中国科学 : 数学　2025 年　第 55 卷　第 ? 期 : 1 ～ 20
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
论 文

一组对称矩阵的同时相合对角化问题

黄华林*，苗浩冉，瞿国亚

华侨大学数学科学学院, 泉州 362021
E-mail: hualin.huang@hqu.edu.cn, haoran.miao@stu.hqu.edu.cn, guoya.qu@stu.hqu.edu.cn

收稿日期: 2025-01-24; 接受日期: 2025-04-02; 网络出版日期: 2025-04-28; * 通信作者
福建省自然科学基金 (批准号: 2024J02018) 和国家自然科学基金 (批准号: 12371037) 资助项目

摘要　本文将 Harrison 对于单个高次型的中心代数理论推广至一组二次型的中心, 基于此给出一组对称矩阵同时相合对角化 (或一组二次型同时配成平方和) 的判别法与算法. 本文的方法可归结为求解线性方程组和稀疏二次方程组, 算法简单并且易于操作. 此外, 该方法还能直接推广至解决一组 Hermite 矩阵的同时复相合问题.

关键词　对称矩阵组　同时相合对角化　多项式中心

MSC (2020) 主题分类　15A20, 15A21

1　引言

本文考虑以下问题: 给定域 $\Bbbk$ 上一组对称矩阵 $A_1, \dots, A_m$, 判断它们是否可以同时相合对角化, 即是否存在可逆矩阵 $P \in \Bbbk^{n\times n}$, 使得 $P^{\mathrm{T}}A_1P, \dots, P^{\mathrm{T}}A_mP$ 均为对角矩阵. 如果可以, 给出它们同时相合对角化的算法. 由于对称矩阵对应二次型, 所以以上问题等价于将一组二次型同时配成平方和.

一组对称矩阵同时相合对角化及其等价的一组二次型同时配方问题具有悠久的历史, 许多著名数学家曾深入研究. 两个实对称矩阵同时相合对角化的研究起始于 Weierstrass [13] 和 Kronecker [11], 而 Finsler [5], Albert [1] 和 Calabi [3] 分别独立研究了一对实二次型的问题, 更多相关工作参见综述 [12]. 两个以上对称矩阵的同时相合对角化问题更具挑战性, 近年来由于在非线性分析、二次规划及优化、信号处理、医学图像等理论和应用方面的需要而备受关注, 被 Hiriart-Urruty [7] 列为一个重要的公开问题. Jiang 和 Li [10] 在一组实对称矩阵存在半正定线性组合的情形下, 给出了它们可以同时相合对角化的充要条件. Bustamante 等 [2] 则给出了一组复对称矩阵同时相合对角化问题的一个解决办法, 即将其转化成了一组矩阵的同时相似对角化问题.

本文将 Harrison 关于一个高次型的中心代数理论 [6, 8, 9] 推广到一组二次型的中心, 并利用其来研究一组对称矩阵的同时相合问题. 高次型中心代数理论的一个重要结论是高次型的直和分解与高次型的中心单位元的正交幂等分解一一对应, 这对处理高次型的直和分解问题非常有效. 而一组 n 阶对称

英文引用格式: Huang H L, Miao H R, Qu G Y. Simultaneous diagonalization of symmetric matrices via congruence (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–20, doi: 10.1360/SSM-2025-0021

矩阵 $A_1,\dots,A_m$ 能否同时相合对角化与它们对应的 n 元二次型 $f_1,\dots,f_m$ 能否同时化为标准形是等价的. 因此, 本文借鉴高次型的中心理论, 定义一组二次型及一组对称矩阵的中心, 发现一组二次型的中心与高次型的中心有类似的性质. 利用中心理论判断一个高次型能否化为对角形与判断一组二次型能否同时化为标准形, 区别在于前者是计算一个高次型 f 的中心 $Z(f)=\{X\in \Bbbk^{n\times n}\mid (H_fX)^{\mathrm{T}}=H_fX\}$, 后者是计算一组二次型 $f_1,\dots,f_m$ 公共的中心 $Z(f_1,\dots,f_m)=\{X\in\Bbbk^{n\times n}\mid (H_{f_j}X)^{\mathrm{T}}=H_{f_j}X, j=1,\dots,m\}$, 其中 H_f 是 f 的 Hessian 矩阵. 根据中心的性质, 一组二次型可以同时化为标准形当且仅当它们的中心单位元可以分解为 n 个正交幂等元之和. 基于此, 本文给出一组对称矩阵同时相合对角化 (或一组二次型同时化为标准形) 的判别法及算法. 求解中心的过程本质上是解线性方程组, 求解正交幂等元涉及稀疏二次方程组, 判别法和算法的计算量都比较小. 此外, 该方法可以直接推广到一组 Hermite 矩阵的同时复相合对角化问题.

本文余下内容安排如下. 第 2 节给出一组对称矩阵中心的定义. 第 3 节介绍中心的基本性质, 利用中心理论给出一组对称矩阵能否同时相合对角化的判别法. 第 4 节给出一组对称矩阵同时相合对角化的算法, 并通过一些例子作具体说明. 第 5 节将前面的结果推广到一组 Hermite 矩阵同时复相合对角化的情形.

2 一组对称矩阵的中心

以下记 $\Bbbk^{n\times n}$ 为域 $\Bbbk$ 上全体 n 阶矩阵的集合. 先回顾一组对称矩阵同时相合对角化的定义.

定义 2.1 设 $A_1,\dots,A_m\in\Bbbk^{n\times n}$ 为一组对称矩阵. 称 $A_1,\dots,A_m$ 可以同时相合对角化, 如果存在可逆矩阵 $P\in\Bbbk^{n\times n}$, 使得

$$P^{\mathrm{T}}A_jP=D_j,\quad j=1,\dots,m,$$

其中 $D_1,\dots,D_m\in\Bbbk^{n\times n}$ 为对角矩阵.

由于一组 n 阶对称矩阵对应着一组 n 元二次型, 因此以上定义等价于将一组二次型同时化为标准形.

定义 2.2 令

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

称二次型 $f_1=X^{\mathrm{T}}A_1X,\dots,f_m=X^{\mathrm{T}}A_mX$ 可以同时化为标准形, 如果存在可逆矩阵 $P\in\Bbbk^{n\times n}$, 使得 f_j 经可逆线性替换 $X=PY$ 化为

$$g_j=(PY)^{\mathrm{T}}A_j(PY)=Y^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}A_jP)Y=Y^{\mathrm{T}}D_jY,\quad j=1,\dots,m,$$

其中 $D_1,\dots,D_m\in\Bbbk^{n\times n}$ 为对角矩阵.

例 2.1 设 $\Bbbk^{3\times 3}$ 中对称矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&3\\1&3&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&-4&-1\\4&-1&9\end{pmatrix}.$$

取

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\in\Bbbk^{3\times 3},$$

则有

$$P^{\mathrm{T}}A_1P=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}A_2P=\begin{pmatrix}-5&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix},$$

即 A_1 和 A_2 可以同时相合对角化.

Harrison [6] 发展了高次型的中心代数理论以处理高次型的直和分解问题, 我们借鉴 Harrison 的中心理论, 给出一组二次型中心与一组对称矩阵中心的定义, 并用以处理一组对称矩阵的同时相合对角化问题.

定义 2.3 设 $f_1,\dots,f_m\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ 为一组二次型. 定义 $f_1,\dots,f_m$ 的中心为

$$Z(f_1,\dots,f_m)=\{X\in\Bbbk^{n\times n}\mid (H_jX)^{\mathrm{T}}=H_jX, j=1,\dots,m\},$$

其中 $H_j=(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ 为 f_j 的 Hessian 矩阵.

定义 2.4 设 $A_1,\dots,A_m\in\Bbbk^{n\times n}$ 为一组对称矩阵. 定义 $A_1,\dots,A_m$ 的中心为

$$Z(A_1,\dots,A_m)=\{X\in\Bbbk^{n\times n}\mid (A_jX)^{\mathrm{T}}=A_jX, j=1,\dots,m\}.$$

注 2.1 假设域 $\Bbbk$ 的特征不为 2. 若一组二次型 $f_1,\dots,f_m$ 对应的对称矩阵分别为 $A_1,\dots,A_m$, 则 $Z(f_1,\dots,f_m)=Z(A_1,\dots,A_m)$. 因此, 利用中心理论处理一组二次型能否同时化为标准形的问题, 可以等价地转化为, 利用中心理论处理这组二次型的矩阵能否同时相合对角化的问题. 鉴于此, 以下只考虑一组对称矩阵的情形.

注 2.2 设 $P\in\Bbbk^{n\times n}$ 为可逆矩阵, 则

$$Z(P^{\mathrm{T}}A_1P,\dots,P^{\mathrm{T}}A_mP)=P^{-1}Z(A_1,\dots,A_m)P=\{P^{-1}XP\mid X\in Z(A_1,\dots,A_m)\}.$$

事实上, 有

$$\begin{aligned}Z(P^{\mathrm{T}}A_1P,\dots,P^{\mathrm{T}}A_mP)&=\{Y\in\Bbbk^{n\times n}\mid (P^{\mathrm{T}}A_jPY)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A_jPY, j=1,\dots,m\}\\&=\{Y\in\Bbbk^{n\times n}\mid (A_jPYP^{-1})^{\mathrm{T}}=A_jPYP^{-1}, j=1,\dots,m\}\\&=\{Y\in\Bbbk^{n\times n}\mid PYP^{-1}\in Z(A_1,\dots,A_m)\}=P^{-1}Z(A_1,\dots,A_m)P.\end{aligned}$$

例 2.2 设 A_1 和 A_2 同例 2.1. 直接计算得此二矩阵的中心为

$$Z(A_1,A_2)=\left\{\left.\begin{pmatrix}-4b+c&-a-4b&-a-6b\\-b&a-b+c&a\\b&b&c\end{pmatrix}\ \right|\ a,b,c\in\Bbbk\right\}.$$

3 一组对称矩阵中心的性质及应用

本节给出一组对称矩阵中心的基本性质, 并应用到该组矩阵的同时相合对角化问题.

非退化高次型的中心具有交换结合代数结构, 而二次型的中心却不尽然. 例如, $Z(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$ 由所有的 n 阶对称矩阵构成, 当 $n>1$ 时在矩阵乘积下不封闭, 不交换. 注意到在矩阵空间中可以定义对称积, 即对任意 $X,Y\in\Bbbk^{n\times n}$, 定义乘法

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX),$$

由此得到自然的 Jordan 代数结构. 我们可以利用此代数结构来研究一组对称矩阵的中心.

为方便读者, 这里回顾 Jordan 代数及幂等元的定义.

定义 3.1 称域 $\Bbbk$ 上的代数 $\mathfrak{J}$ 为一个 Jordan 代数, 如果 $\mathfrak{J}$ 对于乘法满足交换律以及 Jordan 恒等式, 即对任意 $x,y\in\mathfrak{J}$, 有

$$xy=yx,\quad (xy)x^2=x(yx^2).$$

称 $e\in\mathfrak{J}$ 为一个幂等元, 如果 $e^2=e$. 对于含幺 Jordan 代数, 称 $e_1,e_2,\dots,e_s$ 为一组完全正交幂等元, 如果 $e_i^2=e_i,\forall i$; $e_ie_j=0,\forall i\neq j$; $1=e_1+e_2+\cdots+e_s$, 其中 1 是单位元. 称幂等元 e 是本原的, 如果 e 不能分解成两个非零的正交幂等元之和.

因后文需要, 这里先介绍幂等矩阵的一个简单性质.

引理 3.1 设 $\varepsilon\in\Bbbk^{n\times n}$. 则 ε 是本原幂等矩阵当且仅当 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$.

证明 设 $\varepsilon\in\Bbbk^{n\times n}$ 是一个本原幂等矩阵, 则 $m(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ 是 ε 的极小多项式. 注意到 $m(\lambda)$ 无重根, 因此 ε 可以相似对角化, 且特征值为 0 或 1. 于是, 存在可逆矩阵 $P\in\Bbbk^{n\times n}$, 使得

$$P^{-1}\varepsilon P=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r}\end{pmatrix}.$$

由于 ε 是本原的, 故 $r=1$. 因此, 由上式易得 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$.

反之, 由于 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$, 故存在 $\alpha,\beta\in\Bbbk^n$, 使得 $\varepsilon=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\operatorname{trace}(\varepsilon)=\beta^{\mathrm{T}}\alpha=1$, 因此

$$\varepsilon^2=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\varepsilon,$$

即 ε 是幂等矩阵. 其本原性由 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$ 得到. □

若 $\mathfrak{A}$ 是域 $\Bbbk$ 上的一个结合代数, 则关于如上定义的乘法 $\circ$: $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$, 代数 $(\mathfrak{A},\circ)$ 作成域 $\Bbbk$ 上的 Jordan 代数. 称域 $\Bbbk$ 上的代数 $\mathfrak{B}$ 为一个特殊 Jordan 代数, 如果 $\mathfrak{B}$ 同构于某个 $(\mathfrak{A},\circ)$ 的 Jordan 子代数.

下面是关于一组对称矩阵中心的性质及其在同时相合对角化问题上应用的主要结果.

定理 3.1 设 $A_1,\dots,A_m\in\Bbbk^{n\times n}$ 为一组对称矩阵. 则

(1) 中心 $Z(A_1,\dots,A_m)$ 在矩阵对称积 $\circ$ 下是一个含幺特殊 Jordan 代数;

(2) $A_1,\dots,A_m$ 可以同时相合对角化当且仅当 $Z(A_1,\dots,A_m)$ 的单位元可以分解为 n 个正交幂等元之和.

证明　(1) 显然, 单位阵 $I_n \in Z(A_1, \ldots, A_m)$. 对于任意 $X, Y \in Z(A_1, \ldots, A_m)$ 和任意 $A \in \{A_1, \ldots, A_m\}$, 有

$$\begin{aligned}(A(X \circ Y))^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}(A(XY+YX))^{\mathrm{T}}\\ &= \frac{1}{2}(Y^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + X^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\\ &= \frac{1}{2}(AYX + AXY)\\ &= A\frac{XY+YX}{2}\\ &= A(X \circ Y),\end{aligned}$$

即 $X \circ Y \in Z(A_1, \ldots, A_m)$. 易知 I_n 为 $Z(A_1, \ldots, A_m)$ 在运算 $\circ$ 下的幺元. 因此, 中心 $Z(A_1, \ldots, A_m)$ 是 $(\Bbbk^{n\times n}, \circ)$ 的 Jordan 子代数, 从而是一个特殊 Jordan 代数.

(2) 设 $I_n = e_1 + \cdots + e_n$ 是中心单位元的一个正交幂等分解. 由于 $e_1, \ldots, e_n$ 均可以相似对角化且两两可交换, 故 $e_1, \ldots, e_n$ 可以同时相似对角化, 即存在可逆矩阵 $P \in \Bbbk^{n\times n}$, 使得 $P^{-1}e_iP$ $(i = 1, \ldots, n)$ 为对角矩阵, 并且 $I_n = P^{-1}e_1P + \cdots + P^{-1}e_nP$. 由于 $P^{-1}e_1P, \ldots, P^{-1}e_nP$ 两两正交, 且对角元为 0 或 1, 故 $P^{-1}e_1P, \ldots, P^{-1}e_nP$ 均为秩 1 矩阵. 不妨设

$$P^{-1}e_iP = \begin{pmatrix} 0_{i-1} & & \\ & 1 & \\ & & 0_{n-i}\end{pmatrix}.$$

由于 $e_i \in Z(A_1, \ldots, A_m)$, 故对全体 $1 \leqslant j \leqslant m$, 有 $e_i^{\mathrm{T}}A_j = A_je_i$. 于是

$$\begin{aligned}(P^{\mathrm{T}}A_jP)(P^{-1}e_iP) &= P^{\mathrm{T}}A_je_iP = P^{\mathrm{T}}e_i^{\mathrm{T}}A_jP = (P^{-1}e_iP)^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}A_jP)\\ &= (P^{-1}e_iP)(P^{\mathrm{T}}A_jP), \quad i = 1, \ldots, n,\end{aligned}$$

这迫使

$$P^{\mathrm{T}}A_jP = \begin{pmatrix} a_{j_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{j_n}\end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m$$

同时为对角矩阵.

反之, 设存在可逆矩阵 $P \in \Bbbk^{n\times n}$, 使得 $P^{\mathrm{T}}A_1P, P^{\mathrm{T}}A_2P, \ldots, P^{\mathrm{T}}A_mP$ 均为对角矩阵. 则对全体 $1 \leqslant j \leqslant m$, 有

$$(P^{\mathrm{T}}A_jP\varepsilon_i)^{\mathrm{T}} = \varepsilon_i^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}A_jP = \varepsilon_iP^{\mathrm{T}}A_jP = P^{\mathrm{T}}A_jP\varepsilon_i,$$

其中

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0_{i-1} & & \\ & 1 & \\ & & 0_{n-i}\end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

因此, 在 $Z(P^{\mathrm{T}}A_1P,\dots,P^{\mathrm{T}}A_mP)$ 中有如下单位元的正交幂等分解:

$$I_n=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n.$$

由注 2.2 得到 $Z(A_1,\dots,A_m)$ 中单位元的正交幂等分解

$$I_n=P\varepsilon_1P^{-1}+\cdots+P\varepsilon_nP^{-1}.$$

证毕. □

例 3.1 设 A_1 和 A_2 同例 2.1. 在 $Z(A_1,A_2)$ 中, 单位元可以分解为以下 3 个正交幂等元之和:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2&4\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1&-3\\-1&-1&-3\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

故由定理 3.1(2) 知, A_1 和 A_2 可以同时相合对角化.

现在求解使得 $P^{\mathrm{T}}A_1P$ 和 $P^{\mathrm{T}}A_2P$ 同时化为对角矩阵的可逆矩阵 P. 为方便叙述, 记

$$e_1=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&1&2\\-1&-1&-2\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}-1&-1&-3\\-1&-1&-3\\1&1&3\end{pmatrix},$$

并记 $V_1^{(i)}$ 为 e_i 的属于特征值 1 的特征子空间, $i=1,2,3$, 则 $\dim V_1^{(i)}=1$. 由于 e_1, e_2 和 e_3 两两正交, 故对任意 $\alpha_i\in V_1^{(i)}$, 有

$$e_j\alpha_i=e_je_i\alpha_i=0,\quad j\neq i,$$

即 α_i 是 e_j 的属于特征值 0 的特征向量. 依次求得

$$V_1^{(1)}=\Bbbk\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad V_1^{(2)}=\Bbbk\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad V_1^{(3)}=\Bbbk\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

于是得到可逆矩阵集

$$M=\left\{\begin{pmatrix}k_1&2k_2&k_3\\-k_1&k_2&k_3\\0&-k_2&-k_3\end{pmatrix}\ \middle|\ k_1,k_2,k_3\in\Bbbk\setminus\{0\}\right\}.$$

对任意 $P\in M$, 有

$$P^{-1}e_1P=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}e_2P=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}e_3P=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}.$$

根据定理 3.1 的证明, 对任意 $P\in M$, $P^{\mathrm{T}}A_1P$ 和 $P^{\mathrm{T}}A_2P$ 均为对角矩阵. 在 M 中取 $k_1=k_2=k_3=1$, 即得到例 2.1 中的可逆矩阵 P.

4　一组对称矩阵同时相合对角化的算法及例子

根据定理 3.1, 本节给出一组对称矩阵同时相合对角化的算法以及一些例子.

算法 4.1　给定一组对称矩阵 $A_1,\dots,A_m\in\Bbbk^{n\times n}$.

步骤 1　计算中心. 求解线性方程组 $(A_jX)^{\mathrm T}=A_jX$, $j=1,\dots,m$. 选取 $Z(A_1,\dots,A_m)$ 的一组基 $X_1,\dots,X_s$.

步骤 2　计算秩为 1 的幂等元. 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 为未定元. 考虑矩阵 $\varepsilon=\sum_{1\leqslant i\leqslant s}\lambda_iX_i$, 并施加 ε 为秩 1 幂等矩阵的等价条件: $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$ 且 $\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$, 求解方程组. 若无解, 则 $A_1,\dots,A_m$ 不可以同时相合对角化, 步骤停止; 否则, 选取一个解 ε_1, 继续步骤 3.

步骤 3　矩阵降阶. 若 ε_1 是一个解, 则 ε_1 相似于

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}\in\Bbbk^{n\times n}.$$

求解可逆矩阵 P_1, 使得 $P_1^{-1}\varepsilon_1P_1=E_{11}$. 计算 $P_1^{\mathrm T}A_1P_1,\dots,P_1^{\mathrm T}A_mP_1$, 则有

$$P_1^{\mathrm T}A_jP_1=\begin{pmatrix}a_j&\\&\tilde A_j\end{pmatrix},\quad j=1,\dots,m,$$

其中 $a_j\in\Bbbk$, $\tilde A_1,\dots,\tilde A_m\in\Bbbk^{(n-1)\times(n-1)}$ 为一组 $n-1$ 阶对称矩阵.

步骤 4　矩阵相合对角化. 对 $\tilde A_1,\dots,\tilde A_m$ 重复步骤 1–3. 如果 $A_1,\dots,A_m$ 可以同时相合对角化, 则经过 $n-1$ 次后停止, 此时已经将 $A_1,\dots,A_m$ 同时相合对角化.

步骤 5 计算可逆矩阵 P. 在步骤 4 中依次得到可逆矩阵 $\tilde P_2,\dots,\tilde P_{n-1}$, 其中 $\tilde P_i\in\Bbbk^{(n-i+1)\times(n-i+1)}$. 先令

$$P_i=\begin{pmatrix}I_{i-1}&\\&\tilde P_i\end{pmatrix},\quad i=2,\dots,n-1,$$

则 $P_2,\dots,P_{n-1}\in\Bbbk^{n\times n}$. 再令 $P=P_1\cdots P_{n-1}$, 则 $P^{\mathrm T}A_1P,\dots,P^{\mathrm T}A_mP$ 均为对角矩阵.

注 4.1　定理 3.1 将一组对称矩阵的同时相合对角化问题转化为求解一组完全正交本原幂等元, 算法 4.1 通过递推的方式, 将其简化为求解秩 1 的幂等元 ε. 具体地, 根据引理 3.1, 只需要求解稀疏二次方程组 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$ 且 $\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$, 相较于矩阵分析的方法, 易于操作且计算量更小.

例 4.1　设 $\mathbb C^{2\times2}$ 中对称矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

由定义 2.4, 计算得

$$Z(A_1,A_2)=\left\{\begin{pmatrix}a+b&b\\-b&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb C\right\}.$$

记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 通过求解方程组 $\mathrm{rank}(\varepsilon)=1$, $\mathrm{trace}(\varepsilon)=1$, 得到中心单位元的正交幂等分解:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+\sqrt{3}\mathrm{i}&2\sqrt{3}\mathrm{i}\\-2\sqrt{3}\mathrm{i}&3-\sqrt{3}\mathrm{i}\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3-\sqrt{3}\mathrm{i}&-2\sqrt{3}\mathrm{i}\\2\sqrt{3}\mathrm{i}&3+\sqrt{3}\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

依次求得上述两个幂等矩阵属于特征值 1 的特征子空间为

$$V_1=\mathbb{C}\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\\-1\end{pmatrix},\quad V_2=\mathbb{C}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

从而得到可逆矩阵集

$$M=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}k_1&\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}\,\middle|\,k_1,k_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}.$$

取

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}&\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}\in M,$$

则有

$$P^{\mathrm{T}}A_1P=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\mathrm{i}&\\&-\sqrt{3}\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}A_2P=\begin{pmatrix}\frac{-3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}&\\&\frac{-3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\end{pmatrix},$$

即 A_1 和 A_2 可以同时相合对角化.

注 4.2 以上例子取自文献 [2], 结果与其一致. 我们的方法可以进一步说明, 一般的两个 2 阶对称阵可以同时相合对角化. 事实上, 设

$$A_1=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix}$$

以及

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in Z(A_1,A_2),$$

则 x_{ij} 满足以下线性方程组:

$$\begin{cases}ax_{12}+b(x_{22}-x_{11})-cx_{21}=0,\\\alpha x_{12}+\beta(x_{22}-x_{11})-\gamma x_{21}=0.\end{cases}$$

这说明 $(x_{12},x_{22}-x_{11},x_{21})=k(a,b,-c)\times(\alpha,\beta,-\gamma)$, 其中 $k\in\mathbb{C}$. 因此, $Z(A_1,A_2)$ 中的元均形如

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&\begin{vmatrix}b&-c\\\beta&-\gamma\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a&b\\\alpha&\beta\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-c&a\\-\gamma&\alpha\end{vmatrix}\end{pmatrix},\quad\forall k_1,k_2\in\mathbb{C}.$$

记第 2 个矩阵为 Λ, 记 $T(\lambda)=|\lambda I_2-\Lambda|$, 则易知 $Z(A_1,A_2)$ 实为交换结合代数, 且同构于 $\mathbb{C}[\lambda]/(T(\lambda))$. 因此, A_1 和 A_2 可以同时相合对角化, 当且仅当 $Z(A_1,A_2)\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, 当且仅当 $T(\lambda)=0$ 无重根, 当且仅当

$$\begin{vmatrix}-c & a\\ -\gamma & \alpha\end{vmatrix}^2-4\begin{vmatrix}b & -c\\ \beta & -\gamma\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\neq 0.$$

根据代数几何的知识 [4], 在 $\mathbb{C}^6$ 中, 满足这一条件的 $(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ 的集合是一个稠密的开集. 换言之, 一般的两个 2 阶对称阵可以同时相合对角化.

例 4.2　考虑 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 中对称矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}5 & 7 & -1\\ 7 & 5 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

由定义 2.4, 有

$$Z(A_1,A_2)=\left\{\left.\begin{pmatrix}a-5b-c-d+5e & -a-b-5d+e & a-2b-d-e\\ 6a+6b+c-6d-6e & 6a & 3b\\ 2c & 12d & 6e\end{pmatrix}\ \right|\ a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right\},$$

其中

$$X_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 6 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -2\\ 6 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_4=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ -6 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\end{pmatrix},\quad X_5=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

为 $Z(A_1,A_2)$ 的一组基. 注意到

$$-X_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

是秩为 1 且迹为 1 的矩阵, 因此它是一个幂等元. 记 $\varepsilon_1=-X_3$, 则 ε_1 相似于 E_{11}. 依次求解 ε_1 的属于特征值 1 和特征值 0 的特征向量, 选取 3 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon_1\alpha_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1\alpha_2 = \varepsilon_1\alpha_3 = 0$. 于是得到可逆矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $P_1^{-1}\varepsilon_1 P_1 = E_{11}$. 计算得到

$$P_1^{\mathrm{T}} A_1 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & 0 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{\mathrm{T}} A_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 5 & 1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

令

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

对 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 重复上述过程. 经计算得

$$Z(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -3a+b & -a \\ 2a & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

在 $Z(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ 中求得一个秩为 1 的幂等元为

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

且有

$$\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

使得

$$\tilde{P}_2^{-1}\varepsilon_2\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

得到

$$\tilde{P}_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_2\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

此时, $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 已经同时相合对角化. 由算法 4.1 知, A_1 和 A_2 可以同时相合对角化.

令

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \tilde{P}_2 \end{pmatrix},$$

并令 $P = P_1 P_2$, 则

$$P^{\mathrm{T}} A_1 P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{\mathrm{T}} A_2 P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

例 4.3　考虑 $\Bbbk^{3\times 3}$ 中对称矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得到 A_1 和 A_2 的中心为

$$Z(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 3a+b+c & 13a+b & 2b \\ 0 & -6a+c & 6a \\ 0 & -2a & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \Bbbk \right\},$$

其中一组基为

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 X_2 的秩为 1 且迹为 1, 因此它是一个幂等元. 记 $\varepsilon_1 = X_2$, 则 ε_1 相似于 E_{11}, 求得

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $P_1^{-1} \varepsilon_1 P_1 = E_{11}$. 计算得到

$$P_1^{\mathrm{T}} A_1 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_1^{\mathrm{T}} A_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

令

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

对 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 重复上述过程. 经计算得

$$Z(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\left\{\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a-3b \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in\Bbbk\right\}.$$

求解方程组 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$ 且 $\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$. 若 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}\notin\Bbbk$, 则方程组无解, 故由算法 4.1 可知, A_1 和 A_2 不可以同时相合对角化. 若 $\mathrm{i}\in\Bbbk$, 则可以求得一个秩为 1 的幂等元为

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} & \sqrt{3}\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix},$$

求得

$$\tilde{P}_2=\begin{pmatrix} \sqrt{3}-3\mathrm{i} & \sqrt{3}+3\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

使得

$$\tilde{P}_2^{-1}\varepsilon_2\tilde{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

计算得到

$$\tilde{P}_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1\tilde{P}_2=\begin{pmatrix} -4\sqrt{3}\mathrm{i} & \\ & 4\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix},\quad \tilde{P}_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_2\tilde{P}_2=\begin{pmatrix} 6-6\sqrt{3}\mathrm{i} & \\ & 6+6\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

此时, $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 已经同时相合对角化, 由算法 4.1 知, A_1 和 A_2 可以同时相合对角化.

令

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & \\ & \tilde{P}_2 \end{pmatrix},$$

并令 $P=P_1P_2$, 则

$$P^{\mathrm{T}}A_1P=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -4\sqrt{3}\mathrm{i} & \\ & & 4\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}A_2P=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 6-6\sqrt{3}\mathrm{i} & \\ & & 6+6\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

例 4.4 考虑 $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 中矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 7 & 6 \\ 10 & 15 & 11 & 12 \\ 7 & 11 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 12 & 22 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 & 10 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & -16 \\ 10 & 0 & -16 & -58 \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} 11 & 17 & 12 & 15 \\ 17 & 25 & 15 & 17 \\ 12 & 15 & 10 & 1 \\ 15 & 17 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

直接计算得

$$
\begin{aligned}
&Z(A_1,A_2,A_3)\\
&=\left\{\left.\begin{pmatrix}304a-38b-46c+d & -36a+84b-36c & -26a+10b+314c & -924a+288b+96c\\ -95a-17b+35c & 210a-126b+30c+d & 25a-11b-235c & 720a-228b-60c\\ -23a+7b-13c & -18a+6b-18c & 157a-47b-43c+d & 48a-12b-12c\\ 30a & 12b & 60c & d\end{pmatrix}\ \right|\ \begin{matrix}a,b,c,\\ d\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

求解方程组 $\operatorname{rank}(\varepsilon)=1$, $\operatorname{trace}(\varepsilon)=1$, 得到一个秩为 1 的幂等元

$$
\varepsilon_1=\begin{pmatrix}22&44&66&88\\ -17&-34&-51&-68\\ -1&-2&-3&-4\\ 4&8&12&16\end{pmatrix},
$$

它相似于 E_{11}, 求得

$$
P_1=\begin{pmatrix}22&2&3&4\\ -17&-1&0&0\\ -1&0&-1&0\\ 4&0&0&-1\end{pmatrix},
$$

使得 $P_1^{-1}\varepsilon_1P_1=E_{11}$. 计算得到

$$
P_1^{\mathrm{T}}A_1P_1=\begin{pmatrix}1&&&\\ &3&9&16\\ &9&33&50\\ &16&50&86\end{pmatrix},\quad P_1^{\mathrm{T}}A_2P_1=\begin{pmatrix}1&&&\\ &-7&-21&-36\\ &-21&-67&-110\\ &-36&-110&-186\end{pmatrix},\quad P_1^{\mathrm{T}}A_3P_1=\begin{pmatrix}1&&&\\ &1&6&7\\ &6&37&40\\ &7&40&47\end{pmatrix}.
$$

令

$$
B_1=\begin{pmatrix}3&9&16\\ 9&33&50\\ 16&50&86\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}-7&-21&-36\\ -21&-67&-110\\ -36&-110&-186\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}1&6&7\\ 6&37&40\\ 7&40&47\end{pmatrix}.
$$

对 B_1, B_2 和 B_3 重复上述过程. 计算得 B_1, B_2 和 B_3 的中心为

$$
Z(B_1,B_2,B_3)=\left\{\left.\begin{pmatrix}23a-2b+c & -10a-17b & 40a-10b\\ 2a+\frac{2}{5}b & 17a-\frac{1}{5}b+c & 10a+2b\\ -3a & 3b & c\end{pmatrix}\ \right|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\},
$$

其中一个秩为 1 的幂等元为

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}-5 & -25 & -30\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},$$

且有

$$\tilde{P}_2=\begin{pmatrix}5 & 5 & 6\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

使得

$$\tilde{P}_2^{-1}\varepsilon_2\tilde{P}_2=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

计算得到

$$\tilde{P}_2^{\mathrm{T}}B_1\tilde{P}_2=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 18 & 6\\ & 6 & 2\end{pmatrix},\quad \tilde{P}_2^{\mathrm{T}}B_2\tilde{P}_2=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -32 & -14\\ & -14 & -6\end{pmatrix},\quad \tilde{P}_2^{\mathrm{T}}B_3\tilde{P}_2=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & -1\\ & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

再令

$$C_1=\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-32 & -14\\ -14 & -6\end{pmatrix},\quad C_3=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

重复上述过程, 有

$$Z(C_1,C_2,C_3)=\left\{\begin{pmatrix}11a+b & 2a\\ -15a & b\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

求得一个秩为 1 的幂等元

$$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -15 & -5\end{pmatrix},$$

并求得

$$\tilde{P}_3=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix},$$

使得

$$\tilde{P}_3^{-1}\varepsilon_3\tilde{P}_3=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\tilde{P}_3^{\mathrm{T}}C_1\tilde{P}_3=\begin{pmatrix}2&\\&0\end{pmatrix},\quad \tilde{P}_3^{\mathrm{T}}C_2\tilde{P}_3=\begin{pmatrix}2&\\&-2\end{pmatrix},\quad \tilde{P}_3^{\mathrm{T}}C_3\tilde{P}_3=\begin{pmatrix}3&\\&-1\end{pmatrix}.$$

此时, C_1, C_2 和 C_3 已经同时相合对角化. 由算法 4.1 知, A_1, A_2 和 A_3 可以同时相合对角化.

令

$$P_2=\begin{pmatrix}1&\\&\tilde{P}_2\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&\tilde{P}_3\end{pmatrix},$$

并令 $P=P_1P_2P_3$, 则有

$$P^{\mathrm{T}}A_1P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&0\end{pmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}A_2P=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}A_3P=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&-1\end{pmatrix}.$$

5　一组 Hermite 矩阵的同时复相合对角化问题

本节将一组对称矩阵同时相合对角化的结果推广到一组 Hermite 矩阵同时复相合对角化的情形. 首先回顾 Hermite 矩阵和一组 Hermite 矩阵同时复相合对角化的定义.

定义 5.1　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为一个 n 阶复矩阵. 如果 $\overline{A}^{\mathrm{T}}=A$, 则称 A 为一个 Hermite 矩阵.

定义 5.2　设 $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为一组 Hermite 矩阵. 称 $A_1,\dots,A_m$ 可以同时复相合对角化, 如果存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$\overline{P}^{\mathrm{T}}A_jP=D_j,\quad j=1,\dots,m,$$

其中 $D_1,\dots,D_m\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对角矩阵.

以下记 $\overline{A}^{\mathrm{T}}=A^*$, 复相合一般也称为 $*$- 相合.

类似定义 2.4, 给出一组 Hermite 矩阵中心的定义.

定义 5.3　设 $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为一组 Hermite 矩阵. 定义 $A_1,\dots,A_m$ 的中心为

$$Z(A_1,\dots,A_m)=\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid (A_jX)^*=A_jX, j=1,\dots,m\}.$$

类似定理 3.1(2) 的证明, 可以得到以下结果.

定理 5.1 设 $A_1,\dots,A_m\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为一组 Hermite 矩阵, 则 $A_1,\dots,A_m$ 可以同时复相合对角化当且仅当在中心 $Z(A_1,\dots,A_m)$ 中单位元可以分解为 n 个正交幂等元之和.

一组 Hermite 矩阵同时相合对角化的算法与一组对称矩阵同时相合对角化的算法基本一致, 具体参考算法 4.1, 这里不再赘述. 下面以两个例子结束本节内容.

例 5.1 考虑以下 3 个 Hermite 矩阵:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1+\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i} & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2 & 2+2\mathrm{i}\\ 2-2\mathrm{i} & 7\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-2 & -2-2\mathrm{i}\\ -2+2\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}.$$

根据定义 5.3, 计算得到

$$Z(A_1,A_2,A_3)=\left\{\begin{pmatrix}a+b & a(1+\mathrm{i})\\ 0 & b\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

然后计算 $Z(A_1,A_2,A_3)$ 中秩为 1 的幂等元, 求得

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0 & -1-\mathrm{i}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

且 ε_1 相似于 E_{11}. 因此存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}\varepsilon_1P=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix},$$

求得

$$P=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

计算得到

$$P^*A_1P=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad P^*A_2P=\begin{pmatrix}3 & \\ & 2\end{pmatrix},\quad P^*A_3P=\begin{pmatrix}5 & \\ & -2\end{pmatrix}.$$

此时, A_1, A_2 和 A_3 已经同时复相合对角化.

例 5.2 考虑以下 2 个 4 阶 Hermite 矩阵:

$$A_1=\begin{pmatrix}4 & 1-\mathrm{i} & 2 & 0\\ 1+\mathrm{i} & -2 & -3+3\mathrm{i} & -6\\ 2 & -3-3\mathrm{i} & 12 & -14-6\mathrm{i}\\ 0 & -6 & -14+6\mathrm{i} & -8\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0 & -2+2\mathrm{i} & 4 & 0\\ -2-2\mathrm{i} & -3 & -1+\mathrm{i} & -2\\ 4 & -1-\mathrm{i} & 10 & -6-2\mathrm{i}\\ 0 & -2 & -6+2\mathrm{i} & -2\end{pmatrix}.$$

根据定义 5.3, 计算得到 $Z(A_1,A_2)=\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid (A_jX)^*=A_jX, j=1,2\}=\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant 4}\mathbb{R}X^{(k)}$, 其中

$$X^{(1)}=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0\\ 6+4\mathrm{i} & 5-\mathrm{i} & 0 & 0\\ -1-\mathrm{i} & -1 & 0 & 0\\ -2-2\mathrm{i} & -2 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X^{(2)}=\begin{pmatrix}5-\mathrm{i} & 0 & 5-\mathrm{i} & 0\\ -6-4\mathrm{i} & 0 & -6-4\mathrm{i} & 0\\ 1+\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} & 0\\ 2+2\mathrm{i} & 0 & 2+2\mathrm{i} & 0\end{pmatrix},$$

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1+\mathrm{i} & -2\\ 0 & 1+\mathrm{i} & 2 & 2+2\mathrm{i}\\ 0 & 1 & 1-\mathrm{i} & 2\\ 0 & 2 & 2-2\mathrm{i} & 4\end{pmatrix},\quad X^{(4)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 4+4\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

计算 $Z(A_1,A_2)$ 中相似于 E_{11} 的幂等元, 解得

$$\varepsilon_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2+2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

因此存在可逆矩阵 P_1, 使得

$$P_1^{-1}\varepsilon_1P_1=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

求得

$$P_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1+\mathrm{i} & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

计算得到

$$P_1^*A_1P_1=\begin{pmatrix}36 & & & \\ & 4 & 1-\mathrm{i} & 2\\ & 1+\mathrm{i} & -2 & -15+3\mathrm{i}\\ & 2 & -15-3\mathrm{i} & -76\end{pmatrix},\quad P_1^*A_2P_1=\begin{pmatrix}18 & & & \\ & 0 & -2+2\mathrm{i} & 4\\ & -2-2\mathrm{i} & -3 & -5+\mathrm{i}\\ & 4 & -5-\mathrm{i} & -22\end{pmatrix}.$$

记

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1-\mathrm{i} & 2 \\ 1+\mathrm{i} & -2 & -15+3\mathrm{i} \\ 2 & -15-3\mathrm{i} & -76 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2+2\mathrm{i} & 4 \\ -2-2\mathrm{i} & -3 & -5+\mathrm{i} \\ 4 & -5-\mathrm{i} & -22 \end{pmatrix}.$$

对 B_1 和 B_2 重复上述过程. 计算得

$$Z(B_1, B_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a+5b & b & b(5-\mathrm{i}) \\ 0 & a+b(4-\mathrm{i}) & -b(6+4\mathrm{i}) \\ 0 & -b & a+b\mathrm{i} \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

然后计算其中秩为 1 的幂等元, 解得

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5+\mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 6+4\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 5-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

因此存在可逆矩阵 P_2, 使得

$$P_2^{-1} \varepsilon_2 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

计算得

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 0 & 5-\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

此时有

$$P_2^* B_1 P_2 = \begin{pmatrix} -108 & & \\ & 4 & 2-6\mathrm{i} \\ & 2+6\mathrm{i} & 28 \end{pmatrix}, \quad P_2^* B_2 P_2 = \begin{pmatrix} -36 & & \\ & 0 & -12+12\mathrm{i} \\ & -12-12\mathrm{i} & -48 \end{pmatrix}.$$

再令

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2-6\mathrm{i} \\ 2+6\mathrm{i} & 28 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -12+12\mathrm{i} \\ -12-12\mathrm{i} & -48 \end{pmatrix}.$$

重复上述过程. 计算中心为

$$Z(C_1, C_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a+b(4-\mathrm{i}) & b(-5+\mathrm{i}) \\ -b(1+\mathrm{i}) & a+b\mathrm{i} \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

计算得 $Z(C_1,C_2)$ 中一个秩为 1 的幂等元为

$$\varepsilon_3=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5-\mathrm{i} & -5+\mathrm{i}\\ -1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

求得可逆矩阵

$$P_3=\begin{pmatrix}2-3\mathrm{i} & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

使得

$$P_3^{-1}\varepsilon_3P_3=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}.$$

再计算得到

$$P_3^*C_1P_3=\begin{pmatrix}36 & \\ & 36\end{pmatrix},\quad P_3^*C_2P_3=\begin{pmatrix}72 & \\ & -72\end{pmatrix}.$$

此时, C_1 和 C_2 已经同时复相合对角化. 根据算法可知, A_1 和 A_2 可以同时复相合对角化.

令

$$P=P_1\begin{pmatrix}1 & \\ & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2-3\mathrm{i} & 1\\ 1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -5+\mathrm{i} & 5-\mathrm{i}\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

则有

$$P^*A_1P=\begin{pmatrix}36 & & & \\ & -108 & & \\ & & 36 & \\ & & & 36\end{pmatrix},\quad P^*A_2P=\begin{pmatrix}18 & & & \\ & -36 & & \\ & & 72 & \\ & & & -72\end{pmatrix}.$$

参考文献

1 Albert A A. A quadratic form problem in the calculus of variations. Bull Amer Math Soc, 1938, 44: 250–253

2 Bustamante M D, Mellon P, Velasco M V. Solving the problem of simultaneous diagonalization of complex symmetric matrices via congruence. SIAM J Matrix Anal Appl, 2020, 41: 1616–1629

3 Calabi E. Linear systems of real quadratic forms. Proc Amer Math Soc, 1964, 15: 844–846

4 Cox D A, Little J, O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms, 4th ed. Cham: Springer, 2015

5 Finsler P. Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen. Comment Math Helv, 1936, 9: 188–192

6 Harrison D K. A Grothendieck ring of higher degree forms. J Algebra, 1975, 35: 123–138
7 Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization. SIAM Rev, 2007, 49: 255–273
8 Huang H L, Lu H, Ye Y, et al. Diagonalizable higher degree forms and symmetric tensors. Linear Algebra Appl, 2021, 613: 151–169
9 Huang H L, Lu H, Ye Y, et al. On centres and direct sum decompositions of higher degree forms. Linear Multilinear Algebra, 2022, 70: 7290–7306
10 Jiang R, Li D. Simultaneous diagonalization of matrices and its applications in quadratically constrained quadratic programming. SIAM J Optim, 2016, 26: 1649–1668
11 Kronecker L. Über die congruenten transformation der bilinearen formen. In: Leopold Kroneckers Werke, vol. I. Monatsberichte Königl. Berlin: Preuß Akad Wiss, 1874, 423–483
12 Uhlig F. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey. Linear Algebra Appl, 1979, 25: 219–237
13 Weierstrass K. Zur Theorie der Biliearen und Quadratischen Formen. Berlin: Königl Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868

Simultaneous diagonalization of symmetric matrices via congruence

Hualin Huang, Haoran Miao & Guoya Qu

Abstract In this paper, we generalize Harrison's theory of centres of a higher degree form to that for a set of symmetric matrices. Based on this generalization, we provide criteria and algorithms for simultaneously diagonalizing a set of symmetric matrices, or equivalently, for simultaneously completing the square of a set of quadratic forms. Our approach essentially amounts to solving linear equations and sparse quadratic equations, which are easy to operate. Moreover, our approach can be directly generalized to simultaneously diagonalizing a set of Hermitian matrices via $*$-congruence.

Keywords a set of symmetric matrices, simultaneous diagonalization via congruence, centre of polynomials

MSC(2020) 15A20, 15A21

doi: 10.1360/SSM-2025-0021