

广义重心坐标的递推关系

钱毅加, 唐 烁, 王旭辉

(合肥工业大学数学学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 从线性方程组解空间的角度理解广义重心坐标(GBCs), 给出平面重心坐标从 n 边形到 $n+1$ 边形的递推关系式。将构造重心坐标的问题转化为构造函数的问题, 不需考虑坐标函数的几何意义, 选取满足约束条件的函数即可构造重心坐标。在推导过程中, $n+1$ 边形 ($n \geq 3$) 可看作 n 边形与一顶点的组合, 将该顶点用 n 边形的顶点线性表出, 可将 $n+1$ 边形上的重心坐标化为 n 边形上的齐次坐标(homogeneous coordinates)。为第 $n+1$ 个坐标函数施加一定限制条件, 即得到 n 边形上一组重心坐标。

关 键 词: 重心坐标; 递推式; 多边形

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGj.2095-302X.2018020251

文献标识码: A

文 章 编 号: 2095-302X(2018)02-0251-05

Recursion on Generalized Barycentric Coordinates

QIAN Yijia, TANG Shuo, WANG Xuhui

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230009, China)

Abstract: From the view of the solution space of a system of linear equations, the recursion formula is worked out on generalized barycentric coordinates (GBCs) from n -gons to $n+1$ -gons. Unlike the classical way to construct GBCs, which based on geometric meaning of coordinate functions, a new method is provided to construct GBCs for planar n -gons if a coordinate function is chosen which satisfies constraint condition. To get the recursion formula, since a $(n+1)$ -gons ($n \geq 3$) can be seen as a n -gons plus one extra vertex, the extra vertex can be represented by affine linear combination of the vertices of the n -gons. Hence the GBCs in $(n+1)$ -gons can be rewritten by homogeneous coordinates in n -gons. Conditions for the $(n+1)$ th coordinate function are presented to satisfy the requirement of GBCs.

Keywords: barycentric coordinates; recursion; polygon

经典的重心坐标是一种定义在平面多边形上的坐标, 而不局限于具体的坐标系。多边形内的点由多边形各顶点线性表出, 组合系数便是重心坐标。为将 GBCs 的构造方法一般化, 本文从递推关系去探讨构造 GBCs 的本质。文献[1]用质心定义了一种自由坐标的几何结构, 对于单形中一点, 赋予单形各顶点一定质量使得此点成为单形的重

心, 各顶点上的质量排列成向量即此点的重心坐标。相关学者在此基础上做了许多工作, 将重心坐标广泛应用于图像处理和有限元分析^[1-4], 并构造出众多适用范围不一的重心坐标。WACHSPRESS^[5]给出了凸多边形上的一类有理重心坐标(图 1)。FLOATER^[6]给出了均值坐标(mean value coordinates), 是一类可定义在非凸多边形上

收稿日期: 2017-07-09; 定稿日期: 2017-08-28

第一作者: 钱毅加(1992-), 女, 安徽合肥人, 硕士研究生。主要研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: qianyj@mail.hfut.edu.cn

通信作者: 王旭辉(1980-), 男, 安徽庐江人, 副教授, 博士。主要研究方向为计算机辅助几何设计。E-mail: xhw@hfut.edu.cn

的重心坐标。冯结青和赵豫红^[7]在此基础上提出了一种鲁棒的均值重心坐标计算方法,避免了均值坐标在多边形边界和顶点上的不稳定性。WARREN 等^[1]将重心坐标推广到任意凸集上,给出了连续边界区域上重心坐标的显式表达式。ZHANG 等^[8]给出了局部重心坐标(local value coordinates),局部改变不产生全局影响。ANISIMOV 等^[9]结合细分的方法给出了细分重心坐标。

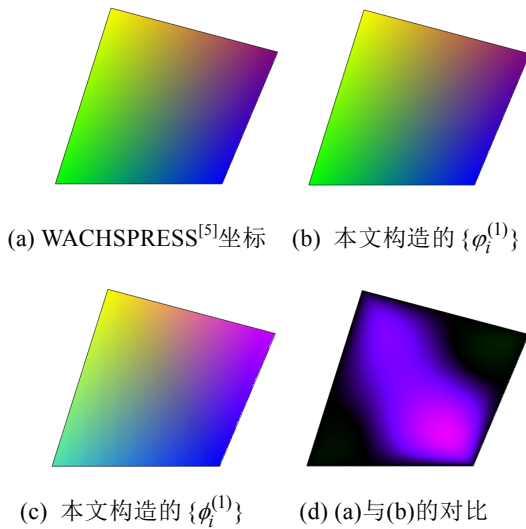


图1 3种不同GBCs在四边形上的颜色插值

定义重心坐标。令 $P \subset \mathbb{R}^2$ 是一个平面 n 边形,其顶点 $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$, $n \geq 3$ 以逆时针顺序标记,令 $[i]$ 表示 i 对 j 求余, $e_i := [v_i, v_{i+1}]$ 为 P 的第 i 条边界。对任意 $x \in P$, 定义函数 $\phi_i(x): P \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$, 若

$$x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) v_i, \quad \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \equiv 1 \quad (1)$$

则称 $\phi_i(x)$ 为齐次坐标。此外,若 $\phi_i(x) \geq 0$, $i=1,2,\dots,n$, 则称 $\phi_i(x)$ 为重心坐标。

1 多边形上的重心坐标

显然可将式(1)看作一个以 $\phi_i(x)$ 为未知量、 x 和 v_i 为已知量的元非 n 齐次线性方程组,重心坐标是式(1)的非负解。当 $n=3$ 时,式(1)的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其中, (x_k, y_k) 为 v_k 的坐标, $k=1,2,3$ 。为书写方便,在不引起混淆的情况下将函数自变量省去,用 ϕ_i 表示 $\phi_i(x)$ 。在非退化三角形情况下 $\det(A) \neq 0$, 因此 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 有唯一解。经计算可知, $\phi_i \geq 0$ 当且仅当 $x, v_{[i+1]}, v_{[i+2]}$ 满足右手法则。当 x 在三角形内部时, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 均大于零; 当 x 在边界 e_i 上时, $v_i, v_{[i+1]}$ 对应的坐标大于等于零, $v_{[i+2]}$ 对应的坐标为零。 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 是 P 上的重心坐标。而 $n \geq 4$ 时, $\phi_1, \dots, \phi_n$ 不再唯一。

已知平面 $n+1$ 边形 $P(n \geq 3)$, n 边形 Q 由属于 P 的 n 个顶点构成,不妨令 $v_1, \dots, v_n$ 为 Q 的顶点。已知 Q 上一组重心坐标 $\{\xi_i(x)\}_{i=1,\dots,n}$, 记 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 。将 v_{n+1} 用 Q 的顶点线性表出,其中 v_i 对应系数为 $\xi_i(v_{n+1})$, 设 $I+(L)$ 表示 $\xi_i(v_{n+1})$ 为正(负)时的下标 i 的集合。

定理. 对任意平面 $n+1$ 边形 $P(n \geq 3)$, 其顶点为 $\{v_i\}_{i=1,\dots,n+1}$, 其中 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 构成 n 边形 Q , 已知 Q 上一组重心坐标 ξ , 则 P 上的重心坐标 $(\phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ 可表示为

$$(\xi(x) - \xi(v_{n+1})\phi_{n+1}(x), \phi_{n+1}(x)) \quad (2)$$

其中, $\phi_{n+1}(x)$ 满足

$$\max_{i \in L^-} \left\{ \frac{\xi_i(x)}{\xi_i(v_{n+1})}, 0 \right\} \leq \phi_{n+1}(x) \leq \min_{i \in L^+} \frac{\xi_i(x)}{\xi_i(v_{n+1})}, x \in P \quad (3)$$

证明 1. 定理在 $n=4$ 时成立。 $n=4$ 时, 将 v_4 用 $Q = \Delta v_1 v_2 v_3$ 线性表示

$$v_4 = \xi_1(v_4)v_1 + \xi_2(v_4)v_2 + \xi_3(v_4)v_3 \quad (4)$$

组合系数唯一,但不一定全正(如 P 为凸多边形时, v_4 一定在 $\Delta v_1 v_2 v_3$ 的外部)。 $\xi_i(v_4)$ 为零意味着 P 退化为三角形,故在此不考虑这种情况。

将式(4)代入式(1)得

$$x = \sum_{i=1}^3 (\phi_i(x) + \xi_i(v_4)\phi_4(x))v_i + \sum_{i=1}^4 \phi_i(x)v_i \equiv 1 \quad (5)$$

记 $\hat{\phi}_i(x) = \phi_i(x) + \xi_i(v_4)\phi_4(x)$, $i=1,2,3$, 易知 $\sum_{i=1}^3 \hat{\phi}_i = 1$, 则 $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1,2,3}$ 是 Q 上的齐次坐标,三角形上的齐次坐标就是重心坐标,即 $\hat{\phi}_i = \xi_i$ 。则对 $i=1,2,3$ 有

$$\phi_i(x) = \xi_i(x) - \xi_i(v_4)\phi_4(x) \quad (6)$$

式(1)的通解为 $(\xi(x) - \xi(v_4)\phi_4(x), \phi_4(x))$,

$\phi_4(\mathbf{x})$ 为自由变量。

为了得到重心坐标, 要保证坐标函数的非负性。首先, 令 $\phi_4(\mathbf{x}) \geq 0$, 再按照 $\xi_i(\mathbf{v}_4)$ 的正负性分类讨论:

(1) 当 $i \in I_-$, 若 $\xi_i(\mathbf{x}) \geq 0$, 必有 $\phi_i(\mathbf{x}) \geq 0$, 若 $\xi_i(\mathbf{x}) < 0$, 令 $\phi_4(\mathbf{x}) \geq \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_4)}$, 从而 $\phi_i(\mathbf{x}) \geq 0$;

(2) 当 $i \in I_+$, 因 $\xi_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{v}_4)\phi_4(\mathbf{x})$, 且 $\phi_i(\mathbf{x}), \phi_4(\mathbf{x}) \geq 0$, 所以 $\xi_i(\mathbf{x}) \geq 0$ 。几何上看, $\mathbf{v}_4$ 与 $\mathbf{v}_{[i+1]_3}, \mathbf{v}_{[i+2]_3}$ 的位置关系满足右手法则, 不论 $\Delta \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$ 呈何种形状(图 2), $\forall \mathbf{x} \in P$ 与 $\mathbf{v}_4$ 情况相同。因此 $\xi_i(\mathbf{x}) \geq 0$ 。令 $\phi_4(\mathbf{x}) \leq \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_4)}$, 从而 $\phi_i(\mathbf{x}) \geq 0$ 。

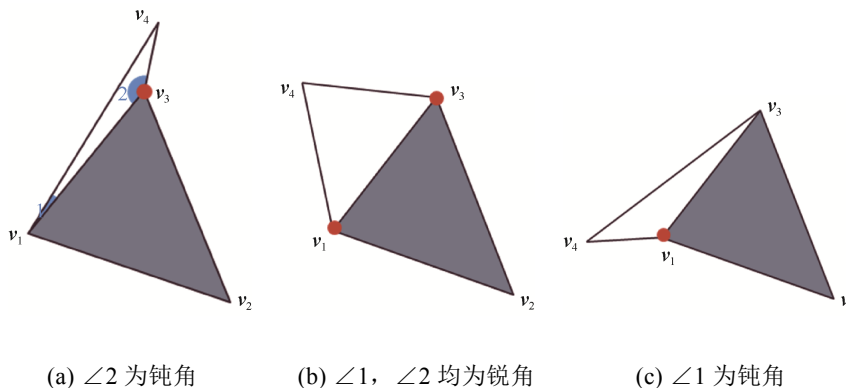


图 2 $\Delta \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$ 的 3 种情况(将 $\angle \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$ 和 $\angle \mathbf{v}_4 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1$ 分别记作 $\angle 1$ 和 $\angle 2$, 红色顶点表示 $\mathbf{v}_4$ 关于此点的重心坐标为正)

综上

$$\max_{i \in I_-} \left\{ \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_4)}, 0 \right\} \leq \phi_4(\mathbf{x}) \leq \min_{i \in I_+} \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_4)}, \quad \mathbf{x} \in P \quad (7)$$

使得 $\mathbf{x}$ 成为 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,4}$ 的凸组合。取定一个自由变量 $\phi_4(\mathbf{x})$, 则构造了四边形上的一组重心坐标。

证明 2. 一般情况。

对于平面 n 边形上重心坐标的构造, 采取递推的方式。将式(1)写为

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\phi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{v}_{n+1})\phi_{n+1}(\mathbf{x}))\mathbf{v}_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (8)$$

记 $\hat{\phi}_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{v}_{n+1})\phi_{n+1}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, 易知 $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1,\dots,n}$ 是 Q 上的齐次坐标。当 $\phi_{n+1}(\mathbf{x}) \leq \min_{i \in I_-} \frac{-\phi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_{n+1})}$, 有 $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1,\dots,n}$ 全正, 令 $\hat{\phi}_i$ 取 Q 上的重心坐标 ξ_i , $i = 1, \dots, n$ 。那么 $(\phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ 可表示为式(2)。

将式(2) $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,n}$ 代入条件 $\phi_{n+1}(\mathbf{x}) \leq \min_{i \in I_-} \frac{-\phi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_{n+1})}$, 易知其总成立。与 $n=4$ 的情形同理, 根据 $\xi_i(\mathbf{v}_{n+1})$ 的正负性分类讨论可知, 当 $\phi_{n+1}(\mathbf{x})$ 满足式(3)时, $\mathbf{x}$ 成为 $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ 的凸组合。

证毕。

推导过程中, 为了保证自由变量在其范围内

$$\text{有值可取, 就要保证 } \max_{i \in I_-} \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_{n+1})} \leq \min_{j \in I_+} \frac{\xi_j(\mathbf{x})}{\xi_j(\mathbf{v}_{n+1})},$$

$\mathbf{x} \in P$ 。本文未能给出严格证明, 但目前实例中并未发现反例。当 $\mathbf{x}$ 取 $\mathbf{v}_{n+1}$ 时, 式(3)中等号成立, 即 $\phi_{n+1}(\mathbf{v}_{n+1}) = 1$ 。图 3 中画出了自由变量的取值范围($n=4$), 此时自由变量的上下界围成一个四面体, 自由变量定义在给定四边形上的值需在此四面体内。

在构造自由变量 $\phi_{n+1}(\mathbf{x})$ 时, 需要判断其与已知

$$\text{函数 } \max_{i \in I_-} \frac{\xi_i(\mathbf{x})}{\xi_i(\mathbf{v}_{n+1})} \text{ 和 } \min_{j \in I_+} \frac{\xi_j(\mathbf{x})}{\xi_j(\mathbf{v}_{n+1})} \text{ 在 } P \text{ 内的数值大小}$$

关系。已知两函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 在 P 内有定义, 可令 $F = f - g$, 求出集合 $F_- = \{\mathbf{x} | F(\mathbf{x}) < 0\}$ 和 $F_+ = \{\mathbf{x} | F(\mathbf{x}) \geq 0\}$ 分别与 P 作交运算, 可得 P 内 f 与 g 的数值大小关系为

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in P \cap F_+ \\ f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in P \cap F_- \end{cases} \quad (9)$$

不等式(3)将四边形分割成了四块区域(图 4(b))。

将递推关系用于构造多边形时, 对多边形没有形状要求, 只需有 3 个不共线的顶点, 因此凸与非凸多边形均适用。而初始 3 个顶点的选择,

不影响最终结果。对于 n 边形 P , 选取 3 个不共线的顶点, 得到式(1)的一个解 ϕ , 选取另一组顶点得到解 $\hat{\phi}$, 而解空间维数为 $n-3$, 只要在自由变量取值过程中保证 ϕ 和 $\hat{\phi}$ 中有 $n-3$ 个相同的坐标函数, 就会得到相同的重心坐标。也就是说, 从任意 3 个不共线顶点出发构造的重心坐标适用于整个 P 内。多边形边界点的重心坐标, 可用该边界的两个端点的线性插值定义^[10]。

2 实 例

利用递推关系构造具体的重心坐标。给定五边形 P (图 4(a)), 其顶点 $v_1=(1,0)$, $v_2=(4,0)$, $v_3=(5,3)$, $v_4=(2,4)$, $v_5=(0,2)$ 。 P_0 是以 v_1, v_2, v_3 为顶点的三角形, P_0 上的重心坐标 $\{\xi_i^{(0)}(\mathbf{x})\}_{i=1,2,3}$ 为

$$\frac{1}{9}(-3x+y+12, 3x-4y-3, 3y) \quad (10)$$

P_1 是以 $v_1, \dots, v_4$ 为顶点的四边形, P_1 上的重心坐标 $\{\xi_i^{(1)}(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,4}$ 为

$$\left(\xi_1^{(0)}(\mathbf{x}) - \frac{10}{9}\sigma_4, \xi_2^{(0)}(\mathbf{x}) + \frac{13}{9}\sigma_4, \xi_3^{(0)}(\mathbf{x}) - \frac{4}{3}\sigma_4, \sigma_4 \right) \quad (11)$$

其中, 关于 v_4 的坐标 σ_4 是自由变量。令 $\tau_i^{(j)}$ 表示

$$\frac{\xi_i^{(j)}(\mathbf{x})}{\xi_i^{(j)}(\mathbf{v}_{j+4})}, \quad \sigma_4 \text{ 的取值范围为}$$

$$\max\{\tau_2^{(0)}, 0\} \leq \sigma_4 \leq \min\{\tau_1^{(0)}, \tau_3^{(0)}\}, \quad \mathbf{x} \in P_1 \quad (12)$$

不等式在平面上将 P_1 分割成了 4 个区域 D_{01} 、 D_{03} 、 D_{21} 和 D_{23} (图 4(b)), 当 $\mathbf{x} \in D_{ij}$, $\sigma_4(\mathbf{x})$ 属于区间 $[\tau_i^{(0)}, \tau_j^{(0)}]$, 其中 $\tau_0^{(0)} = 0$ 。图 3 在三维中画出了 σ_4 的取值范围。

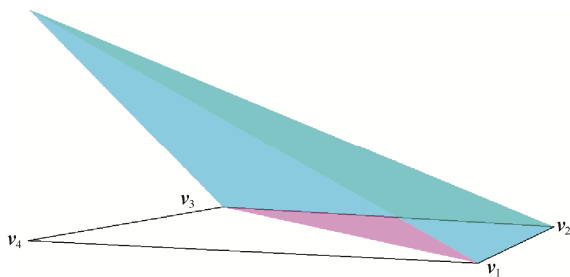
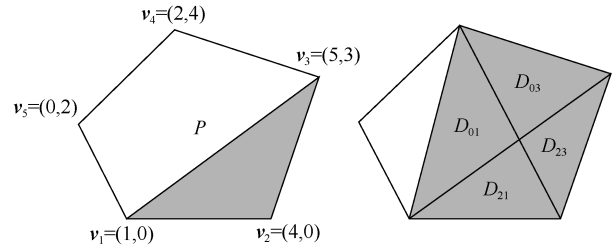


图 3 σ_4 取值范围(青色为上界, 紫色为下界)



(a) 初始三角形 (b) 不等式(3)对四边形的划分

图 4 构造五边形上的重心坐标

WACHSPRESS^[5]提出了凸多边形上的一种重心坐标

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j} \quad (13)$$

其中, $\omega_j = A(\mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}) \cdot \prod_{k \notin \{j, j+1\}} A(\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{x})$ 。

对于凸 $n+1$ 边形 P , 从 v_1, v_2, v_3 出发构造重心坐标, 依次令式(2)中的自由变量取 P 中 $k+1$ 边形上的 WACHSPRESS 坐标^[5] $\lambda_{k+1}(\mathbf{x})$, $k=3, \dots, n$ 。令 σ_4 取 P_1 上的 λ_4 , 所得 $\xi_i^{(1)}$ 即 P_1 上的 λ_i , $i=1, \dots, 3$ 。用 $\{\xi_i^{(1)}(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,4}$ 算得 P 上的重心坐标 $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,5}$ 为

$$\left(\xi_1^{(1)}(\mathbf{x}) - \frac{112}{137}\sigma_5, \xi_2^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{36}{137}\sigma_5, \xi_3^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{30}{137}\sigma_5, \xi_4^{(1)}(\mathbf{x}) - \frac{91}{137}\sigma_5, \sigma_5 \right) \quad (14)$$

其中, 关于 v_5 的坐标 σ_5 是自由变量, 取值范围为

$$\max\{\tau_2^{(1)}, \tau_3^{(1)}, 0\} \leq \sigma_5 \leq \min\{\tau_1^{(1)}, \tau_4^{(1)}\} \quad (15)$$

令 σ_5 取 P 上的 λ_5 , 计算得 ϕ_i 即 P 上的 λ_i , $i=1, \dots, 4$ 。

取不同的自由变量可得到不同的重心坐标, 令 $\tilde{\sigma}_4 = \frac{\lambda_4 + m_4}{2}$, 其中 λ_4 和 m_4 分别为 P_1 上关于 v_4 的 WACHSPRESS 坐标^[5]和均值坐标, 经验证 $\tilde{\sigma}_4$ 满足式(3), 得到的重心坐标记为 $\{\phi_i^{(1)}(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,4}$ 。图 1(a、b)是分别用 $\{\xi_i^{(1)}\}$ 和 $\{\phi_i^{(1)}\}$ 在 P_1 上进行颜色插值的结果, 为体现两种插值的差异将两结果做差并增加对比度(图 1(d))。

下面在 P_1 上再构造一组新的重心坐标。从图 4(b)不难看出, 存在定义于 P_1 上的分段多项式函

数为

$$\hat{\sigma}_4 = \begin{cases} \tau_1^{(0)}, & \mathbf{x} \in D_{01} \cup D_{21} \\ \tau_3^{(0)}, & \mathbf{x} \in D_{03} \cup D_{23} \end{cases} \quad (16)$$

满足式(3), 且由于 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_4$ 所在直线上有 $\tau_1^{(0)} = \tau_3^{(0)}$, 因此 $\hat{\sigma}_4$ 是 C^0 连续的。通过 $\hat{\sigma}_4$ 得到的重心坐标记为 $\{\phi_i^{(1)}(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,4}$, 经计算, $\mathbf{x} \in D_{01} \cup D_{21}$ 时

$$\begin{cases} \phi_1^{(1)}(\mathbf{x}) = 0 \\ \phi_2^{(1)}(\mathbf{x}) = (-x - 3y + 14) / 10 \\ \phi_3^{(1)}(\mathbf{x}) = (2x + y - 8) / 5 \end{cases} \quad (17)$$

$\mathbf{x} \in D_{03} \cup D_{23}$ 时

$$\begin{cases} \phi_1^{(1)}(\mathbf{x}) = (-2x - y + 8) / 6 \\ \phi_2^{(1)}(\mathbf{x}) = (4x - y - 4) / 12 \\ \phi_3^{(1)}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

均是 C^0 连续的多项式函数。易见 $\{\phi_i^{(1)}(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,4}$ 是两个三角形上重心坐标的拼接。这里的 $\hat{\sigma}_4$ 其实是取了自由变量 σ_4 的上界, 三维中的图像即图3的青色区域, 同样地, 取 σ_4 的下界可构造另一种重心坐标, 也是 C^0 连续的多项式函数。图1(c)是用 $\{\phi_i^{(1)}\}$ 在 P_1 上进行颜色插值的结果。

3 结束语

从线性代数角度理解重心坐标, 探讨从 n 边形上重心坐标递推到 $n+1$ 边形时的限制条件, 给出了构造重心坐标的一种新思路。不局限于那些存在几何意义的函数, 只要构造出一个满足不等关系的函数, 就能得到一组重心坐标。由式(2)易知, 可将 $n+1$ 边形上的重心坐标看作 n 边形上的重心坐标 ξ 与赋上权 $-\xi(\mathbf{v}_{n+1})$ 的函数 ϕ_{n+1} 相加的和, 那么通过选取具有某些性质的 ξ 和 ϕ_{n+1} , 所得

重心坐标也具有相应性质, 如实例中构造的 C^0 连续的多项式重心坐标 $\{\phi_i^{(1)}\}$ 。由于用递推方法得到的重心坐标, 只与每一步的自由变量有关, 因此如何构造满足不等式的函数, 并可以根据需求设定其满足某些性质是值得研究的问题。

参考文献

- [1] WARREN J, SCHAEFER S, HIRANI A N, et al. Barycentric coordinates for convex sets [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, 27(3): 319-338.
- [2] LI X Y, JU T, HU S M. Cubic mean value coordinates [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): 126.
- [3] RAND A, GILLETTE A, BAJAJ C. Quadratic serendipity finite elements on polygons using generalized barycentric coordinates [J]. *Mathematics of Computation*, 2014, 83(290): 2691-2716.
- [4] 肖艳阳, 涂锦灿, 陈中贵. 结合广义重心坐标与 Voronoi 剖分的函数分片逼近[J]. *图学学报*, 2015, 36(3): 367-375.
- [5] WACHSPRESS E L. A rational finite element basis [M]. New York: Academic Press, 1975: 49-51.
- [6] FLOATER M S. Mean value coordinates [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2003, 20(1): 19-27.
- [7] 冯结青, 赵豫红. 均值重心坐标的鲁棒算法及其几何性质[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2004, 16(6): 772-776.
- [8] ZHANG J Y, DENG B L, LIU Z S, et al. Local barycentric coordinates [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(6): 188.
- [9] ANISIMOV D, DENG C Y, HORMANN K. Subdividing barycentric coordinates [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2016, 43: 172-185.
- [10] FLOATER M S. On the monotonicity of generalized barycentric coordinates on convex polygons [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2016, 42: 34-39.