

http://bhxb.buaa.edu.cn jbuua@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2018.0599

基于 ADMM 算法的航空发动机模型预测控制

单睿斌, 李秋红*, 何凤林, 冯海龙, 管庭筠

(南京航空航天大学 能源与动力学院 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 为了提升航空发动机非线性模型预测控制(MPC)的实时性,将交替方向乘法(ADMM)应用于模型预测控制的滚动优化中。基于状态空间模型构造预测方程,通过引入辅助变量和对偶变量,将二次型性能指标和发动机约束改写为适合 ADMM 算法求解的形式。在航空发动机部件级模型上开展的仿真结果表明,基于 ADMM 算法的单变量模型预测能够实现指令信号的高性能跟踪和约束的有效管理。相比于内点法(IPM),ADMM 算法在滚动优化过程中,在不同控制指令下,均具有更高的实时性,且在预测时域增加的情况下,计算耗时增加更少,验证了其在模型预测控制中应用的有效性。

关 键 词: 航空发动机; 模型预测控制; 交替方向乘法(ADMM); 二次规划(QP); 实时性

中图分类号: V233.7

文献标识码: A

文章编号: 1001-5965(2019)06-1240-08

模型预测控制(Model Predictive Control, MPC)具有显式处理航空发动机工作中约束的能力,可以简化航空发动机控制系统的结构,在发动机控制领域获得了广泛的关注^[4]。MPC 通过在线优化的手段获得最优控制量,因此高效的在线优化算法可以提升 MPC 的实时性,有助于其在航空发动机上的应用。常用于 MPC 的优化算法有二次规划(Quadratic Programming, QP)^[5]和序列二次规划(Sequential Quadratic Programming, SQP)^[6]。SQP 方法在每次迭代中需要计算一个 QP 子问题,计算量大,实时性较差;求解 QP 问题的方法包括内点法(Interior Point Method, IPM)和有效集方法(Active Set Method)。有效集方法每次迭代需要判定有效集操作,且无法利用 MPC 问题稀疏性求解,适合控制变量和约束数量较少的情况^[7];IPM 在每次迭代中需要求解 Karush-Kuhn-Tucker (KKT)系统,可以利用 MPC 的稀疏性加速求解,但是在迭代过程中 KKT 系统会改变,

每次迭代需要进行矩阵分解或者求逆操作^[8],在约束多或预测时域较长的情况下计算耗时较多。

交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)于 1975 年提出,在 20 世纪 80 年代获得广泛讨论^[9],其将一个大的、具有可分结构的优化问题分解为几个小的优化问题,降低了求解的难度和算法的复杂性。近 10 年来,原本用来求解变分不等式的 ADMM 在优化计算中被广泛采用^[10-12]。

本文通过引入辅助变量将航空发动机 MPC 中的 QP 问题转化为可分结构的优化问题,并基于 ADMM 算法对其进行求解,与 IPM 算法进行比较,验证了 ADMM 算法的优越性。

1 航空发动机 MPC 问题

航空发动机控制系统具有稳态控制、加减速控制^[13]、超限保护控制^[14-18]、抗执行机构积分饱和等功能。传统的发动机控制系统各功能模块通

收稿日期: 2018-10-19; 录用日期: 2018-11-08; 网络出版时间: 2019-02-20 15:25
网络出版地址: kns.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20190220.0918.001.html
* 通信作者: E-mail: lqh203@nuaa.edu.cn

引用格式: 单睿斌, 李秋红, 何凤林, 等. 基于 ADMM 算法的航空发动机模型预测控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(6): 1240-1247. SHAN R B, LI Q H, HE F L, et al. Model predictive control based on ADMM for aero-engine[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(6): 1240-1247 (in Chinese).

过 min/max 选择、切换等逻辑综合为一个整体,控制结构复杂。在 MPC 中,控制量通过求解一个约束最优化问题来获得,只需要一个优化控制器,就可以实现上述所有控制功能,且避免了设计过程中的保守性,因而得到了广泛的关注。

在单输入 MPC 中,取二次型性能指标,在采样时刻 d 之后的预测时域内,航空发动机 MPC 的目标是求解在预测时域内使性能指标 J 最小的燃油流量 W_{fb} 输入序列,同时满足发动机低压转子转速 N_1 、压气机出口静压 P_{3s} 和低压涡轮出口总温 T_6 不超过其最大值。可表示为

$$\min J = \sum_{i=0}^{n_p} (r_{ef} - N_h(d+i))^2 + \lambda \sum_{i=0}^{n_p} W_{fb}(d+i)^2$$

s. t.
$$\begin{cases} N_1 \leq N_{1max} \\ P_{3smin} \leq P_{3s} \leq P_{3smax} \\ T_6 \leq T_{6max} \\ W_{fbmax} \leq W_{fb} \leq W_{fbmin} \end{cases}$$

(1)

式中: r_{ef} 为高压转子转速指令; N_h 为高压转子转速; λ 为权重系数; n_p 为预测时域的长度。

求解式(1)需要获得各个输出量和 W_{fb} 之间的解析表达关系。在采样时刻 d 将发动机表示为一个线性系统为

$$\begin{cases} N(d+1) = AN(d) + BW_{fb}(d) \\ y_e = CN(d) + DW_{fb}(d) \\ y_c = C_c N(d) + D_c W_{fb}(d) \end{cases}$$

(2)

式中: $N = [N_1, N_{h1}]^T$ 为状态量; $y_e = N_h$ 为被控制量; $y_c = [N_1, P_{3s}, T_6]^T$ 为需要限制的量; A 、 B 、 C 和 D 为系统的系数矩阵; C_c 、 D_c 为限制量对应的输出矩阵。

利用离散系统状态方程的响应:
$$N(d+i) = A^i N(d) + A^{i-1} B W_{fb}(d) + A^{i-2} B W_{fb}(d+1) + \cdots + B W_{fb}(d+i-1)$$

(3)

$$y_e(d+i) = C A^i N(d) + C A^{i-1} B W_{fb}(d) + C A^{i-2} B W_{fb}(d+1) + \cdots + C B W_{fb}(d+i-1) + D W_{fb}(d+i)$$

(4)

$$y_c(d+i) = C_c A^i N(d) + C_c A^{i-1} B W_{fb}(d) + C_c A^{i-2} B W_{fb}(d+1) + \cdots + C_c B W_{fb}(d+i-1) + D_c W_{fb}(d+i)$$

(5)

可以获得输出量在预测时域 n_p 内的预测值,其预测方程为

$$\begin{cases} \hat{y}_e = FN(d) + H\hat{u} \\ \hat{y}_c = F_c N(d) + H_c \hat{u} \end{cases}$$

(6)

式中: $\hat{y}_e = [y_e(d+1), y_e(d+2), \cdots, y_e(d+n_p)]^T$ 和

$\hat{y}_c = [y_c^T(d+1), y_c^T(d+2), \cdots, y_c^T(d+n_p)]^T$ 分别为发动机在预测时域内各个时刻的被控制量输出序

列和限制量输出序列;
$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_p} \end{bmatrix}; F_c = \begin{bmatrix} C_c A \\ C_c A^2 \\ \vdots \\ C_c A^{n_p} \end{bmatrix};$$

$$H = \begin{bmatrix} CB & D & 0 & \cdots \\ CAB & CB & D & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n_p-1}B & CA^{n_p-2}B & CA^{n_p-3}B & \cdots \end{bmatrix}; H_c = \begin{bmatrix} C_c B & D_c & 0 & \cdots \\ C_c AB & C_c B & D_c & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_c A^{n_p-1}B & C_c A^{n_p-2}B & C_c A^{n_p-3}B & \cdots \end{bmatrix}; \hat{u} =$$

$[W_{fb}(d+1), W_{fb}(d+2), \cdots, W_{fb}(d+n_p)]^T$ 为发动机在预测时域内各个时刻的控制输入序列。

式(1)可以改写为一个带有线性不等式约束的二次规划问题:

$$\min J = \hat{u}^T (H^T H + \lambda I) \hat{u} + 2(FN(k)H - r_{ef}H)^T \hat{u}$$

s. t.
$$\begin{bmatrix} H_c \\ I \end{bmatrix} \hat{u} \leq \begin{bmatrix} Y_{max} - F_c N(k) \\ U_{max} \end{bmatrix}$$

(7)

式中: Y_{max} 为由 N_{1max} 、 P_{3smax} 和 T_{6max} 组成的适当维数的与 $\hat{y}$ 对应的限制序列; U_{max} 为由 W_{fbmax} 构成的输入限制序列。

通过求解 QP 问题式(7),可以获得满足约束条件下,使性能指标最小的最优控制输入序列 $\hat{u} = [W_{fb}(d+1), W_{fb}(d+2), \cdots, W_{fb}(d+n_p)]^T$ 。

为了实现闭环非线性控制,将序列的第一个值 $W_{fb}(d+1)$ 作为发动机所需燃油输入量,然后在 $d+1$ 采样时刻,根据发动机的状态变化重复进行线性化,构造 QP 问题,求解输入序列。这样在每个采样周期求解的是一个线性 MPC 问题,但在整个时域内是一个非线性 MPC 问题。

MPC 通过迭代进行优化搜索来获得最优的控制序列,如果迭代过程耗时较多将限制算法的应用。ADMM 算法具有对偶上升法的可分解性以及乘子法的全局收敛性,近年来得到了大量关注,由于其所需计算量小、算法结构简单,本文将其用于求解航空发动机 MPC 中的优化问题。

2 交替方向乘子法

ADMM 算法可用于求解形如

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t. } \mathbf{Lx} + \mathbf{Mz} = \mathbf{c} \end{cases} \quad (8)$$

的约束规划问题。式中： $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ 为待优化变量； $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z})$ 为待优化的目标函数； $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{p \times n}, \mathbf{M} \in \mathbf{R}^{p \times m}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^p, \mathbf{Lx} + \mathbf{Mz} = \mathbf{c}$ 为问题需满足的线性等式约束。

通过乘子法,引入对偶变量 $\mathbf{y}$,构造增广拉格朗日函数:

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T(\mathbf{Lx} + \mathbf{Mz} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Lx} + \mathbf{Mz} - \mathbf{c}\|_2^2 \quad (9)$$

式中： $\rho > 0$ 为惩罚参数。

ADMM 迭代过程与对偶上升法和乘子法相似,包含 3 部分:原始变量 $\mathbf{x}$ 的迭代更新,原始变量 $\mathbf{z}$ 的迭代更新和对偶变量 $\mathbf{y}$ 的更新过程,更新策略为^[19]

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}) \\ \mathbf{z}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} L_\rho(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{z}, \mathbf{y}^{(k)}) \\ \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + \rho(\mathbf{Lx}^{(k+1)} + \mathbf{Mz}^{(k+1)} - \mathbf{c}) \end{cases} \quad (10)$$

可以看出,在 ADMM 算法中,原始变量 $\mathbf{x}$ 和原始变量 $\mathbf{z}$ 的迭代更新是一个交替进行的过程,每个求解过程只需求解部分变量,降低了求解规模。

3 航空发动机 MPC 的 ADMM 算法实现

将式(7)所描述航空发动机 MPC 中的 QP 问题简写为

$$\begin{cases} \min J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t. } \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{cases} \quad (11)$$

式中： $\mathbf{P} = \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}$ 为正定对称矩阵； $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{h} = \mathbf{FN}(d) \mathbf{H} - r_{\text{ef}} \mathbf{H}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\text{max}} - \mathbf{FN}(d) \\ \mathbf{U}_{\text{max}} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \hat{\mathbf{u}} =$$

$$[\mathbf{W}_{\text{fb}}(d+1), \mathbf{W}_{\text{fb}}(d+2), \dots, \mathbf{W}_{\text{fb}}(d+n_p)]^T.$$

为应用 ADMM 算法,首先添加辅助变量,将式(11)改写为等式约束的形式:

$$\begin{cases} \min J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{z} \\ \mathbf{z} \in \mathcal{C} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^p | \mathbf{z} \leq \mathbf{b}\} \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

由于式(12)所描述的 QP 问题不具有可分形式,不能直接采用 ADMM 算法进行求解。为此将 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{z}$ 视为一个整体变量 $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$,引入辅助变量

约束 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$, 式(12)可以写为

$$\begin{cases} \min f_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + g_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) \\ \text{s. t. } (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (13)$$

式中： $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 为集合 $\mathcal{C} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^p | \mathbf{z} \leq \mathbf{b}\}$ 的指示函数； $g_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{x}} + G(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}})$, $G(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}})$ 为集合 $\mathcal{C} = \{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p | \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{z}}\}$ 的指示函数。

引入对偶变量 $(\mathbf{w}, \mathbf{y})$, 根据式(10),可以得到求解式(13)的 ADMM 迭代过程为^[20]

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}, \tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}) &= \arg \min_{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}): \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{z}}} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{x}} + \\ &\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(k)} + \sigma^{-1} \mathbf{w}^{(k)}\|_2^2 + \\ &\frac{\rho}{2} \|\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^{(k)} + \rho^{-1} \mathbf{y}^{(k)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{z}^{(k+1)}) &= \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{C}} g_2(\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}, \tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}) + \\ &(\mathbf{w}^{(k)})^T (\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}^{(k)})^T (\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \\ &\mathbf{z}) + \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{z}\|_2^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(k+1)} &= \mathbf{w}^{(k)} + \sigma (\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \\ \mathbf{y}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k)} + \rho (\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (16)$$

式中： σ 为惩罚系数。

式(14)表示辅助变量的更新过程,是一个等式约束的 QP 问题,其一阶最优性条件(KKT 条件)为

$$\begin{cases} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} + \mathbf{h} + \sigma (\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} + \mathbf{Q}^T \mathbf{v}^{(k+1)}) = \mathbf{0} \\ \rho (\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)} + \rho^{-1} \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k+1)}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} \end{cases} \quad (17)$$

式中： $\mathbf{v}^{(k+1)}$ 为拉格朗日乘子。消去 $\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}$, 可以获得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} + \sigma \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & -\rho^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} \\ \mathbf{v}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{h} \\ \mathbf{z}^{(k)} - \rho^{-1} \mathbf{y}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} + \rho^{-1} (\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}) \quad (19)$$

式(18)的系数矩阵称作 KKT 矩阵,该矩阵是一个列满秩的对称矩阵,因此方程具有唯一解。观察式(18),KKT 矩阵的结构只和式(11)与参数 ρ 相关,在迭代过程中是不变的。 $\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ 与 $\mathbf{v}^{(k+1)}$ 可以通过式(20)获得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} \\ \mathbf{v}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} + \sigma \mathbf{I} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & -\rho^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{h} \\ \mathbf{z}^{(k)} - \rho^{-1} \mathbf{y}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(15)表示原变量的更新过程,是一个二次函数集合在 $\mathcal{C}$ 上的最小值,该二次函数的最优条件为

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}) - \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{0} \\ \rho(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)}) - \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (21)$$

集合 $\mathcal{C}$ 代表 $\mathbf{z}$ 的有界约束,结合式(21),迭代过程式(15)可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} + \frac{1}{\sigma}\mathbf{w}^{(k)} \\ \mathbf{z}^{(k+1)} = \min\left\{\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} + \frac{1}{\rho}\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{b}\right\} \end{cases} \quad (22)$$

为了加速算法收敛,根据文献[12],加入松弛因子 $\alpha \in [1, 2]$,迭代过程式(22)和式(16)变成

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{\sigma}\mathbf{w}^{(k)} \\ \mathbf{z}^{(k+1)} = \min\left\{\alpha\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} + (1 - \alpha)\mathbf{z}^{(k)} + \frac{1}{\rho}\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{b}\right\} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} + \sigma(\alpha\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \\ \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + \rho(\alpha\tilde{\mathbf{z}}^{(k+1)} + (1 - \alpha)\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k+1)}) \end{cases} \quad (24)$$

根据 QP 问题的一阶最优性条件,定义 QP 问题式(12)的原始残差 $\mathbf{r}_{\text{prim}}$ 和对偶残差 $\mathbf{r}_{\text{dual}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\text{prim}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{z} \\ \mathbf{r}_{\text{dual}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{h} + \mathbf{Q}^T\mathbf{y} \end{cases} \quad (25)$$

根据 2 个残差给出收敛判定准则

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_{\text{prim}}^{(k)}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\text{prim}} \\ \|\mathbf{r}_{\text{dual}}^{(k)}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\text{dual}} \end{cases} \quad (26)$$

$$\varepsilon_{\text{dual}} = \varepsilon_{\text{abs}} + \varepsilon_{\text{rel}} \max\{\|\mathbf{P}\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}, \|\mathbf{Q}^T\mathbf{y}^{(k)}\|_{\infty}, \|\mathbf{h}\|_{\infty}\} \quad (27)$$

$$\varepsilon_{\text{prim}} = \varepsilon_{\text{abs}} + \varepsilon_{\text{rel}} \max\{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}, \|\mathbf{z}^{(k)}\|_{\infty}\} \quad (28)$$

一般取 $\varepsilon_{\text{rel}} = 10^{-3}$, ε_{abs} 根据需要精度选择。

使用 ADMM 算法还需要一个初始值,由于 MPC 问题的特殊性,可以将 $d - 1$ 时刻的最优解 $(\mathbf{x}^*(d - 1), \mathbf{y}^*(d - 1))$ 作为 d 时刻的算法初始值,即

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{(0)}(d), \mathbf{z}^{(0)}(d), \mathbf{y}^{(0)}(d)) = \\ (\mathbf{x}^*(d - 1), \mathbf{Q}\mathbf{x}^*(d - 1), \mathbf{y}^*(d - 1)) \end{aligned} \quad (29)$$

因此可以获得航空发动机 MPC 求解控制输入 $\mathbf{W}_{\text{fb}}$ 的流程:

- 1) 获得发动机采样时刻 d 的状态和状态方程。
- 2) 以二次型性能指标和约束,根据状态方程建立问题式(7)。
- 3) 将问题式(7)改写为适合用 ADMM 算法的形式(13)。
- 4) 根据式(29),将 $d - 1$ 时刻得到最优解作

- 为 d 时刻问题求解的初始值。
- 5) 根据迭代过程式(19)、式(20)、式(23)和式(24)计算并更新各个变量。
 - 6) 根据原始残差 $\mathbf{r}_{\text{prim}}$ 和对偶残差 $\mathbf{r}_{\text{dual}}$ 判断迭代过程是否满足精度要求。若满足,则终止迭代,将获得的最优解的第一项作为所需 $\mathbf{W}_{\text{fb}}$ 送入发动机,进入步骤 7);若没有,进入步骤 4),直至达到最大迭代次数。
 - 7) 进入采样时刻 $d + 1$,重复步骤 1)。

4 仿 真

4.1 控制结构

图 1 为航空发动机 MPC 系统结构,主要包括模型预测控制器和发动机模型。MPC 根据输入的参考指令 r_{ef} ,使用第 3 节所述流程求解控制量 $\mathbf{W}_{\text{fb}}$;实时非线性模型用于获得预测模型,并且通过模型的输出与真实测量值之差作为反馈校正。实时非线性模型为平衡流形展开模型^[21],离线得到,其输入为 $\mathbf{W}_{\text{fb}}$,状态量为 N_1 和 N_h ,输出为 N_1 、 N_h 、 P_{3s} 和 T_6 ,调度参数为发动机进口温度 T_2 和 N_h ;基于发动机进口条件和当前工作转速,以此平衡流形展开模型获得预测模型。使用部件级模型作为真实发动机,以 ADMM 算法对控制量进行迭代寻优。

平衡流形展开模型通过实验数据离线计算所得,其输出与发动机传感器输出存在一定的误差,使得预测模型也存在误差,为了满足控制精度的要求,需要对预测方程的输出进行修正。

在 d 时刻,预测模型的输出 N_1 、 N_h 、 P_{3s} 和 T_6 为 $\mathbf{y}_m(d)$,真实发动机传感器输出为 $\mathbf{y}_s(d)$,二者的误差为 $\mathbf{e}(d) = \mathbf{y}_s(d) - \mathbf{y}_m(d)$,则未来时刻模型的输出可以校正为

$$\hat{\mathbf{y}}_m(d + i) = \mathbf{y}_m(d + i) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{e}(d) \quad (30)$$

式中: $\hat{\mathbf{y}}_m$ 为校正后的模型输出; $\mathbf{\Gamma}$ 为反馈校正系数,通常取单位矩阵。

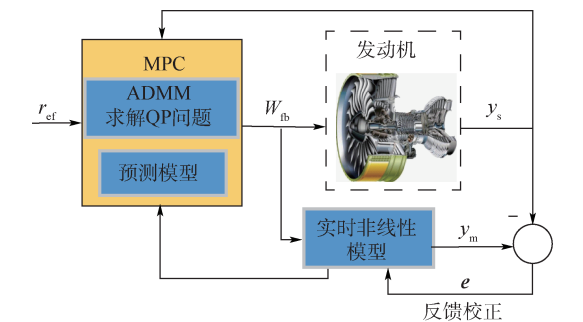


图 1 航空发动机 MPC 系统结构

Fig. 1 Aircraft engine MPC system structure

4.2 仿真结果

使用 MATLAB 进行仿真, MPC 算法由 MATLAB 实现, 模拟真实发动机的部件级模型使用 VC++ 开发, 并且通过 MEX 方法在 MATLAB 中调用。

指令跟踪的目的是让发动机 N_h 跟随参考指令 r_{ef} 的变化, MPC 的性能指标 J 的第一部分即是指令跟踪的误差 (见式 (1))。通过在高度 $H = 0\text{ km}$, $Ma = 0$, 在发动机慢车以上给定发动机 N_h 指令, 使用图 1 所示的控制结构, 进行 N_h 闭环控制。

ADMM 算法最大迭代次数为 500 次, 收敛准则为 $\varepsilon_{abs} = 1 \times 10^{-5}$; 控制器预测时域长度 $n_p = 2$, 权重系数 $\lambda = 700$ 。 N_h 响应过程、相对跟踪误差、 W_{fb} 、 T_6 和 P_{3s} 的响应过程如图 2 所示, 数据均经过归一化处理。

图 2(a) 为 N_h 在给定指令下的响应过程, 从图中可以看出, 在仿真时间里, 使用 ADMM 算法的航空发动机 MPC 均能使 N_h 跟随指令变化。图 2(b) 为 N_h 与 r_{ef} 的相对误差, 从图中可以看出, 相对误差在 N_h 稳定时接近 0, 满足控制所需精度, 表明 ADMM 算法作为在线优化算法可以满足控制器所需精度。

图 2(c) 为控制器计算所得的 W_{fb} 输入曲线, 图 2(d) 和图 2(e) 为 T_6 和 P_{3s} 的响应曲线。在仿

真中, T_6 的响应速度最快, 跟随 W_{fb} 的输入变化; P_{3s} 的响应速度较 N_h 快, 比 T_6 略慢一些; N_h 的响应速度最慢, 这是由于转子动力学特性是所建立的部件级模型的主要动态特性, 其惯性较大; 由于建模中忽略了热惯性, T_6 紧跟 W_{fb} 变化; P_{3s} 受转子转速和燃气流量的共同作用, 因此响应速度介于二者之间。观察到在仿真过程中, 其在温度和压力较低区域有明显的超调。因为发动机是一个非线性系统, 其动态特性随转速变化而变化, 因此在仿真权重系数不变的情况下, 低转速区有超调, 而高转速没有。

为了验证基于 ADMM 算法的 MPC 对于发动机约束的处理能力, 将 T_6 限制适当调小, 使发动机在仿真中能触及 T_6 限制。图 3(a) 为 T_6 将限制调小到 0.87 时 N_h 阶跃的响应, 图 3(b) 为 T_6 响应。可以看出, 由于限制的存在, N_h 不能跟踪给定的指令, 而 T_6 达到限制值, 并且没有明显的超调。仿真表明了基于 ADMM 算法的 MPC 良好的约束处理能力, 采用 MPC 可以取消超限保护控制回路。

为了验证 ADMM 算法在实时性方面的优势, 使用文献[22]中所述 IPM 算法作为对比算法, 在 $H = 0\text{ km}$, $Ma = 0$, 慢车以上转速, 给定不同的阶跃幅值 ΔN_h 和预测时域 n_p , 进行 6s 的阶跃响应

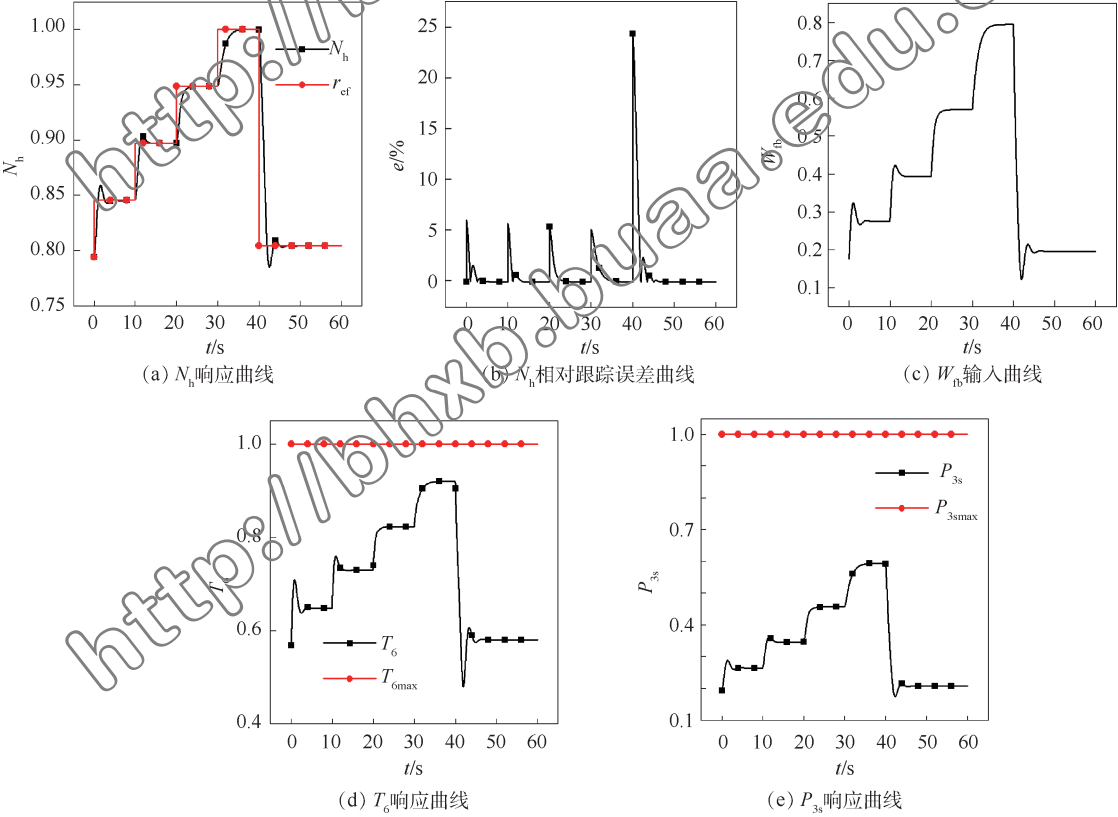


图 2 基于 ADMM 算法的航空发动机 MPC 响应

Fig. 2 Response of aircraft engine MPC based on ADMM

仿真,记录使用 2 种算法平均单步仿真耗时并进行对比。

表 1 中给出了 10 个仿真过程中转速阶跃幅值 ΔN_h 及预测时域设置。表 2 是在这些设置情况下使用 IPM 完成一次控制序列优化计算所需平均时间和使用 ADMM 所需时间。

从表 2 中可以看出,无论 ΔN_h 是较大还是较

小的动态响应,使用 ADMM 的仿真耗时均低于使用 IPM 的仿真。这是由于 ADMM 算法在迭代过程中,在给定罚参数不变的情况下,KKT 系数矩阵不变,因此在每次迭代过程中不必重复计算 KKT 矩阵的逆矩阵或分解,减少了计算量;而 IPM 算法在每次迭代过程中需要调整 KKT 矩阵,在每次迭代求解中都需要进行 KKT 矩阵求逆或者矩阵分解操作。假设求解需要 M 次迭代,矩阵分解耗时为 t_f ,KKT 系统求解回代耗时 t_b ,ADMM 算法求解需要时间为 $t_f + Mt_b$,而 IPM 算法耗时为 $M(t_f + t_b)$, M 为求解迭代次数。

预测时域 n_p 可以表示 MPC 滚动优化问题的规模大小。 n_p 越大,则待求解的燃油序列维数越大,需求解的 QP 问题中的不等式约束矩阵和系数矩阵的维数也越大,增加了求解的计算量。

预测时域的增大可以改善航空发动机 MPC 的性能。图 4 为在 $H = 0\text{ km}$, $Ma = 0$,慢车以上转

表 2 两种算法完成一次控制序列优化所需时间对比

Table 2 Time consumption comparison of two methods in finishing one-time control sequence optimization

编号	所需时间/ms	
	IPM	ADMM
1	10.67	3.67
2	10.57	3.80
3	10.10	3.60
4	11.97	3.50
5	23.87	5.00
6	41.33	6.80
7	76.50	8.20
8	108.83	10.53
9	167.00	14.13
10	224.60	15.53

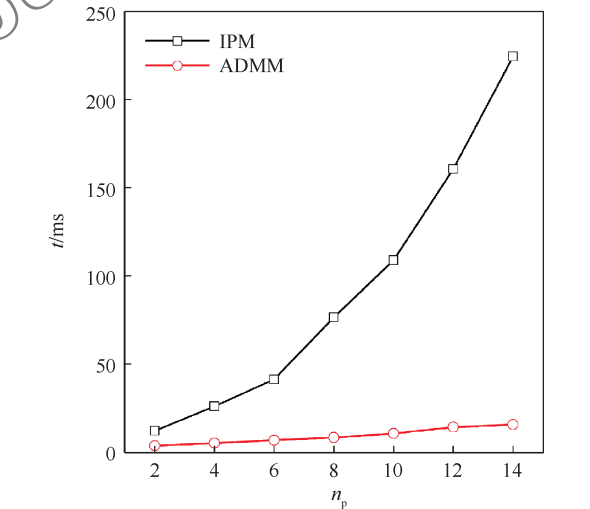
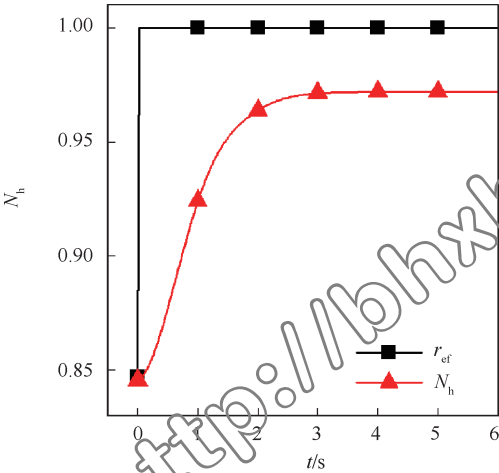
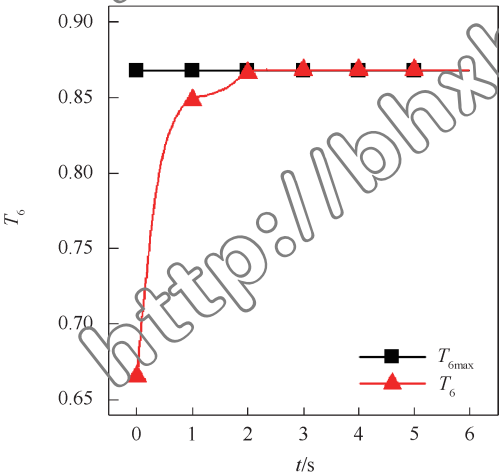


图 4 控制序列优化所需平均时间与预测时域的关系

Fig. 4 Average time consumption for control sequence optimization vs predictive horizon



(a) T_6 触及限制下的 N_h 响应



(b) T_6 触及限制下的 T_6 响应

图 3 T_6 触及限制下 MPC 仿真

Fig. 3 MPC simulation with T_6 hitting limit

表 1 仿真参数

Table 1 Simulation parameters

编号	ΔN_h	n_p
1	0.03	2
2	0.08	2
3	0.15	2
4	0.18	2
5	0.18	4
6	0.18	6
7	0.18	8
8	0.18	10
9	0.18	12
10	0.18	14

速,给定阶跃幅值 $\Delta N_h = 0.18$, 改变 MPC 的预测时域 n_p , 得到的完成一次控制序列优化所需平均时间 t 与预测时域 n_p 的关系。随着 n_p 的增加, QP 的规模增加, 构成的 KKT 系数矩阵的维数也增加, 求解 KKT 方程的耗时增加。仿真结果表明, 使用 IPM 算法的仿真耗时增加随 n_p 增加更为剧烈, 而使用 ADMM 算法的仿真耗时增加幅度较小, 证实了本文分析的合理性, 表明了 ADMM 算法在航空发动机 MPC 中有比 IPM 更好的实时性。

5 结 论

ADMM 算法在航空发动机 MPC 的滚动优化中具有良好的应用前景。

1) 在指令跟踪控制中, N_h 与指令的相对跟踪误差均为 0; 表明 ADMM 可以满足发动机指令跟踪和约束管理的精度要求。

2) ADMM 算法每次迭代过程只需计算一次矩阵分解, 与 IPM 相比, 计算量大大降低, 实时性得到了很大的提高。

3) ADMM 算法相对 IPM 有更好的计算耗时稳定性。在 10 组仿真测试中, 预测时域从 2 增加到 14, 使用 IPM 算法的单次仿真耗时从 10.67 ms 增加到 224.1 ms, 扩大了 20 多倍; 而 ADMM 算法从 3.67 ms 增加到 15.53 ms, 扩大不足 5 倍。

参考文献 (References)

- [1] BRUNELL B J, BILMEAD R R, CONNOLLY A J. Nonlinear model predictive control of an aircraft gas turbine engine [C] // 41st IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2003, 4: 4649-4651.
- [2] BRUNELL B J, VIASSOLO D E, PRASANTH R. Model adaptation and nonlinear model predictive control of an aircraft engine [C] // ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air, 2004: 673-682.
- [3] BRUNELL B J, MATHEWS H K, KUMAR A. Adaptive model-based control systems and methods for controlling a gas turbine: US6823675 [P]. 2004-11-30.
- [4] RICHTER H, SINGARAJU A V, LITT J S. Multiplexed predictive control of a large commercial turbofan engine [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(2): 273-281.
- [5] VROEMEN B C, VAN ESSEN H A, VAN STEENHOVEN A A, et al. Nonlinear model predictive control of a laboratory gas turbine installation [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1999, 121(4): 629-634.
- [6] 杜宪. 滑模与预测控制在航空发动机限制管理中应用研究 [D]. 西安: 西北工业大学, 2016.
- [7] DU X. Application of sliding mode control and model predictive control to limit management for aero-engines [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2016 (in Chinese).
- [8] LAU M S K, YUE S P, LING K V, et al. A comparison of interior point and active set methods for FPGAs implementation of model predictive control [C] // European Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 156-161.
- [9] SHAHZAD A, KERRIGAN E C, CONSTANTINIDES G A. A warm-start interior-point method for predictive control [C] // UKACC International Conference on Control. London: IET, 2010: 949-954.
- [10] ECKSTEIN J. Splitting methods for monotone operators with applications to parallel optimization [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1989.
- [11] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3(1): 1-122.
- [12] ECKSTEIN J, WANG Y. Understanding the convergence of the alternating direction method of multipliers: Theoretical and computational perspectives [J]. Pacific Journal of Optimization, 2015, 11(4): 619-644.
- [13] GHADIMI E, TEIXEIRA A, SHAMES I, et al. Optimal parameter selection for the alternating direction method of multipliers (ADMM): Quadratic problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 644-658.
- [14] 王曦, 党伟, 李志鹏, 等. 1 种 N-dot 过渡态 PI 控制律的设计方法 [J]. 航空发动机, 2015, 41(6): 1-5.
- [15] WANG X, DANG W, LI Z P, et al. A design method of N-dot transient state PI control laws [J]. Aeroengine, 2015, 41(6): 1-5 (in Chinese).
- [16] JAW L C, MATTINGLY J D. Aircraft engine controls: Design, system analysis, and health monitoring [M]. Reston: AIAA, 2009: 119-141.
- [17] RICHTER H. A model regulator sliding mode control strategy for output-constrained systems [J]. Automatica, 2011, 47(10): 2251-2259.
- [18] RICHTER H, LITT J. A novel controller for gas turbine engines with aggressive limit management [C] // 47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Reston: AIAA, 2011: 1-17.
- [19] 杜宪, 郭迎清, 孙浩, 等. 基于滑模控制的航空发动机多变量约束管理 [J]. 航空学报, 2016, 37(12): 3657-3667.
- [20] DU X, GUO Y Q, SUN H, et al. Sliding mode control based multivariable limit management for aircraft engine [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(12): 3657-3667 (in Chinese).
- [21] RICHTER H. Multiple sliding modes with override logic: Limit management in aircraft engine controls [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 35(4): 1132-1142.
- [22] BERTSEKAS D P. Convex optimization algorithms [M]. Nushua: Athena Scientific, 2016: 280-285.
- [23] BOLEY D. Local linear convergence of the alternating direction method of multipliers on quadratic or linear programs [J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(4): 2183-2207.
- [24] 赵辉. 基于平衡流形展开模型的航空发动机非线性控制方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.

- ZHAO H. Research on nonlinear control for aeroengines based on equilibrium manifold expansion model[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology,2011 (in Chinese).

[22] NOCEDAL J, WRIGHT J. Numerical optimization[M]. Berlin: Springer,2006:481-485.
- 作者简介:

单睿斌 男,硕士研究生。主要研究方向:航空发动机控制。

李秋红 女,博士,副教授。主要研究方向:航空发动机建模、控制与故障诊断。

Model predictive control based on ADMM for aero-engine

SHAN Ruibin, LI Qiuhong*, HE Fenglin, FENG Hailong, GUAN Tingjun

(Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System, College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In order to improve the real time performance of the nonlinear model predictive control (MPC) for aero-engine , an alternating direction method of multipliers (ADMM) was applied to the receding horizon optimization of MPC. The predictive equation was constructed based on the state space model. The auxiliary variables and dual variables were introduced to rewrite the quadratic control performance index and engine constraints into a new form which could be solved by ADMM. Simulations on a component level model show that the single input variable model predictive control based on ADMM achieves both high-quality reference tracking performance and efficient limit management of aero-engine. Compared with interior point method (IPM) , the real time performance of ADMM is much better than that of IPM at different magnitude control commands , and the increment of time consumption is much less than that of IPM with the increase of the predictive horizon. The effectiveness of the ADMM in MPC is valid.

Keywords: aero-engine; model predictive control; alternating direction method of multipliers (ADMM); quadratic programming (QP); real time