_2 为 l 维列矢量, 它们由同一圆弧的相应内点值构成. 注意 a_1^* 表示 a_1 的共轭复数. 有关矩阵元的数值为

$$a_0 = -k^2r^2B_z^2 - \frac{2B_\theta^2}{\Delta\theta^2}, \quad a_1 = \frac{B_\theta^2}{\Delta\theta^2} - ikrB_\theta B_z/\Delta\theta, \quad (A3)$$

$$b_0 = \left(\frac{2}{\Delta\theta^2} - k^2r^2\right)B_\theta B_z, \quad b_1 = -\frac{B_\theta B_z}{\Delta\theta^2} + ikr(B_z^2 - B_\theta^2)/2\Delta\theta, \quad (A4)$$

$$c_0 = krB_z, \quad c_1 = \frac{iB_\theta}{2\Delta\theta}. \quad (A5)$$

(21)、(19)和(20)式分别化为

$$r\nabla \cdot \xi = \frac{d\xi_0}{dr} + \frac{i}{B^2}\tilde{C}\xi_2 - \frac{i}{B^2}\tilde{E}\xi_1, \quad (A6)$$

$$\tilde{F}\xi_1 = \frac{i\gamma\mu p}{B^2}\tilde{E}r\nabla \cdot \xi + i\tilde{E}\frac{d\xi_0}{dr} - 2ikB_\theta\xi_0, \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} & iB^2\frac{d^2\xi_0}{dr^2} + (2rB_\theta B'_\theta - B^2)\frac{d\xi_0}{dr} + r\tilde{C}\xi_0 + \gamma\mu pr\frac{d}{dr}(r\nabla \cdot \xi) \\ & + \gamma\mu(rp' - p)r\nabla \cdot \xi - ir\tilde{E}\frac{d\xi_1}{dr} - ir\tilde{H}\xi_1 = 0. \end{aligned} \quad (A8)$$

注意, (A6)–(A7) 诸式中的 $\nabla \cdot \xi$ 也应理解为 l 维列矢量, 它由同一圆弧的全部内点值构成. 有关矩阵元数值为

$$e_0 = krB_\theta, \quad e_1 = -\frac{iB_z}{2\Delta\theta}, \quad (A9)$$

$$f_0 = -k^2r^2 - \frac{2}{\Delta\theta^2}, \quad f_1 = \frac{1}{\Delta\theta^2}, \quad (A10)$$

$$g_0 = \frac{1}{r}\left(2B_\theta^2 - k^2r^2B_z^2 - 2rB_\theta B'_\theta - \frac{2B_\theta^2}{\Delta\theta^2}\right), \quad g_1 = \frac{B_\theta^2}{r^2\Delta\theta^2} - \frac{ikB_\theta B_z}{r\Delta\theta}, \quad (A11)$$

$$h_0 = k(rB'_\theta + 2B_\theta), \quad h_1 = -\frac{i}{2r\Delta\theta}(rB'_z - B_z). \quad (A12)$$

将(A6)代入(A7)并利用(A1)可解出 ξ_1 和 ξ_2 , 结果如下:

$$\xi_1 = i\tilde{M}^{-1}\tilde{N}\frac{d\xi_0}{dr} - 2ikB_\theta\tilde{M}^{-1}\xi_0, \quad (A13)$$

$$\xi_1 = i\tilde{Q}^{-1}\tilde{R} \frac{d\xi_0}{dr} - 2ikB_\theta\tilde{Q}^{-1}\xi_0, \quad (A14)$$

式中

$$\tilde{M} = \tilde{F} - \frac{\gamma\mu p}{B^4}\tilde{E}^2 + \frac{\gamma\mu p}{B^4}\tilde{E}\tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}, \quad (A15)$$

$$\tilde{N} = \left(1 + \frac{\gamma\mu p}{B^2}\right)\tilde{E} + \frac{\gamma\mu p}{B^2}\tilde{E}\tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{C}, \quad (A16)$$

$$\tilde{Q} = \left(\tilde{F} - \frac{\gamma\mu p}{B^4}\tilde{E}^2\right)\tilde{B}^{-1}\tilde{A} + \frac{\gamma\mu p}{B^4}\tilde{E}\tilde{C}, \quad (A17)$$

$$\tilde{R} = \left(1 + \frac{\gamma\mu p}{B^2}\right)\tilde{E} - B^2\left(\tilde{F} - \frac{\gamma\mu p}{B^4}\tilde{E}^2\right)\tilde{B}^{-1}\tilde{C}. \quad (A18)$$

利用 (A6)、(A13) 和 (A14)、(A8) 化为如下常微分方程组

$$\tilde{X} \frac{d^2\xi_0}{dr^2} + \tilde{Y} \frac{d\xi_0}{dr} + \tilde{Z}\xi_0 = 0, \quad (A19)$$

式中

$$\tilde{X} = (B^2 + \gamma\mu p)\tilde{I} + (1 + \gamma\mu p)\tilde{E}\tilde{M}^{-1}\tilde{N} - \frac{\gamma\mu p}{B^2}\tilde{C}\tilde{Q}^{-1}\tilde{R}, \quad (A20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y} = & \left(2B_\theta B'_\theta - \frac{B^2}{r}\right)\tilde{I} + r \frac{d}{dr} \left[\frac{\gamma\mu p}{r}\tilde{I} + \frac{\gamma\mu p}{rB^2}(\tilde{E}\tilde{M}^{-1}\tilde{N} - \tilde{C}\tilde{Q}^{-1}\tilde{R}) \right] \\ & + \tilde{H}\tilde{M}^{-1}\tilde{N} + 2kB_\theta \left[\frac{\gamma\mu p}{B^2}\tilde{C}\tilde{Q}^{-1} - \left(1 + \frac{\gamma\mu p}{B^2}\right)\tilde{E}\tilde{M}^{-1} \right] \\ & + \tilde{E} \frac{d}{dr}(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}), \end{aligned} \quad (A21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = & \tilde{G} - 2kB_\theta\tilde{H}\tilde{M}^{-1} + 2kr \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{rB^2} \gamma\mu p B_\theta \tilde{C}\tilde{Q}^{-1} \right) \\ & - 2krB_\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{rB^2} \gamma\mu p \tilde{E} \right) \tilde{M}^{-1} - 2k \left(1 + \frac{\gamma\mu p}{B^2} \right) \tilde{E} \frac{d}{dr} (B_\theta \tilde{M}^{-1}), \end{aligned} \quad (A22)$$

其中 $\tilde{I}$ 表示单位矩阵。

进一步将 (A19) 对 r 进行中心差分得到 (23) 式, 其中 A 为块三对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \tilde{W}_1 & 0 \\ \tilde{U}_2 & \tilde{V}_2 & \tilde{W}_2 \\ & \tilde{U}_3 & \tilde{V}_3 & \tilde{W}_3 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \tilde{U}_m & \tilde{V}_m \end{bmatrix}, \quad (A23)$$

$$\tilde{U}_j = \frac{1}{r_{j+1} - r_{j-1}} \left(\frac{2}{r_j - r_{j-1}} \tilde{X} - \tilde{Y} \right), \quad (A24)$$

$$\tilde{V}_j = \tilde{Z} - \frac{2}{(r_{j+1} - r_j)(r_j - r_{j-1})} \tilde{X}, \quad (A25)$$

$$\tilde{W}_j = \frac{1}{r_{j+1} - r_{j-1}} \left(\frac{2}{r_{j+1} - r_j} \tilde{X} + \tilde{Y} \right). \quad (A26)$$

参 考 文 献

- [1] Wu, S. T., Y. Q. Hu, K. Krall, M. J. Hagyard and J. B. Smith, *Solar Phys.*, Vol. 90, p. 117, 1984.

- [2] Hu, Y. Q., Proc. of Kunming Workshop on Solar Physics and Interplanetary Travelling Phenomena (Ed. by C. de Jager and B. Chen), Science Press, 1985.
- [3] Parker, E. N., Proc. of Workshop on Coronal Prominence and Plasmas (Ed. by A. Poland), Berkeley Springs, 1986.
- [4] Heyvaerts, J., E. R. Priest and D. M. Rust, *Ap. J.*, Vol. **216**, p. 123, 1977.
- [5] 胡友秋, 中国科学 **A** 辑, 第 **10** 期, 第 928 页, 1985.
- [6] 胡友秋和金曙平, 空间科学学报, 第 **7** 卷, 第 1 页, 1987.
- [7] Uchida, Y. and T. Sakurai, *Solar Phys.*, Vol. **51**, p. 413, 1977.
- [8] Newcomb, W. A., *Annals Phys.*, Vol. **10**, p. 232, 1960.
- [9] Bernstein, I. B., E. A. Friemann, M. D. Kruskal and R. M. Kulsrud, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. **A244**, p. 17, 1958.
- [10] 胡友秋, 中国科学 **A** 辑, 第 **11** 期, 第 1201 页, 1986.
- [11] Schindler, K., J. Birn and L. Janicke, *Solar Phys.*, Vol. **87**, p. 103, 1983.
- [12] Hood, A. W. and E. R. Priest, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, Vol. **17**, p. 297, 1981.
- [13] Hood, A. W., *Solar Phys.*, Vol. **87**, p. 279, 1983.
- [14] Cargill, P. J., A. W. Hood and S. Migliuolo, *Ap. J.*, Vol. **309**, p. 402, 1986.

ON PROBLEMS OF THE STABILITY OF ELECTRIC CURRENT SHEETS

Zheng Hui-nan Hu You-qiu

(Department of Earth and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

Based on the ideal magnetohydrodynamics, the present paper discusses the linear stability of a semicircular electric current sheet tied at the photosphere. The main conclusion is that the electric current sheet becomes unstable if the magnetic field component in the direction of the electric current is less than a certain critical value. Furthermore, the wave number of the disturbance in the current direction, which causes the instability first, is approximately the reciprocal of the diameter of the current sheet circle.

Key words Sun, Magnetic field, Current sheet, Stability