



多目标稀疏设施选址问题

李高西^{1*}, 任艺², 吕一兵³

1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067;

2. 重庆工商大学统计智能计算与监测重庆市重点实验室, 重庆 400067;

3. 长江大学信息与数学学院, 荆州 451199

E-mail: ligaoxicn@126.com, ry991002@163.com, yibinglv@yangtzeu.edu.cn

收稿日期: 2023-07-03; 接受日期: 2025-04-18; 网络出版日期: 2025-05-26; * 通信作者

重庆市研究生导师团队建设项目 (批准号: yds223010)、国家自然科学基金 (批准号: 12271061) 和重庆国家应用数学中心科研项目 (批准号: ncamc2021-msxm01) 资助项目

摘要 设施网络设计者有时希望通过牺牲总成本使得为所有用户提供充足服务的设施数量尽可能少, 为实现该目标, 本文提出一个多目标稀疏设施选址模型. 该模型的目标函数中包含稀疏导出项, 为难以求解的混合整数多目标规划模型. 不同于常见的混合整数规划的求解方法, 本文将混合整数多目标规划模型松弛为连续的隐光滑的非线性多目标规划模型, 从而可以使用常规算法求解. 此外, 本文还讨论松弛模型解的收敛性. 数值实验表明该连续松弛方法可以很好地得到多目标稀疏设施选址模型的整数解.

关键词 多目标规划 设施选址 混合整数规划

MSC (2020) 主题分类 90C29, 90B85, 90C11

1 引言

设施选址问题是组合优化问题中一个著名的 NP (non-deterministic polynomial) 难问题. 该问题的实质是在一个给定的候选地址集合中选择设施建立的位置, 并将用户分配给所建立的设施, 以使得建设成本和连接成本最小 [2]. 现代选址问题最早由 Alfred (参见文献 [30]) 在 19 世纪末提出. 1977 年, Akinc 和 Khumawala [2] 又提出了带有容量限制的仓库选址模型. 设施选择模型有很广泛的应用, 如位置和分布规划问题 [2]、生产计划问题 [23], 电信网络设计问题 [18]、配水系统设计问题 [29]、下水道管网设计问题 [20]、城市规划问题 [3]. 在实际应用中, 针对一些特殊的场景又产生了一些特殊的设施选址模型, 如随机选址模型 [32] 和 p -中位选址模型 [13] 等.

然而, 对后期维护成本较高的设施选址问题, 对生态环境、居民生活质量影响较大的设施选址问题 (如核电站选址、冻库选址), 由于这些后期的影响很难准确衡量, 设计者希望通过牺牲总成本使得需要在系统网络中建立的设施数量尽可能少, 从而减少因设施数量过多而产生的不良影响. 但现有的

英文引用格式: Li G X, Ren Y, Lyu Y B. The multiobjective sparse facility location problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–16, doi: [10.1360/SSM-2023-0199](https://doi.org/10.1360/SSM-2023-0199)

设施选址模型均缺少这样的功能, 这也是本文的研究动机之一. 分析选址问题特点后, 我们发现建设成本与连接成本之和最小, 与设施数量最少这两个目标相互矛盾, 符合多目标规划的目标设计要求, 因此本文建立同时极小化这两个目标函数的双目标稀疏设施选址模型.

在过去的几十年里, 大量的精确算法、进化算法、启发式算法和近似算法被提出用于求解设施选址问题, 如基于 Bender 分解的可用于求解大规模选址问题的精确算法 [4, 7, 31]、基于分支定界法的精确算法 [1, 2, 17, 28]、基于仿生学的进化算法 [12, 24] 和基于机器学习的算法 [12]. 由于设施选址问题是著名的 NP 难问题, 所以很难在多项式时间内被求解. 近年来近似算法和启发式算法也取得了比较好的求解效果 (参见文献 [19, 25, 26, 34, 35]). 遗憾的是, 由于本文所建立模型为多目标规划模型, 不能直接用上述算法求解. 模型求解的困难会严重限制模型的应用, 因此提出有效的求解算法是极为迫切的问题, 这也是本文的第二个研究动机.

本文的主要贡献总结如下.

- 本文提出一个多目标稀疏设施选址模型. 对于一些特定设施的选址问题, 决策者可能希望用尽可能少的设施来满足用户的需求. 本文将稀疏导出项作为优化目标之一, 总成本作为第二个优化目标, 建立双目标稀疏设施选址模型. 该模型可以得到稀疏的解, 从而满足上述需求.
- 本文设计一个连续松弛求解方法. 本文所提出的多目标稀疏设施选址模型为多目标混合整数规划模型, 其求解难度很大. 不同于常用的混合整数规划问题求解算法的设计思路, 我们将整数变量连续化从而构造一个等价的非光滑非线性的多目标均衡约束规划模型. 再进一步将该模型松弛为非线性多目标规划问题求解. 最终的松弛模型具有隐光滑性, 可调用可行方向法、内点法求解. 虽然对于一般的混合整数规划问题, 将其连续化并不是很好的选择, 但分析数值结果后发现, 我们的连续松弛方法对设施选址问题来说有很好的求解效果.
- 本文首次讨论多目标均衡约束优化问题的松弛求解方法. 对于连续的多目标均衡约束优化问题, 我们用 Scholtes 松弛方法对其进行松弛, 并讨论松弛问题与原问题的 Pareto 最优解、弱 Pareto 最优解以及稳定点之间的关系.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节建立多目标稀疏设施选址模型, 并将其连续化为多目标均衡约束规划问题. 第 3 节讨论多目标均衡约束规划问题的松弛方法和标量化方法, 分析松弛问题与原问题的解以及稳定点之间的关系. 第 4 节将第 3 节的结论应用于多目标稀疏选址模型, 分析最终松弛模型的隐光滑性. 第 5 节通过数值结果展示模型和算法的有效性. 第 6 节给出本文的结论.

2 多目标稀疏设施选址模型

本节提出一个多目标稀疏设施选址模型. 在此之前, 先回顾传统的设施选址模型.

2.1 设施选址模型

设施选址问题是一类经典的组合优化问题, 它要在一组候选地址中选择设施建立的位置, 并将每个用户分配给建立的设施, 同时最小化总成本. 在该问题中, 我们主要考虑两类成本: 一是当设施被建立时的固定成本 (建设成本), 二是用户从设施中获取服务时的连接成本 [2]. 该问题的主要符号定义如表 1 所示.

表 1 常用符号

	符号	定义
集合	I	设施的候选位置集合
	J	用户集
参数	q_i	设施 $i \in I$ 的容量
	F_i	建设设施 $i \in I$ 的固定成本
	d_j	用户 $j \in J$ 的需求
	c_{ij}	从设施 $i \in I$ 到用户 $j \in J$ 的每单位运输成本
变量	x_{ij}	从设施 $i \in I$ 到用户 $j \in J$ 的供应量
	z_i	二元变量, 当设施位于节点 $i \in I$ 时, 为 1, 否则为 0

数学上, 设施选址问题可以表示为下述混合整数规划模型:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,z} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in J, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq q_i z_i, \quad \forall i \in I, \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \\
 & z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$ 表示连接成本, $\sum_{i \in I} F_i z_i$ 表示固定成本. 令 $M = \sum_{j \in J} d_j$ 表示用户总需求, 如果每个设施的容量限制 q_i 均不比用户总需求小 ($q_i \geq M, \forall i \in I$), 则称模型 (2.1) 为无容量限制设施选址模型, 否则称其为容量限制设施选址模型.

2.2 稀疏设施选址模型

对后期维护成本较高的设施选址问题 (如核电站选址、冷冻库选址), 对生态环境、居民生活质量影响较大的设施选址问题, 决策者希望在系统网络上建立的设施数量尽可能少从而减少因设施数量过多而产生的不良影响. 因此, 本节用 1 范数构造稀疏导出项. 分析设施选址问题特点后, 我们发现, 建设成本与连接成本之和最小、与稀疏导出项最小这两个目标相互矛盾, 而多目标模型可准确描述目标函数之间的博弈关系, 因此本文建立同时极小化这两个目标函数的多目标稀疏设施选址模型. 多目标模型的另外一个好处是其解一般情形下不唯一, 从而可为决策者提供足够多的备选方案. 本文所建立的多目标模型如下:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,z} \quad & \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i, \|z\|_1 \right) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in J, \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq q_i z_i, \quad \forall i \in I, \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \\
 & z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\|z\|_1 = \sum_{i \in I} |z_i|$ 是稀疏诱导项. 显然, 问题 (2.2) 为多目标混合整数规划模型, 由于该模型同时包含多目标、整数变量这两个难处理的因素, 因此其求解难度特别大. 本文首先考虑将整数变量连续化.

2.3 模型的连续化

0-1 变量的存在, 使得模型问题 (2.2) 为难以求解的多目标混合整数规划问题, 本小节将其等价转化为连续优化问题.

众所周知, 对于任意的 $i \in I$, 系统

$$z_i \geq 0, \quad 1 - z_i \geq 0, \quad z_i(1 - z_i) = 0$$

称为互补约束, 它们与 0-1 约束有下述等价关系:

$$z_i \in \{0, 1\} \Leftrightarrow z_i \geq 0, \quad 1 - z_i \geq 0, \quad z_i(1 - z_i) = 0, \quad \forall i \in I. \quad (2.3)$$

因此, 多目标混合整数规划问题 (2.2) 可等价转化为下述非光滑的多目标均衡约束规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{x, z} \quad & \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i, \|z\|_1 \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in J, \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq q_i z_i, \quad \forall i \in I, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \\ & z_i \geq 0, \quad 1 - z_i \geq 0, \quad z_i(1 - z_i) = 0, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \quad (2.4)$$

显然, 问题 (2.4) 为连续的多目标规划问题. 容易证明, 多目标均衡约束规划问题 (2.4) 与多目标混合整数规划问题 (2.2) 等价, 即如下命题成立.

命题 2.1 若 (x^*, z^*) 为多目标均衡约束规划问题 (2.4) 的 (弱) Pareto 最优解, 则它也是多目标混合整数规划问题 (2.2) 的 (弱) Pareto 最优解, 且问题 (2.4) 和 (2.2) 有相同的 (弱) Pareto 前沿面. 反之也成立.

Pareto 最优解和弱 Pareto 最优解的定义见定义 3.1. 由 (2.3) 可知, 问题 (2.4) 和 (2.2) 有相同的约束域, 又因为它们有相同的目标函数, 所以容易证明上述命题的结论成立. 遗憾的是, 多目标均衡约束规划问题 (2.4) 虽然是连续的优化问题, 但是仍然存在均衡约束、多个目标、目标函数非光滑三个难处理的因素, 求解难度依然较大.

3 非光滑多目标均衡约束规划

即使对光滑的多目标均衡约束规划问题, 目前的成果也主要集中在理论方面. Mordukhovich [22] 在 Banach 空间中讨论了具有广义均衡约束的多目标规划问题的最优性条件. Zhang 等 [36] 讨论了多目标均衡约束规划的约束规范, 并给出了真有效解存在的必要性条件. Lin 等 [21] 讨论了随机多目标均衡约束规划模型, 将其转化为非线性方程组求解, 并将该方法应用于医疗管理. 对于单目标均衡优化问题, 目前有比较丰富的求解方法, 如松弛方法 [14, 16, 27, 33]、序列二次规划方法 [8] 和增广 Lagrange 方

法^[10, 15]. 注意到, 在单目标均衡约束规划问题的求解算法中, 松弛方法是比较受欢迎的有效求解方法. Scholtes^[27] 提出了第一个松弛方法, 该方法操作简单且在 MPEC-LICQ (linear independence constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints) 成立的假设下松弛问题的稳定点序列可以收敛到原问题的 C- 稳定点. 本节将该松弛方法应用于非光滑的多目标均衡约束规划问题, 并讨论其收敛性质. 考虑下述具有两个目标且其中一个为非光滑函数的多目标均衡约束规划问题:

$$\begin{aligned} \min & (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.t. } & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ & G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $G, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 均为连续可微函数, $f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数. 为了叙述方便, 令 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^\top$, Ω 为该问题的约束域, 即

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0, G(x) \geq 0, H(x) \geq 0, G(x)^\top H(x) = 0\},$$

$\mathcal{I}_F(x) := \{i : F_i(x) = 0\}$ 表示积极指标集合且

$$\mathcal{I}_{+0}(x) := \mathcal{I}_H(x) \setminus \mathcal{I}_G(x), \quad \mathcal{I}_{00}(x) := \mathcal{I}_G(x) \cap \mathcal{I}_H(x), \quad \mathcal{I}_{0+}(x) := \mathcal{I}_G(x) \setminus \mathcal{I}_H(x).$$

对于 $x^* \in \Omega$, 记 $\mathcal{I}_{+0}^* = \mathcal{I}_{+0}(x^*)$, $\mathcal{I}_{00}^* = \mathcal{I}_{00}(x^*)$, $\mathcal{I}_{0+}^* = \mathcal{I}_{0+}(x^*)$.

3.1 稳定性和约束规范

定义 3.1^[6] 假设 $x^* \in \Omega$, 如果不存在 $x \in \Omega$ 使得 $f(x) \leq f(x^*)$ 且至少存在一个 $i \in \{1, 2\}$ 满足 $f_i(x) < f_i(x^*)$, 则称 x^* 为多目标问题 (3.1) 的 Pareto 最优解; 如果不存在 $x \in \Omega$ 使得 $f(x) < f(x^*)$, 则称 x^* 为多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的弱 Pareto 最优解.

一般情形下, 问题 (3.1) 为非凸优化问题. 众所周知, 获得非凸问题的全局最优解一般情形下是一件非常困难的事情, 常见的算法只能收敛到稳定点或者局部最优解. 类似于文献 [21, 定义 2.2] 定义问题 (3.1) 的下述 Pareto 稳定点.

定义 3.2 令 $x^* \in \Omega$.

(1) 若存在 $\theta \in \partial f_2(x^*)$ 和乘子 $(\lambda, \alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} \lambda_1 \nabla f_1(x^*) + \lambda_2 \theta + \nabla g(x^*)\alpha + \nabla h(x^*)\beta - \nabla G(x^*)\mu - \nabla H(x^*)\nu = 0, \\ \alpha \geq 0, \quad g(x^*)^\top \alpha = 0, \\ \mu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{+0}^*, \quad \nu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{0+}^* \end{cases} \quad (3.2)$$

且

$$\lambda \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (3.3)$$

成立, 则称 x^* 为多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto 弱 (W-) 稳定点.

(2) 若存在 $\theta \in \partial f_2(x^*)$ 和乘子 $(\lambda, \alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得 (3.2) 和 (3.3) 成立, 且满足

$$\mu_i \nu_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}_{00}^*, \quad (3.4)$$

则称 x^* 为多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto Clarke (C-) 稳定点.

(3) 若存在 $\theta \in \partial f_2(x^*)$ 和乘子 $(\lambda, \alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得 (3.2) 和 (3.3) 成立, 且满足

$$\mu_i > 0, \quad \nu_i > 0 \quad \text{or} \quad \mu_i \nu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{00}^*, \quad (3.5)$$

则称 x^* 为多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto Mordukhovich (M-) 稳定点.

由定义易知, 三类稳定点有如下的强弱关系:

$$\text{Pareto M- 稳定点} \Rightarrow \text{Pareto C- 稳定点} \Rightarrow \text{Pareto W- 稳定点}.$$

注 3.1 当多目标均衡约束规划问题 (3.1) 只有 f_1 一个目标函数时, 则问题 (3.1) 退化为单目标均衡约束规划模型. 此时对于 $x^* \in \Omega$,

(1) 若存在乘子 $(\alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} \nabla f_1(x^*) + \nabla g(x^*)\alpha + \nabla h(x^*)\beta - \nabla G(x^*)\mu - \nabla H(x^*)\nu = 0, \\ \alpha \geq 0, \quad g(x^*)^\top \alpha = 0, \\ \mu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{+0}^*, \quad \nu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{0+}^* \end{cases} \quad (3.6)$$

成立, 则称 x^* 为单目标均衡约束规划的 W- 稳定点;

(2) 若存在乘子 $(\alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得 (3.6) 和 (3.4) 成立, 则称 x^* 为单目标均衡约束规划的 C- 稳定点;

(3) 若存在乘子 $(\alpha, \beta, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得 (3.6) 和 (3.5) 成立, 则称 x^* 为单目标均衡约束规划的 M- 稳定点.

接下来回顾均衡约束规划的 Mangasarian-Fromovitz 约束规范 (Mangasarian-Fromovitz constraint qualification for mathematical programming with equilibrium constraint, MPEC-MFCQ).

定义 3.3 ^[11] 令 $x^* \in \Omega$, 若不存非零向量 $(\alpha, \beta, \mu, \nu) \in \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} \nabla g(x^*)\alpha + \nabla h(x^*)\beta - \nabla G(x^*)\mu - \nabla H_i(x^*)\nu = 0, \\ \alpha \geq 0, \quad g(x^*)^\top \alpha = 0, \\ \mu_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_{+0}^*, \\ \nu_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_{0+}^* \end{cases}$$

成立, 则称在 x^* 满足 MPEC-MFCQ.

3.2 松弛与标量化

多目标均衡约束规划问题 (3.1) 包含互补约束 $G(x) \geq 0, H(x) \geq 0, G(x)^\top H(x) = 0$, 这也使得诸如线性独立约束规范、MF (Mangasarian-Fromovitz)- 约束规范等这些常见的约束规范一般不成立. 对于单目标均衡约束规划问题, 将其松弛为一般的只具有等式约束和不等式约束的非线性规划问题是最常用的求解方法之一. 本文选用 Scholtes ^[27] 松弛方法. 该方法的基本思想是将互补约束 $G_i(x) \geq 0, H_i(x) \geq 0, G_i(x)H_i(x) = 0$ 近似为如下形式的非线性系统:

$$G_i(x) \geq 0, \quad H_i(x) \geq 0, \quad G_i(x)H_i(x) \leq t. \quad (3.7)$$

该系统的可行域见图 1.

接下来, 将该方法应用于多目标均衡约束规划问题 (3.1) 即得到下述松弛问题:

$$\begin{aligned} & \min (f_1(x), f_2(x))^{\top} \\ & \text{s.t. } g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ & \quad G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^{\top} H(x) \leq t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

显然, 问题 (3.8) 为只具有等式约束和不等式约束的非光滑的多目标规划问题, 记其约束域为 $\Omega(t)$. 文献 [14, 定理 3.2] 指出, 若均衡约束系统在 $x^* \in \Omega$ 处满足 MPEC-MFCQ, 则存在 x^* 的一个邻域 N 和 $\bar{t} > 0$ 使得问题 (3.8) 在任意的点 $x \in N \cap \Omega(t)$ 处满足标准的 MFCQ.

下面讨论多目标均衡约束规划问题 (3.1) 与多目标非线性规划问题 (3.8) 的 Pareto 最优解以及弱 Pareto 最优解之间的关系.

定理 3.1 对于 $t > 0$, 令 x_t 为多目标非线性规划问题 (3.8) 的弱 Pareto 最优解. 进一步令 $t \downarrow 0$ 且假设 x^* 是 $\{x_t\}$ 的任一聚点. 则 x^* 是多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的弱 Pareto 最优解.

证明 容易证明 $x^* \in \Omega$, 且对于任意的 $t > 0$, 有 $\Omega \subseteq \Omega_t$. 下面用反证法证明该结论. 假设 x^* 不是多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的弱 Pareto 最优解, 则存在 $\bar{x} \in \Omega$ 使得

$$f_1(\bar{x}) < f_1(x^*) \quad \text{且} \quad f_2(\bar{x}) < f_2(x^*).$$

根据 $x_t \rightarrow x^*$ 和连续函数的保号性, 可知存在 x^* 的邻域 N 使得对任意的 $x_t \in N$ 均有

$$f_1(\bar{x}) < f_1(x_t) \quad \text{且} \quad f_2(\bar{x}) < f_2(x_t).$$

这与 x_t 是多目标非线性规划问题 (3.8) 的弱 Pareto 最优解矛盾. 该定理得证. $\square$

下面讨论松弛问题 Pareto 最优解的收敛性. 为了叙述方便, 令

$$Y := \{y \in \mathbb{R}^2 : y = (f_1(x), f_2(x))^{\top}, x \in \Omega\},$$

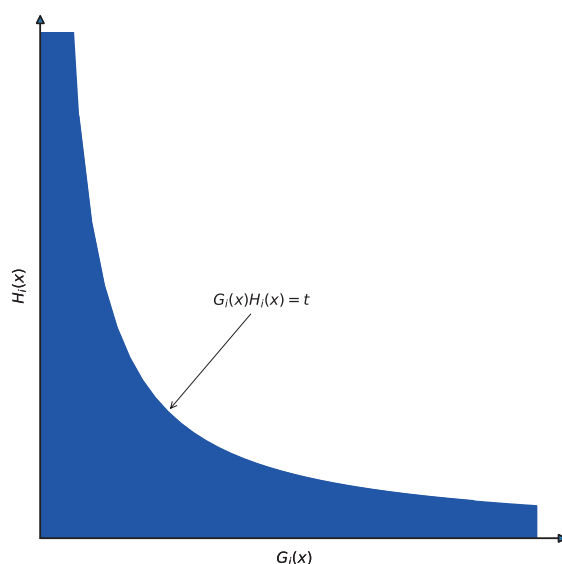


图 1 (网络版彩图) Scholtes 松弛方法的约束域

$$\text{WMinY} := \{\hat{y} \in Y : \text{不存在 } y \in Y \text{ 使得 } y < \hat{y}\}, \quad (3.9)$$

$$\text{MinY} := \{\hat{y} \in Y : \text{不存在 } y \in Y \text{ 使得 } y \leq \hat{y} \text{ 且至少有一个 } i \in \{1, 2\} \text{ 满足 } y_i < \hat{y}_i\}. \quad (3.10)$$

对于 Pareto 最优解, 有下述定理成立.

定理 3.2 对于 $t > 0$, 令 x_t 为多目标非线性规划问题 (3.8) 的 Pareto 最优解, 令 $t \downarrow 0$ 且假设 x^* 是 $\{x_t\}$ 的任一聚点, 进一步假设 $\text{WMinY} = \text{MinY}$. 则 x^* 是多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto 最优解.

证明 显然有 $x^* \in \Omega$, 且对于任意的 $t > 0$, 有 $\Omega \subseteq \Omega_t$. 下面用反证法证明该结论. 假设 x^* 不是多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto 最优解. 因为 $\text{WMinY} = \text{MinY}$, 所以结合定义 3.1、(3.9) 和 (3.10), 可知存在 $\bar{x} \in \Omega$ 使得

$$f_1(\bar{x}) < f_1(x^*) \quad \text{且} \quad f_2(\bar{x}) < f_2(x^*).$$

余下的证明过程与定理 3.1 的证明过程相同, 此处省略. 该定理得证. $\square$

注 3.2 定理 3.2 条件中的假设 $\text{WMinY} = \text{MinY}$ 即是要求多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto 最优值前沿面与弱 Pareto 最优值前沿面相同.

松弛问题 (3.8) 仍然为非光滑的多目标规划问题, 本文采用线性加权标量化方法求解该问题. 为叙述方便, 定义下述权重集合:

$$\Lambda^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^\top : \lambda \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

对于给定的 $\lambda \in \Lambda^+$, 构造下述标量化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ & G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) \leq t. \end{aligned} \quad (3.11)$$

根据文献 [6] 可知标量化问题 (3.11) 与多目标规划问题 (3.8) 的解之间有如下关系.

引理 3.1 [6] (1) 对任意的 $\lambda \in \Lambda^+$, 若 x^* 是标量化问题 (3.11) 的最优解, 则 x^* 是多目标规划问题 (3.8) 的弱 Pareto 最优解;

(2) 对任意的 $0 < \lambda \in \Lambda^+$, 若 x^* 是标量化问题 (3.11) 的最优解, 则 x^* 是多目标规划问题 (3.8) 的 Pareto 最优解.

由于问题 (3.11) 为非凸优化问题, 因此讨论其稳定点的收敛性也很有意义. 下述定理表明, 标量化问题 (3.11) 的稳定点序列可以收敛到多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto 稳定点.

定理 3.3 令 $t \downarrow 0$, x_t 为标量化问题 (3.11) 的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 点. 假设 x^* 是 $\{x_t\}$ 的聚点且多目标均衡约束规划问题 (3.1) 在点 x^* 处满足 MPEC-MFCQ, 则 x^* 是问题 (3.1) 的 Pareto C- 稳定点.

证明 显然标量化问题 (3.11) 在点 x^* 处满足 MPEC-MFCQ. 由文献 [14, 定理 3.1] 可知, x^* 是均衡约束规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ & G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

的 C- 稳定点, 即存在 $\theta \in \partial f_2(x^*)$ 和乘子 $(\alpha, \beta, \mu, \nu) \in \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ 使得

$$\begin{cases} \lambda_1 \nabla f_1(x^*) + \lambda_2 \theta + \nabla g(x^*)\alpha + \nabla h(x^*)\beta - \nabla G(x^*)\mu - \nabla H(x^*)\nu = 0, \\ \alpha \geq 0, \quad g(x^*)^\top \alpha = 0, \\ \mu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{+0}^*, \quad \nu_i = 0 \quad i \in \mathcal{I}_{0+}^* \end{cases}$$

且 $\mu_i \nu_i \geq 0, i \in \mathcal{I}_{00}^*$. 由 $\lambda \in \Lambda^+$ 可知条件 (3.3) 成立. 因此, 由定义 3.2(2) 可知 x^* 是多目标均衡约束规划问题 (3.1) 的 Pareto C- 稳定点. 该定理得证. $\square$

4 松弛问题的隐光滑性及收敛性

类似于问题 (3.8), 对于多目标均衡约束规划问题 (2.4), 我们将 Scholtes 松弛方法应用于该问题得到下述多目标规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i, \|z\|_1 \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in J, \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq q_i z_i, \quad \forall i \in I, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \\ & z_i \geq 0, \quad 1 - z_i \geq 0, \quad z_i(1 - z_i) \leq t, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{4.1}$$

对于多目标非线性规划问题 (4.1), 我们用线性加权标量化方法求解该问题, 即对于给定的 $\lambda \in \Lambda^+$, 通过求解下述非线性规划问题 (4.2) 得到多目标问题 (4.1) 的解:

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \lambda_1 \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i \right) + \lambda_2 \sum_{i \in I} |z_i| \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, \quad \forall j \in J, \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq q_i z_i, \quad \forall i \in I, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \\ & z_i \geq 0, \quad 1 - z_i \geq 0, \quad z_i(1 - z_i) \leq t, \quad \forall i \in I. \end{aligned} \tag{4.2}$$

观察上述非线性规划问题, 我们发现, 目标函数 $\sum_{i \in I} |z_i|$ 是非光滑的, 这也为求解该问题带来了困难. 约束条件中有 $z \geq 0$ 这个非负约束, 使得目标函数 $\sum_{i \in I} |z_i|$ 在约束区域的内部是光滑的, 我们称这种光滑性为隐光滑性. 我们可以通过调用每次都在可行点处迭代的算法 (可行方向法、积极集方法、内点法) 求解问题 (4.2), 从而无需对 $\sum_{i \in I} |z_i|$ 作任何转换.

根据定理 3.1 和命题 2.1 容易得到下述结论.

定理 4.1 对于 $t > 0$, 令 (x_t, z_t) 为多目标非线性规划问题 (4.1) 的弱 Pareto 最优解, 进一步令 $t \downarrow 0$ 且假设 (x^*, z^*) 是 $\{(x_t, z_t)\}$ 的任一聚点. 则 (x^*, z^*) 是多目标混合整数规划问题 (2.2) 的弱 Pareto 最优解.

基于上述定理、引理 3.1(1) 和命题 2.1, 容易得到下述推论.

推论 4.1 对于固定的 $\lambda \in \Lambda^+$, 令 (x_t, z_t) 为非线性规划问题 (4.2) 的最优解, 进一步令 $t \downarrow 0$ 且假设 (x^*, z^*) 是 $\{(x_t, z_t)\}$ 的任一聚点. 则 (x^*, z^*) 是多目标混合整数规划问题 (2.2) 的弱 Pareto 最优解.

为了叙述方便, 令 $\mathcal{F}(t)$ 表示多目标非线性规划问题 (4.1) 的约束域, 则 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(0)$ 表示多目标均衡约束规划问题 (2.4) 的约束域. 定义

$$\bar{Y} := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y = \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i, \|z\|_1 \right)^\top, x \in \mathcal{F} \right\}.$$

类似于 (3.9) 和 (3.10) 定义 $\text{WMin}\bar{Y}$ 和 $\text{Min}\bar{Y}$. 根据定理 3.2 和命题 2.1, 容易得到下述结论.

定理 4.2 对于 $t > 0$, 令 (x_t, z_t) 为多目标非线性规划问题 (4.1) 的 Pareto 最优解, 令 $t \downarrow 0$ 且假设 (x^*, z^*) 是 $\{(x_t, z_t)\}$ 的任一聚点, 进一步假设 $\text{WMin}\bar{Y} = \text{Min}\bar{Y}$. 则 (x^*, z^*) 是多目标混合整数规划问题 (2.2) 的 Pareto 最优解.

基于上述定理、引理 3.1(2) 和命题 2.1, 容易得到下述推论.

推论 4.2 对于固定的 $0 < \lambda \in \Lambda^+$, 令 (x_t, z_t) 为非线性规划问题 (4.2) 的最优解, 令 $t \downarrow 0$ 且假设 (x^*, z^*) 是 $\{(x_t, z_t)\}$ 的任一聚点, 进一步假设 $\text{WMin}\bar{Y} = \text{Min}\bar{Y}$. 则 (x^*, z^*) 是多目标混合整数规划问题 (2.2) 的 Pareto 最优解.

根据定理 3.3, 可得到下述关于子问题 (4.2) 的收敛性.

定理 4.3 对于固定的 $\lambda \in \Lambda^+$, 令 $\{t\} \downarrow 0$, (x_t, z_t) 为标量化问题 (4.2) 的 KKT 点. 假设 (x^*, z^*) 是 $\{(x_t, z_t)\}$ 的聚点且 MPEC-MFCQ 在点 (x^*, z^*) 处满足, 则 (x^*, z^*) 是多目标均衡约束规划问题 (2.4) 的 Pareto C- 稳定点.

5 数值实验

本节应用所提出的松弛模型 (4.2) 求解多目标稀疏选址问题 (2.2). 所有的计算程序均用 MATLAB R2020b 编写且在 HP 台式电脑上运行 (3.6GHz, 16GB 内存). 松弛问题 (4.2) 用非线性规划求解器 KNITRO 中的积极集方法求解. 为方便起见, 称这个方法为“标量松弛化”. 显然, 模型 (2.2) 为多目标混合整数规划模型, 也可对其加权标量化, 然后调用混合整数规划求解器求解其标量化问题, 为简单起见称这个方法为“混合整数规划”. 在下面的对比实验中, 用 Gurobi 求解标量化子问题.

本节的主要任务是验证多目标稀疏设施选址模型 (2.2) 的有效性. 测试例子集合是根据 Cornuéjols 等 [5] 提出的方法生成, 该测试集合近年来被研究者广泛使用 [9, 17, 24]. 我们选用的测试例子中用户规模的变化范围为 100 至 500, 候选地址规模的变化范围为 100 至 200. 这些测试例子的生成方式如下.

- 候选地址和用户地址通过在由二维单位区域上的均匀分布生成. 我们将任意两点之间的 Euclid 距离的 10 倍作为单位运输成本 (c_{ij}).

- 用户需求 (d_i) 由均匀分布 $U[5, 35]$ 产生, 设施容量 (q_i) 由均匀分布 $U[10, 160]$ 产生. 设施的建设成本由随机变量 $F_i = U[0, 90] + U[100, 110]\sqrt{q_i}$ 生成.

在算法实现过程中, 设置 $t = 10^{-12}$. 为了展示本文的松弛方法可以得到原混合整数规划问题的整数解, 我们先用上述测试例子生成方法生成了 60 个用户、40 个候选地址的例子. 取多组权重 λ , 然后求解标量化问题 (4.2) (即松弛标量化方法), 结果见表 2. 该表显示, 对于选址问题, 本文提出的连续松弛方法可以很好地得到整数解.

表 2 规模为 60 * 40 时的求解结果

节点数	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0.9$	$\lambda_2 = 0.93$	$\lambda_2 = 0.97$	$\lambda_2 = 0.994$	$\lambda_2 = 0.998$	$\lambda_2 = 0.999$
	z	z	z	z	z	z	z
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	0
9	1	1	1	1	1	1	1
10	0.9882	1	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1
16	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0
18	1	1	1	1	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0
24	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1
26	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0
31	1	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1
33	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0
36	1	1	1	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0

(续表)

节点数	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0.9$	$\lambda_2 = 0.93$	$\lambda_2 = 0.97$	$\lambda_2 = 0.994$	$\lambda_2 = 0.998$	$\lambda_2 = 0.999$
	z	z	z	z	z	z	z
38	1	1	0	0	0	0	0
39	1	1	1	1	1	1	1
40	0	0	0	0	0	0	0
$\ z\ _0$	21	21	20	19	18	17	16

利用上述测试例子生成方法, 我们生成了用户数和候选地址数分别为 100×100 , 200×100 , 200×200 , 300×200 , 400×200 和 500×200 的例子. 取不同的权重, 并分别用松弛标量化方法和混合整数规划方法求解这些问题, 结果见图 2-4. 图 2 和 3 的横坐标表示解中向量 z 的非零分量个数 ($\|z\|_0$), 纵坐标表示目标函数

$$F(x, z) := \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} F_i z_i$$

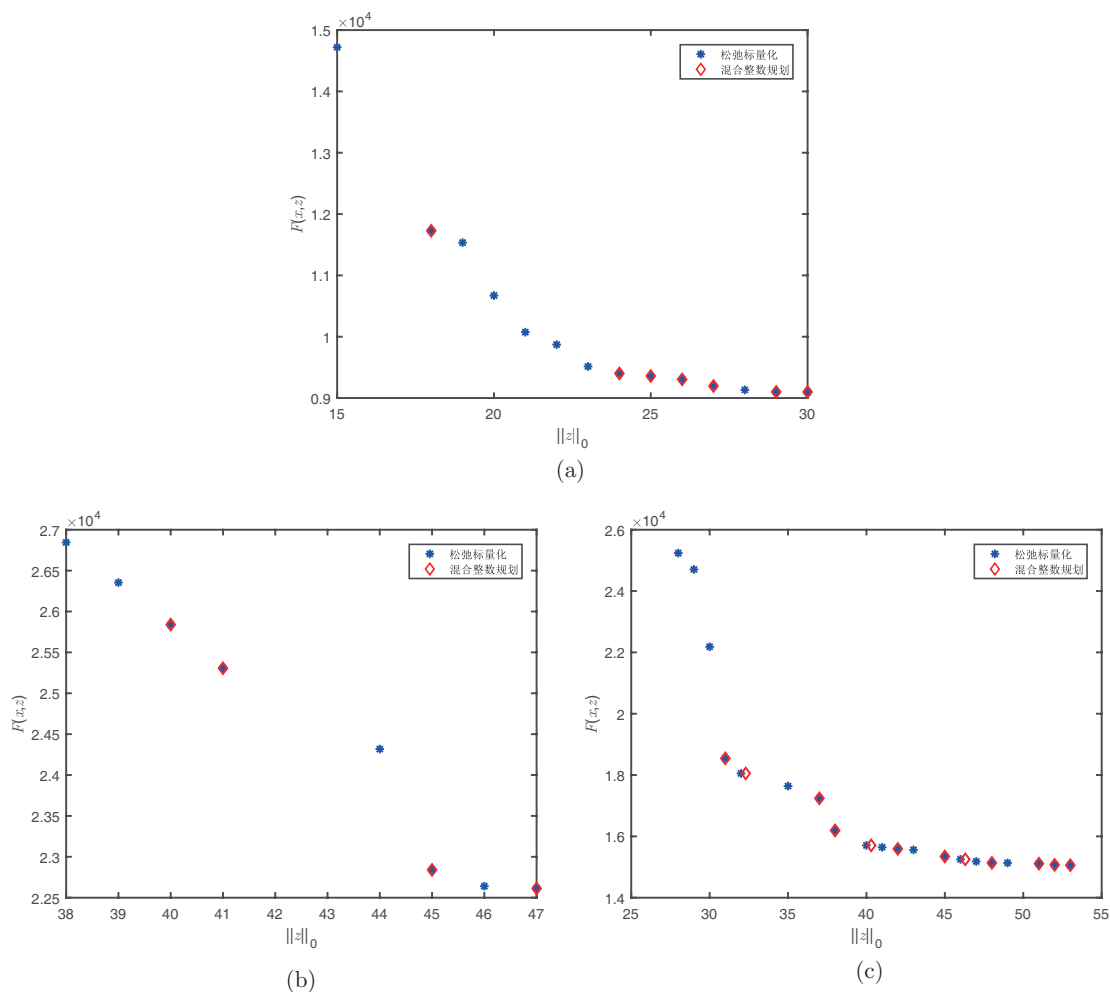


图 2 (网络版彩图) 解的前沿面. (a) 100×100 ; (b) 200×100 ; (c) 200×200

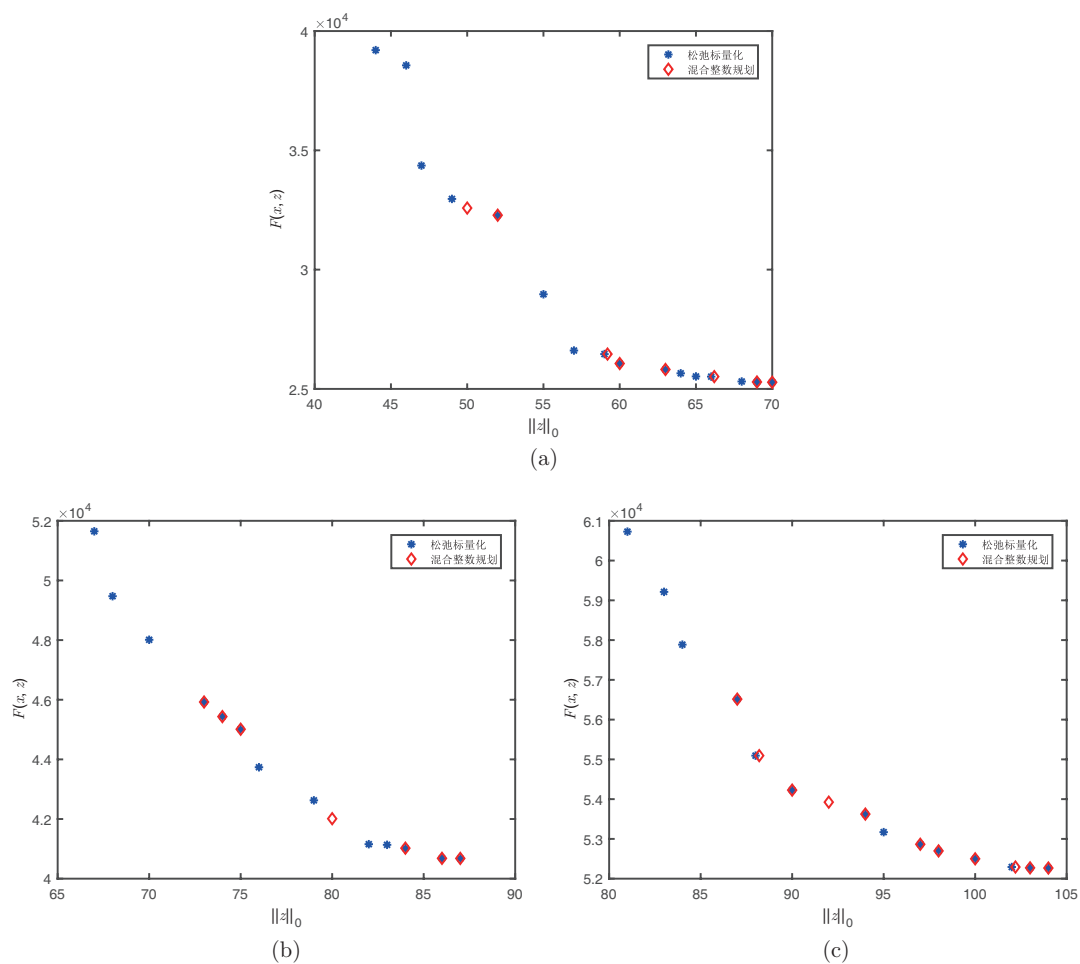


图 3 (网络版彩图) 解的前沿面. (a) 300×200 ; (b) 400×200 ; (c) 500×200

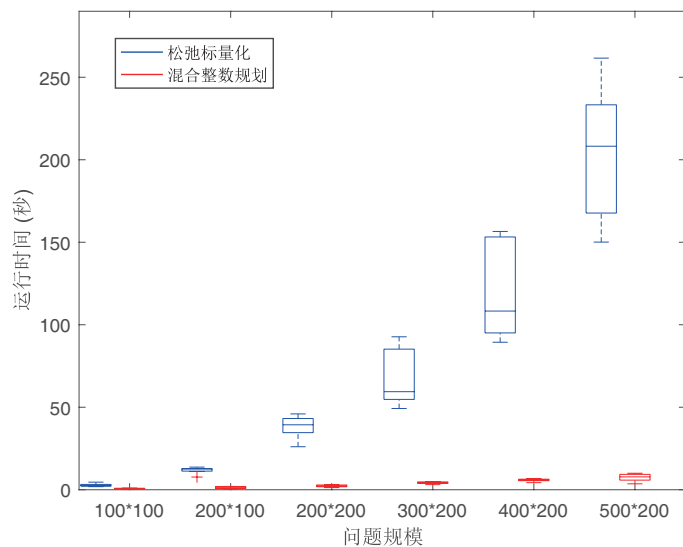


图 4 (网络版彩图) 问题 (4.2) 的求解时间

的值. 图 2 和 3 的 6 幅子图中最右边的点即为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ 时标量化问题 (4.2) 的解. 此时标量化问题 (4.2) 退化为传统的设施选址模型. 分析数据后, 我们发现, 本文的多目标稀疏设施选址模型需要建立的设施数量与传统设施选址模型相比平均减少了 33%. 观察图 2 和 3 中蓝色星号数据和红色方框数据, 可知标量松弛化方法可以更好地得到多目标问题的 Pareto 前沿面, 且可以得到更稀疏的解. 图 4 展示了各个测试例子的运算时间. 可以看到, 因为混合整数规划方法是将标量化问题直接当作混合整数线性规划模型处理, 所以求解时间要优于松弛标量化方法. 即便如此, 对于用户数量为 500、候选地址数量为 200 的规模较大的问题 (变量个数为 100,200), 本文的松弛标量化方法也可以在 200 秒左右得到整数解.

6 结论

本文通过增加稀疏导出项为目标函数, 提出了多目标稀疏设施选址模型. 该模型为多目标混合整数规划模型, 求解难度较大. 建立多目标模型的另外一个初衷是多目标模型可提供足够多的有效解, 从而为决策者提供足够多的备选方案. 不同于混合整数规划的常用求解方法, 本文利用 0-1 变量与均衡约束的等价性将多目标混合整数规划模型松弛为连续的多目标规划模型. 数值实验表明, 对于稀疏设施选址问题和传统的设施选址问题, 本文所提出的松弛方法均可以很好地得到整数解. 我们应用线性加权的方法求解非线性多目标规划子问题, 数值结果表明即使对于有 10 万多个决策变量的问题, 也可以在 200 秒左右被本文的算法求解, 其效率远远高于现有的多目标进化算法.

致谢 感谢审稿人提出的建设性意见.

参考文献

- 1 Aboolian R, Cui T, Shen Z J M. An efficient approach for solving reliable facility location models. *INFORMS J Comput*, 2013, 25: 720–729
- 2 Akinc U, Khumawala B M. An efficient branch and bound algorithm for the capacitated warehouse location problem. *Manage Sci*, 1977, 23: 585–594
- 3 Bigotte J F, Krass D, Antunes A P, et al. Integrated modeling of urban hierarchy and transportation network planning. *Transp Res Part A-Policy Pract*, 2010, 44: 506–522
- 4 Contreras I, Cordeau J F, Laporte G. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Oper Res*, 2011, 59: 1477–1490
- 5 Cornuéjols G, Sridharan R, Thizy J M. A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem. *European J Oper Res*, 1991, 50: 280–297
- 6 Ehrgott M. Multicriteria Optimization. International Series in Operations Research & Management Science, vol. 78. Berlin-Heidelberg: Springer, 2005
- 7 Fischetti M, Ljubić I, Sinnl M. Redesigning Benders decomposition for large-scale facility location. *Manage Sci*, 2017, 63: 2146–2162
- 8 Fletcher R, Leyffer S, Ralph D, et al. Local convergence of SQP methods for mathematical programs with equilibrium constraints. *SIAM J Optim*, 2006, 17: 259–286
- 9 Görtz S, Klose A. A simple but usually fast branch-and-bound algorithm for the capacitated facility location problem. *INFORMS J Comput*, 2012, 24: 597–610
- 10 Guo L, Deng Z. A new augmented Lagrangian method for MPCCs—theoretical and numerical comparison with existing augmented Lagrangian methods. *Math Oper Res*, 2022, 47: 1229–1246
- 11 Guo L, Lin G H. Notes on some constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints. *J Optim Theory Appl*, 2013, 156: 600–616
- 12 Guo P, Cheng W, Wang Y. Hybrid evolutionary algorithm with extreme machine learning fitness function evaluation for two-stage capacitated facility location problems. *Expert Syst Appl*, 2017, 71: 57–68

- 13 Hodgson M J, Rosing K E. A network location-allocation model trading off flow capturing and p -median objectives. [Ann Oper Res](#), 1992, 40: 247–260
- 14 Hoheisel T, Kanzow C, Schwartz A. Theoretical and numerical comparison of relaxation methods for mathematical programs with complementarity constraints. [Math Program](#), 2013, 137: 257–288
- 15 Izmailov A F, Solodov M V, Uskov E I. Global convergence of augmented Lagrangian methods applied to optimization problems with degenerate constraints, including problems with complementarity constraints. [SIAM J Optim](#), 2012, 22: 1579–1606
- 16 Kanzow C, Schwartz A. The price of inexactness: Convergence properties of relaxation methods for mathematical programs with complementarity constraints revisited. [Math Oper Res](#), 2015, 40: 253–275
- 17 Klose A, Görtz S. A branch-and-price algorithm for the capacitated facility location problem. [European J Oper Res](#), 2007, 179: 1109–1125
- 18 Kochman G A, McCallum C J Jr. Facility location models for planning a transatlantic communications network. [European J Oper Res](#), 1981, 6: 205–211
- 19 Kuehn A A, Hamburger M J. A heuristic program for locating warehouses. [Manage Sci](#), 1963, 9: 643–666
- 20 Liang L Y, Thompson R G, Young D M. Optimising the design of sewer networks using genetic algorithms and tabu search. [Eng Constr Archit Manag](#), 2004, 11: 101–112
- 21 Lin G H, Zhang D, Liang Y C. Stochastic multiobjective problems with complementarity constraints and applications in healthcare management. [European J Oper Res](#), 2013, 226: 461–470
- 22 Mordukhovich B S. Multiobjective optimization problems with equilibrium constraints. [Math Program](#), 2009, 117: 331–354
- 23 Pochet Y, Wolsey L A. Lot-size models with backlogging: Strong reformulations and cutting planes. [Math Program](#), 1988, 40: 317–335
- 24 Rahmani A, MirHassani S A. A hybrid firefly-genetic algorithm for the capacitated facility location problem. [Inform Sci](#), 2014, 283: 70–78
- 25 Ravi R, Sinha A. Approximation algorithms for problems combining facility location and network design. [Oper Res](#), 2006, 54: 73–81
- 26 Resende M G C, Werneck R F. A hybrid multistart heuristic for the uncapacitated facility location problem. [European J Oper Res](#), 2006, 174: 54–68
- 27 Scholtes S. Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints. [SIAM J Optim](#), 2001, 11: 918–936
- 28 Senne E L F, Lorena L A N, Pereira M A. A branch-and-price approach to p -median location problems. [Comput Oper Res](#), 2005, 32: 1655–1664
- 29 Sherali H D, Smith E P. A global optimization approach to a water distribution network design problem. [J Global Optim](#), 1997, 11: 107–132
- 30 Weber A. Alfred Weber's Theory of the Location of Industries. Chicago: University of Chicago Press, 1929
- 31 Wentges P. Accelerating Benders' decomposition for the capacitated facility location problem. [Math Methods Oper Res](#), 1996, 44: 267–290
- 32 Wu C C, Du D L, Xu D C. An improved per-scenario bound for the two-stage stochastic facility location problem. [Sci China Math](#), 2015, 58: 213–220
- 33 Yan T. A new smoothing scheme for mathematical programs with complementarity constraints. [Sci China Math](#), 2010, 53: 1885–1894
- 34 Zhang D M, Li M, Xu D C, et al. A survey on theory and algorithms for k -means problems (in Chinese). [Sci Sin Math](#), 2020, 50: 1387–1404 [张冬梅, 李敏, 徐大川, 张真宁. k -均值问题的理论与算法综述. 中国科学: 数学, 2020, 50: 1387–1404]
- 35 Zhang J, Chen B, Ye Y. A multiexchange local search algorithm for the capacitated facility location problem. [Math Oper Res](#), 2005, 30: 389–403
- 36 Zhang P, Zhang J, Lin G H, et al. Constraint qualifications and proper Pareto optimality conditions for multiobjective problems with equilibrium constraints. [J Optim Theory Appl](#), 2018, 176: 763–782

The multiobjective sparse facility location problem

Gaoxi Li, Yi Ren & Yibing Lyu

Abstract Facility network designers sometimes aim to minimize the number of facilities that provide adequate services to all users, even at the expense of increasing the total cost. To achieve this goal, we propose a multi-objective sparse facility location model. The objective function of this model includes a sparsity-inducing term, making it a challenging mixed-integer multi-objective programming model to solve. Unlike conventional approaches for solving mixed-integer programming problems, we relax the mixed-integer multi-objective programming model into a continuous, implicitly smooth, nonlinear multi-objective programming model, which can be solved by standard algorithms. Furthermore, the convergence of the solutions for the relaxed model is also discussed in this paper. Numerical experiments demonstrate that this continuous relaxation approach can effectively obtain integer solutions for the multi-objective sparse facility location model.

Keywords multi-objective programming, facility location, mixed integer programming

MSC(2020) 90C29, 90B85, 90C11

doi: 10.1360/SSM-2023-0199