



三种梁纯弯曲正应力的理论与实验研究

陈红兵, 李 丽, 姚丽萍, 郑应彬

(西南大学 工程技术学院, 重庆 400716)

摘要: 该文对单根矩形截面梁、叠梁和组合梁这三种梁的纯弯曲正应力进行了理论分析计算和电测法实验测试。实验数据结果验证了理论计算和实验方法的正确性, 揭示了三种梁纯弯曲正应力的分布规律。实验数据表明叠梁的弯曲正应力最大, 组合梁次之, 单根矩形截面梁的最小。另外, 分析讨论了某些实验数据误差较大的原因。通过增加实验内容和难度, 有利于促使学生掌握更多的材料力学知识, 锻炼学生的实践动手能力, 可以为其他高校的材料力学实验教学提供参考。

关键词: 矩形截面梁; 叠梁; 组合梁; 弯曲正应力; 电测法

中图分类号: O341

文献标志码: A

DOI: [10.12179/1672-4550.20210150](https://doi.org/10.12179/1672-4550.20210150)

Theoretical Analysis and Experimental Study on Normal Stress of Three Kinds of Beams Subjected to Pure Bending

CHEN Hongbing, LI Li, YAO Liping, ZHENG Yingbin

(College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing 400716, China)

Abstract: The normal stresses of pure bending of a single rectangular cross-section beam, laminated beam and composite beam have been theoretically analyzed and calculated and experimentally tested by electrical measurement method in this paper. Through the analysis of the measured data, the correctness of theoretical calculations and experimental methods are verified, and the normal stress distribution laws of the three beams are revealed. The data shows that the normal stress of pure bending of the laminated beam is the largest, followed by that of the composite beam, and that of the single rectangular cross-section beam is the smallest. In addition, the reasons for the large errors of some experimental data are analyzed and discussed. By increasing the content and difficulty of the experiment, it is conducive to promote students to master more knowledge of material mechanics and exercise their practical skills. The result can provide a reference for the experimental teaching of material mechanics in other colleges and universities.

Key words: rectangular cross-section beam; laminated beam; composite beam; normal stress of pure bending; electric stress test method

2020 年, 西南大学机械设计制造及其自动化专业通过了工程教育专业认证。根据工程教育专业认证和新工科建设要求, 对材料力学实验进行教学改革, 合理地增加课程难度、拓展课程深度、把“水课”真正变成有深度、有难度、有挑战度的“金课”。许多高校的材料力学实验都开设了“矩形截面梁纯弯曲实验”项目。该项目实验原理比较简单, 在理论教学过程中进行了深入讲解, 而且实验操作步骤简单, 学生容易掌握^[1]。

由于课程学时减少, 在材料力学理论教学过程中没有深入讲解叠梁弯曲变形的应力分析。但是在实际工程中, 叠梁的使用非常广, 如吊车轨道梁、载重汽车车架和汽车后桥上的钢板弹簧梁等。关于叠梁的弯曲变形已有较多研究, 如文献[2]对三层材料组成的叠梁弯曲应力进行了理论分析和实验测试。文献[3]研究了层间滑移对叠梁弯曲变形的影响, 研究结果表明滑移效应会破坏叠梁截面的整体性, 增大局部弯曲应力。文献[4]采用

收稿日期: 2021-03-22; 修回日期: 2021-05-17

基金项目: 西南大学实验技术研究项目(SYJ2021019); 重庆市高等教育教学改革研究项目(202048); 国家自然科学基金面上项目(51875480)。

作者简介: 陈红兵(1982-), 男, 博士, 高级实验师, 主要从事材料力学实验教学和镁合金塑性变形机理方面的研究。

数字散斑方法研究了叠梁弯曲时横截面应力场的演化。文献[5]通过理论分析和实验证明了不同材料如果能紧密地粘贴在一起,就可以视为一根整体梁。文献[6]采用电测法技术和 Ansys 有限元软件分析了叠梁弯曲的应力分布情况。国外学者采用理论分析和实验测试的方法对叠梁振动、屈曲和开粘等问题进行了研究^[7-9]。文献[10]采用 Timoshenko 梁模型研究了由 4 层 PVC 材料构成的叠梁的弯曲变形行为。Ganesh 等^[11]研究了一种由软铝 AA1100 和硬铝 AA2024 构成的三层层压板的弯曲变形行为。以上文献说明叠梁弯曲变形还有大量的理论问题值得研究,而且有着广泛的工程应用前景。本文将以简单的单根矩形截面梁纯弯曲应力的理论计算为基础,推导计算叠梁和组合梁的弯曲应力计算公式;然后通过电测法测试这三种梁纯弯曲时横截面上的应变值,计算各点应力;最后分析比较实验数据和理论计算数据,总结规律。通过实施该项目,能够让学生深入了解电测法技术和掌握叠梁弯曲变形应力分析计算方法,有利于提高学生的力学知识水平和锻炼学生的实践动手能力。

1 矩形截面梁纯弯曲正应力的理论分析

1.1 单根矩形截面梁纯弯曲正应力的理论分析

一般而言,若在梁的某段横截面上的弯矩为常量,剪力为零,则该段梁的弯曲称为纯弯曲。若在横截面上既有剪力又有弯矩,这种弯曲变形称为横力弯曲。本文仅讨论纯弯曲变形情况。矩形截面梁纯弯曲实验装置示意图,如图 1 所示。根据平面假设,容易推导单根矩形截面梁在纯弯曲变形时横截面上的正应力,理论计算公式为^[1]:

$$\sigma_{\text{理}} = \frac{My}{I_z}, \left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \right) \quad (1)$$

式中, $M = Fa/2$ 为横截面上的弯矩; $I_z = bh^3/12$ 为梁的惯性矩, y 为测试点到中性层的距离。梁的宽度 $b=20$ mm, 高度 $h=40$ mm, 跨度 $L=400$ mm, 载荷距离 $a=50$ mm。

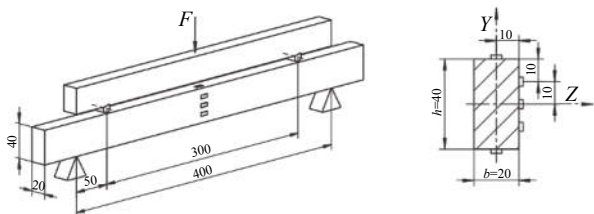


图1 单根矩形截面梁纯弯曲实验装置示意图(单位: mm)

1.2 叠梁纯弯曲正应力的理论分析

叠梁,是由两根矩形截面梁上下叠放在一起组成的,且两根梁的接触面间不施加约束,可以相互滑动。叠梁纯弯曲实验装置示意图,如图 2 所示。

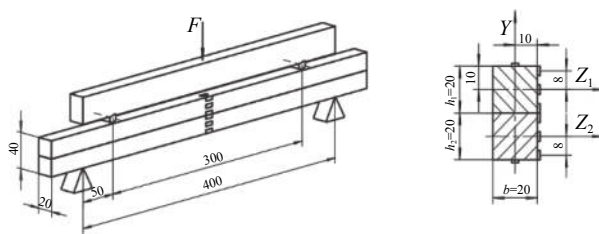


图2 叠梁纯弯曲实验装置示意图(单位: mm)

推导叠梁纯弯曲正应力的理论计算公式需做如下假设^[1]。

1) 平面假设条件仍然适用;上、下梁在弯曲时沿各自的中性轴弯曲,且中性轴仍通过截面的几何形心;以各自中性层为基准,上、下梁的正应力在横截面上均呈线性分布。

2) 在弹性变形范围内,上、下梁始终保持紧密接触,接触面的曲率半径相等。

当材料处于弹性变形范围之内,由胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$, 可以得到距中性层距离为 y 的横截面上点的正应力为^[12]:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (2)$$

由该方程可以看出,梁横截面上的弯曲正应力只与到中性层的距离有关,而且沿横截面高度呈线性分布,而且中性层曲率和弯曲刚度有如下关系:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (3)$$

根据该条件可以计算各梁分别承担的弯矩,然后再分别计算各梁横截面上的正应力。

$$\therefore \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}, \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (4)$$

$$M_1 + M_2 = M \quad (5)$$

$$\therefore M_1 = \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M \quad (6)$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M y_1, \left(-\frac{h_1}{2} \leq y_1 \leq \frac{h_1}{2} \right) \\ \sigma_2 = \frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M y_2, \left(-\frac{h_2}{2} \leq y_2 \leq \frac{h_2}{2} \right) \end{cases} \quad (7)$$

1.3 组合梁纯弯曲正应力的理论分析

组合梁,是由楔块(或螺栓)连接两根上下叠放的矩形截面梁而组成的,通过楔块(或螺栓)使两根梁的接触面牢牢地连接在一起,使接触面的变形一致,即两根梁的接触面间不产生滑动。组合梁纯弯曲实验装置示意图,如图 3 所示。

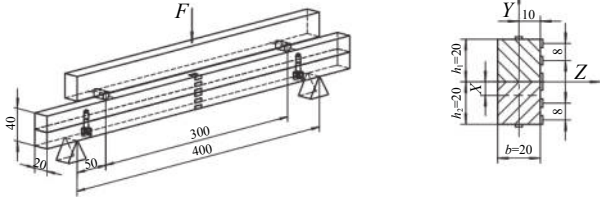


图 3 组合梁纯弯曲实验装置示意图(单位: mm)

组合梁的弯曲变形可以分 3 种情况来讨论:

- 1) 上梁、下梁材料相同, $E_1 = E_2$, 截面尺寸相同;
- 2) 上梁、下梁材料不同, $E_1 > E_2$, 截面尺寸相同;
- 3) 上梁、下梁材料不同, $E_1 < E_2$, 截面尺寸相同。

由于篇幅限制,本文就第 3) 条进行详细的分析讨论。组合梁在弯曲变形时,由于两种材料的弹性模量不同,中性层的位置不在其几何形心位置,会偏向抗弯能力强的一侧。如何找到组合梁的中性轴位置呢?假设几何形心位置到组合梁中性层的距离为 x ,由平面假设和连续性条件可知,组合梁横截面上各点的应变与各点距中性层的距离呈线性关系,任一点 y 处的应变为^[5]:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{y}{\rho} \\ \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = \frac{E_1 y_1}{\rho_1} \\ \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = \frac{E_2 y_2}{\rho_2} \end{cases} \quad (8)$$

根据图 3 所示的组合梁纯弯曲实验装置示意图,以及组合梁横截面上的合力等于零,可列出如下式:

$$\because \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = F_N = 0 \quad (9)$$

$$\int_x^{h+x} E_1 \frac{y}{\rho} b dy + \int_0^x E_2 \frac{y}{\rho} b dy - \int_0^{-(h-x)} E_2 \frac{y}{\rho} b dy = F_N = 0$$

$$\therefore x = \frac{h(E_2 - E_1)}{2(E_1 + E_2)} \quad (10)$$

根据 x 的大小可以确定组合梁中性层的位

置,然后可求出横截面上各测试点距中性层的距离 y 。以组合梁的中性轴为 z 轴,横截面的对称轴为 y 轴建立直角坐标系,列出弯矩静力方程,可求得各测点的理论应力^[5]:

$$\begin{aligned} & \because \int_{A_1} y_1 \sigma_1 dA + \int_{A_2} y_2 \sigma_2 dA = M \\ & \int_x^{h+x} \frac{E_1 y^2 b}{\rho} dy + \int_0^x \frac{E_2 y^2 b}{\rho} dy + \int_{-(h-x)}^0 \frac{E_2 y^2 b}{\rho} dy = M \\ & \frac{1}{\rho} = \frac{3M}{E_1 b(h^3 + 3h^2 x + 3hx^2) + E_2 b(h^3 + 3hx^2 - 3h^2 x)} \\ & \therefore \sigma_i = \frac{3My_i E_i}{E_1 b(h^3 + 3h^2 x + 3hx^2) + E_2 b(h^3 + 3hx^2 - 3h^2 x)} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中, y_i 为组合梁横截面上各测试点距中性轴的距离; E_i 为组合梁的两种不同材料的弹性模量; h 和 b 分别为两种梁横截面的高和宽; x 为几何形心位置距中性轴的距离,由此可以求出各测试点的应力大小。

2 实验测试

矩形截面梁纯弯曲实验的实验原理是根据胡克定律计算应力大小,即通过电测法测量各测点的应变值,然后计算各测点的应力。电测法是实验应力分析中应用最有效和最广泛的方法之一,广泛应用于水利、材料、机械、土木和航空航天等工程技术领域,是检验工程质量、验证理论计算的有力手段^[1]。电测法具有测量精度高、范围广、应变片的尺寸小、粘贴方便等优点。自 1938 年 SIMMONS E 和 RUGE A 研制出世界上第一个电阻应变计以来,电测法技术已经有了巨大进步^[13]。电测法的基本原理是将电阻应变片牢固地粘贴在被测构件上,当构件变形时,应变片的电阻值也将随之发生相应的改变;然后通过电阻应变仪测量应变;最后依据胡克定律计算测点应力大小^[14]。为了便于比较这三种梁纯弯曲变形的应力分布情况,把矩形截面梁、叠梁和组合梁的横截面面积尺寸做成一致,长宽分别为 20 mm×40 mm、20 mm×20 mm、20 mm×20 mm。三种梁分别为钢梁、铝-钢叠梁和铝-钢组合梁,钢和铝的弹性模量分别为 210 GPa 和 70 GPa。通过拆卸或拧紧螺栓实现叠梁和组合梁之间的变换,实验操作简单、方便,如图 3(a)和图 3(c)所示。实验采用的应变片的长宽尺寸为 6 mm×4 mm(型号为 BX120-2AA),电阻为 120 Ω ,灵敏系数 $K=2.08$ 。应变片的位置分布,如图 1、图 2 和图 3 所示,位置尺寸如表 1 和表 2

所示。采用 CM-1L-16 型静态电阻应变仪,采用半桥单臂温度补偿测量电桥连接方式,如图 4(b)所示。采用 WDW3100 电子万能试验机施加载荷,采用等量逐级加载($\Delta F=0.5$ kN),每增加一级载荷,试验机自动停止加载(保载)30 s,以便从静态

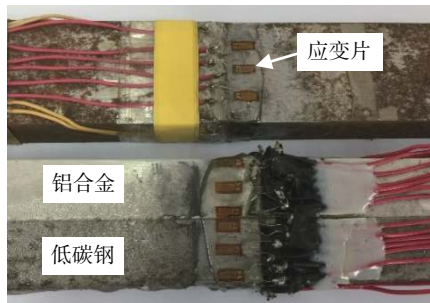
电阻应变仪上读出应变值,加载曲线如图 4(d)所示。然后,计算应变增量的平均值,根据胡克定律计算各测点实测应力。最后,分析比较实测数据与理论计算数据,分析误差原因,总结应力分布规律。



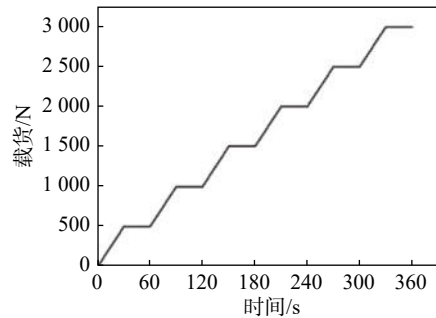
(a) 实验装置全景



(b) CM-1L-16 型静态电阻应变仪



(c) 单根矩形截面梁和叠梁装置



(d) 电子万能试验机加载-时间曲线

图4 矩形截面梁纯弯曲实验装置

表1 单根矩形截面梁纯弯曲实验数据

矩形截面梁测点	各测点电阻应变仪读数									
	ε_1		ε_2		ε_3		ε_4		ε_5	
测点位置y/mm	20		10		0		10		20	
载荷F/N	读数	增量	读数	增量	读数	增量	读数	增量	读数	增量
500	-16		17		0		4		12	
1000	-29	-13	11	-6	-1	-1	10	6	23	11
1500	-41	-12	4	-7	-1	0	17	7	36	13
2000	-52	-11	-4	-8	-1	0	23	6	48	12
2500	-64	-12	-11	-7	-1	0	30	7	60	12
3000	-75	-11	-18	-7	-1	0	38	8	73	13
$\overline{\Delta \varepsilon_i}$	-11.80		-7.00		-0.20		6.80		12.20	
$\sigma_{实} = E \overline{\Delta \varepsilon_i} / \text{MPa}$	-2.48		-1.47		-0.42		1.43		2.56	
$\sigma_{理} = \frac{\overline{\Delta M y}}{I_z} / \text{MPa}$	-2.34		-1.17		0		1.17		2.34	
误差 = $\frac{\sigma_{理} - \sigma_{实}}{\sigma_{理}} / \%$	5.98		25.64		/		22.22		9.40	

注: 载荷F步进值为500 N

表 2 叠梁和组合梁纯弯曲实验数据

组合方式	测点	测点位置 y/mm	平均应变 $\Delta\bar{\varepsilon}_i$	$\sigma_{\text{实}} = E\Delta\bar{\varepsilon}/\text{MPa}$	$\sigma_{\text{理}}/\text{MPa}$	误差 = $\frac{\sigma_{\text{理}} - \sigma_{\text{实}}}{\sigma_{\text{理}}}/\%$
叠梁	1	10	-30.60	-2.14	-2.34	8.55
	2	8	-24.40	-1.71	-1.88	9.04
	3	0	-2.00	-0.14	0	/
	4	8	17.60	1.23	1.88	34.57
	5	8	-31.20	-6.55	-5.63	16.34
	6	0	0.20	0.42	0	/
	7	8	29.40	6.17	5.63	9.59
	8	10	35.60	7.48	7.03	6.40
组合梁	1	25	-31.40	-2.20	-1.80	22.22
	2	23	-27.20	-1.90	-1.66	14.46
	3	15	-10.00	-0.70	-1.08	35.19
	4	7	6.00	0.42	-0.50	/
	5	3	-18.40	-3.86	-0.65	/
	6	5	1.80	0.38	1.08	64.81
	7	13	21.00	4.41	2.81	56.94
	8	15	27.00	5.67	3.25	74.46

备注：由式(10)可计算出 $x=5$ ，即组合梁的中性层在距离几何中心下移5 mm处；另外，计算测点位置时应以应变片宽度的一半作为对称轴，需考虑应变片的宽度(4 mm)。

3 实验结果与数据分析

通过电子万能试验机给梁加载 6 次，矩形截面梁的应变记录，如表 1 所示。由于篇幅限制，省略叠梁和组合梁的应变记录数据，只记录实验测试各点应变的平均值，如表 2 所示。

1) 通过分析表 1 和图 5(a)可以看出，单根矩形截面梁在纯弯曲变形时，测试点 1 和测试点 5 的实验数据和理论数据相对误差较小，说明应变片粘贴质量较好，能够真实反映梁的变形情况；

测试点 2 和测试点 4 的实验数据和理论数据相对误差较大，可能是由于应变片粘贴位置不够精准或者应变片粘贴质量较差造成的；测试点 3 正好在梁的中性层上，实验数据非常小，接近理论值。另外，实验数据也验证了理论计算数据的正确性，即单根矩形截面梁在纯弯曲变形时，正应力在梁的横截面上呈对称分布，在中性层以下受拉伸，中性层以上受压缩；各测试点的应力大小与到中性层的距离呈线性关系，距离越远，应力就越大；中性层上的应力为 0 或者很微小。

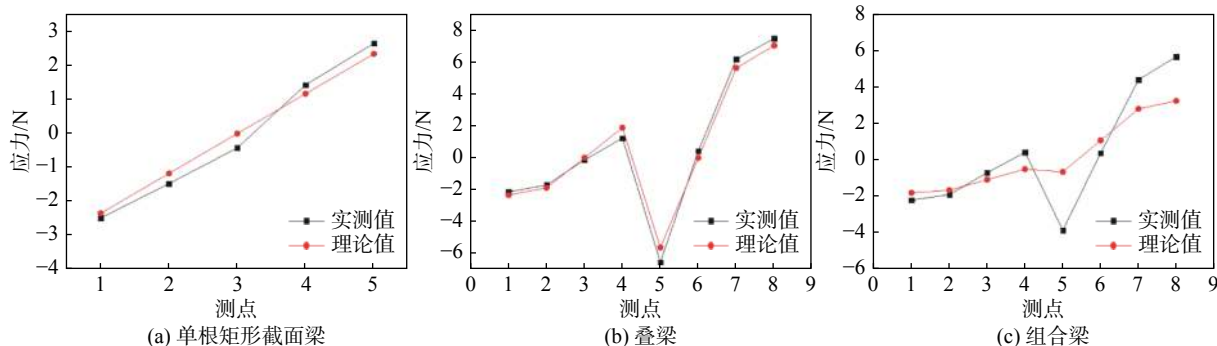


图 5 三种梁纯弯曲的理论应力和实测应力分布图

2) 通过分析表 2 和图 5(b)可以看出，叠梁各测试点的实验数据和理论数据相对误差较小，说明应变片粘贴质量较好，能够真实反映叠梁的变形情况。但是测试点 4 和测试点 5 的实验数据和

理论数据相对误差较大，可能是由于铝梁和钢梁在接触面之间存在摩擦阻力导致的。文献 [15] 研究了在铝-钢叠梁接触面上铺设树脂薄膜以减小摩擦力对实验的影响，实验数据证明铺设树脂薄膜

后,接触面间的摩擦力减小,实验数据更接近理论值。从表2和图5(b)也可以看出,测试点3和测试点6分别在铝梁和钢梁的中性层位置,即铝梁和钢梁分别绕各自的中性轴弯曲,铝梁和钢梁的应力分布与单根矩形截面梁纯弯曲的应力分布情况一致。

3) 通过分析表2和图5(c)可以看出,组合梁各测试点的实验数据和理论计算数据相对误差较大,说明采用螺栓连接构成组合梁的方式不理想。本文数据与文献[16]采用楔块组合梁的实验数据相似,两者均在上、下梁的结合面处产生较大实验数据误差。文献[5]采用AB胶粘贴的方式构成组合梁,实验数据相对误差较小,说明叠梁接触面的粘结方式至关重要,一定要确保接触面间没有滑动,牢牢地固定在一起。

4) 从数据分析还可以看出,叠梁横截面上的应力最大,组合梁次之,单根矩形截面梁的应力最小;即单根矩形截面梁的承载能力最强,组合梁次之,叠梁的承载能力最差。

4 结束语

通过对单根矩形截面梁、叠梁和组合梁这三种梁纯弯曲正应力的理论分析和实验测试,实验数据验证了理论计算的正确性,揭示了这三种梁横截面的正应力分布规律。对实验数据误差较大的原因进行了分析讨论,有必要进一步改进实验装置,提高实验数据的准确性。通过数据分析发现单根矩形截面梁的承载能力最高,组合梁次之,叠梁的承载能力最低。在以后的实验教学过程中,可以进一步引导学生分析计算具有相同弹性模量 E 的两种材料组成的叠梁和组合梁、钢-铝叠梁、钢-铝组合梁、T型梁、工字型梁和多层梁的弯曲应力,比较各类梁的承载能力大小。通过增加实验课程内容和难度,有利于拓宽学生的力学知识,有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

参考文献

[1] 刘鸿文,吕荣坤.材料力学实验[M].4版.北京:高等教

育出版社,2017.

- [2] 蒋泉,任良琨,丁华建.3层材料层合梁纯弯曲实验测试与分析[J].实验室研究与探索,2020,39(4): 33-36.
- [3] 甄晓霞,张卓杰,王荣辉,等.层间滑移对摩擦型叠梁弯曲特性的影响[J].工程力学,2016,33(8): 185-193.
- [4] 高平波,邢同振,何爱军,等.基于DSCM的叠梁弯曲实验研究[J].北华航天工业学院学报,2016,26(4): 30-33.
- [5] 汤繁华,祝方才,李习平,等.叠梁纯弯曲正应力的理论与实验分析[J].实验科学与技术,2010,8(5): 3-4.
- [6] 陈荣顺,陈建芳,木每良.楔块叠梁的有限元分析[J].嘉兴学院学报,2015,27(6): 62-65.
- [7] REZA S, CHING T. Locating delaminations in laminated composite beams using nonlinear guided waves[J]. Engineering Structures, 2017, 131: 207-219.
- [8] NGUYEN T K, NGUYEN N D, THUC P V, et al. Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams[J]. Composite Structures, 2017, 160: 142-151.
- [9] SOHEIL G, SHARIFI S, ZORA V. A novel explicit solution for twisting control of smart laminated cantilever composite plates beams using inclined piezoelectric actuators[J]. Composite Structures, 2017, 161: 477-504.
- [10] QIN H S, YAN Y B, LIU H C, et al. Modified Timoshenko beam model for bending behaviors of layered materials and structures[J]. Extreme Mechanics Letters, 2020, 39: 1-12.
- [11] GANESH G, MUKESH K J. Modeling of bending characteristics of symmetric tri-layer laminated Sheet materials[J]. Materials Today: Proceedings, 2017, 4: 10704-10713.
- [12] 董继蕾,刘丹丹.叠梁、复合梁应力分析与实验[J].内江科技,2020(7): 27-28.
- [13] 赵红晓,吴昊,刘五祥,等.电测法实验教学模式探索[J].实验室科学,2018,21(5): 138-140.
- [14] 汤占岐,武美先,侯亭波,等.电测法应用于材料力学实验中的教学实践[J].教育教学论坛,2018(48): 115-116.
- [15] 武宗良,李雨阁,韩爱红.弯曲组合叠梁的应变分析与实验研究[J].中原工学院学报,2013,24(3): 22-24.
- [16] 郑碧玉,王社,张亚亭,等.组合梁的应力分析与实验[J].长安大学学报(自然科学版),2006,26(5): 62-65.

编辑 钟晓