第 47 卷 第 4 期
2008 年 7 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 47 No. 4
Jul. 2008

一类量子环面李代数的导子代数

郑 兆 娟*
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 记 $\tilde{A}= C_q[x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}]$ 为复数域上的非交换环面结合代数($q\neq0$ 为非单位根), $A = \tilde{A}\setminus C$, Der $\tilde{A}$ 为 $\tilde{A}$ 的导子李代数. 本文利用导子的定义和李代数自身的李运算研究了李代数 $L_q=$ Der $\tilde{A}\oplus A$ 的导子代数 DerL_q 的结构, 指出 Der$L_q=$ ad$L_q \oplus \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus p_1 \oplus p_2$, 其中 ad$L_q$ 为 L_q 的内导子, δ_1, δ_2 为 L_q 的度导子, p_1, p_2 满足 $p_i(E(m)) = m_i x^m, p_i(x^m) = m_i x^m, i = 1, 2$.

关键词: 李代数; 量子环面; 导子代数
中图分类号: O 152.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0438-0479(2008)04-0461-03

1 背景介绍

设 $0 \neq q \in C$, 且 q 为非单位根, 即对任意的自然数 n, $q^n \neq 1$. $C_q[x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}]$ 为复数域上非交换环面结合代数, 满足 $x_2x_1 = qx_1x_2$. 这个环面通常被称为量子环面. 众所周知, 这是一个单环[1]. Kirkam 等人在研究量子环面结构时给出了两个变量的 Laurant 多项式环上的导子结构并指出它的内导子构成一个单李代数, 称之为 Virasoro 代数的 q- 类似[2], 文献[3-4] 分别研究了结合代数 $C_q[x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}]$ 的导子李代数及 Virasoro-like 代数的导子李代数的自同构群. 本文中, 记 $\tilde{A}= C_q[x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}]$, $A = \tilde{A}\setminus C$. 文献[3] 证明了结合代数 $\tilde{A}$ 的导子李代数 Der $\tilde{A}= \{d_1, d_2\} \oplus(\bigoplus_{m\in Z^2\setminus\{0\}} \mathrm{ad}x^m)$. 本文研究的是李代数 $L_q=$ Der $\tilde{A}\oplus A$ (李运算由式(0)给出) 的导子代数DerL_q, 指出 Der$L_q=$ ad$L_q \oplus \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus p_1 \oplus p_2$, 其中 ad$L_q$ 为 L_q 的内导子, δ_1, δ_2 为度导子, p_1, p_2 满足 $p_i(E(m)) = m_i x^m, p_i(x^m) = m_i x^m, i = 1, 2$(定理 1).

记 $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), \Gamma= Ze_1 + Ze_2, \Gamma^* = \Gamma\setminus\{0\}$. 对于 $m = m_1e_1 + m_2e_2, n = n_1e_1 + n_2e_2 \in \Gamma$. 令 $x^m = x^{m_1, m_2} = x_1^{m_1}x_2^{m_2} \in \tilde{A}$, $\tilde{A}$ 的 m 次内导子 adx^m 为 $E(m) = E(m_1, m_2)$, 则无穷维李代数 L_q 是由 x^m, $E(m), d_1, d_2, m \in \Gamma^*$ 张成的且李运算由以下等式给出:

$$\begin{cases}[E(m), E(n)] = g(m, n)E(m+n)\\ [x^m, x^n] = g(m, n)x^{m+n}\\ [E(m), x^n] = g(m, n)x^{m+n}\\ [d_i, E(m)] = -[E(m), d_i] = m_iE(m)\\ [d_i, x^m] = -[x^m, d_i] = m_ix^m\\ [d_1, d_2] = -[d_2, d_1] = 0\end{cases} \tag{0}$$

其中 $i = 1, 2$. $g(m, n) = q^{m_2n_1} - q^{m_1n_2}$. 本文中 $C^* = C\setminus\{0\}$, Z 为整数全体.

关于量子环面 C_q 的导子代数读者可参阅文献[5-6] 等.

2 导子代数

引理 1[7] 设 G 是一个交换群, 若 $L = \bigoplus_{m\in G} L_m$ 是一个有限生成的 G- 分次李代数, 则 $\mathrm{Der}(L) = \bigoplus_{m\in G}\mathrm{Der}(L)_m$ 也是 G- 分次李代数. 事实上, $\mathrm{Der}(L) = \bigoplus_{m\in G}\mathrm{Der}(L)_m$, 其中 $\mathrm{Der}(L)_m = \{d \in \mathrm{Der}(L) \mid d(L_n) \subset L_{m+n}, \forall n \in G\}$.

定理 1 Der$L_q=$ ad$L_q \oplus \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus p_1 \oplus p_2$, 其中 ad$L_q$ 为 L_q 的内导子, δ_1, δ_2 为度导子, p_1, p_2 满足 $p_i(E(m)) = m_ix^m, p_i(x^m) = m_ix^m, p_i(d_j) = 0, i, j = 1, 2$.

由引理 1 可设 $\mathrm{Der}(L_q) = \bigoplus_{r\in\Gamma}\mathrm{Der}(L_q)_r$. 对于固定的 $d_r \in \mathrm{Der}(L_q)_r$, 设

$$d_r(x^m) = \phi_1(r, m)x^{m+r} + \phi_2(r, m)E(m+r) + \phi_3(r, m)d_1 + \phi_4(r, m)d_2 \tag{1}$$

$$d_r(E(m)) = \varphi_1(r, m)x^{m+r} + \varphi_2(r, m)E(m+r) + \varphi_3(r, m)d_1 + \varphi_4(r, m)d_2 \tag{2}$$

$$d_r(d_1) = f_1(r, 0)x^r + f_2(r, 0)E(r) + f_3(r, 0)d_1 + f_4(r, 0)d_2 \tag{3}$$

收稿日期: 2007-12-03
基金项目: 国家自然科学基金(10371100)资助
* 现在漳州师范学院工作
E-mail: zzjedh@163.com

$$d_r(d_2) = g_1(r,0)x^r + g_2(r,0)E(r) + g_3(r,0)d_1 + g_4(r,0)d_2 \tag{4}$$

其中 $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,f_1,f_2,f_3,f_4,g_1,g_2,g_3,g_4$ 是从 Γ 到 C 的映射. 这样只需计算这 16 个映射. 为了表述的简便, 设 $\phi_1(r,-r)=0$, $\phi_2(r,-r)=0$, $\varphi_1(r,-r)=0$, $\varphi_2(r,-r)=0$, $f_i(0,0)=0$, $g_i(0,0)=0$, $i=1,2,3,4$. 将定理1的证明分成以下几个引理.

引理 2 $\phi_2(r,m)=\phi_3(r,m)=\phi_4(r,m)=0$, $\varphi_3(r,m)=\varphi_4(r,m)=0$, $\forall r\in\Gamma$, $\forall m\in\Gamma^*$.

证明 由李括号

$$[x^m,E(n)] = g(m,n)x^{m+n} = [x^m,x^n],$$

$$[E(m),E(n)] = g(m,n)E(m+n),$$

及导子的定义: 对于 $a,b\in L_q$, $d_r[a,b]=[d_r(a),b]+[a,d_r(b)]$, 从式(1)、(2) 可以得到

$$g(m,n)\phi_2(r,m+n) = 0 \tag{5}$$

$$g(m,n)\phi_2(r,m+n) = g(m+r,n)\phi_2(r,m) \tag{6}$$

$$g(m,n)\phi_3(r,m+n) = g(m,n)\phi_4(r,m+n) \tag{7}$$

$$g(m,n)\varphi_3(r,m+n) = g(m,n)\varphi_4(r,m+n) \tag{8}$$

由式(5)、(6) 得 $g(m+r,n)\phi_2(r,m)=0$, $\forall m,n\in\Gamma^*$. 进一步, 若 $m+r\neq 0$, 选取 $n\in\Gamma^*$, 满足 $g(m+r,n)\neq 0$, 则 $\phi_2(r,m)=0$, 即可得到 $\phi_2(r,m)=0$, $\forall r\in\Gamma$, $\forall m\in\Gamma^*$.

由式(7)、(8) 及 $\forall m,n\in\Gamma^*$ 得 $\phi_3(r,m)=\phi_4(r,m)=\varphi_3(r,m)=\varphi_4(r,m)=0$.

由李括号

$$[x^m,E(n)] = g(m,n)x^{m+n} = [x^m,x^n],$$

$$[E(m),E(n)] = g(m,n)E(m+n),$$

及导子的定义, 从式(1)、(2) 还可以得到:

$$g(m,n)\phi_1(r,m+n) = g(m+r,n)\phi_1(r,m) + g(m,n+r)\phi_1(r,n) \tag{9}$$

$$g(m,n)\phi_1(r,m+n) = g(m+r,n)\phi_1(r,m) + g(m,n+r)(\varphi_1(r,n)+\varphi_2(r,n)) \tag{10}$$

$$g(m,n)\varphi_1(r,m+n) = g(m+r,n)\varphi_1(r,m) + g(m,n+r)\varphi_1(r,n) \tag{11}$$

$$g(m,n)\varphi_2(r,m+n) = g(m+r,n)\varphi_2(r,m) + g(m,n+r)\varphi_2(r,n) \tag{12}$$

接下来证明分两种情形. 首先对于 $r=0$, 由引理2及式(9) ~ (12) 得

$$g(m,n)(\phi_1(0,m+n)-\phi_1(0,m)-\phi_1(0,n)) = 0 \tag{13}$$

$$g(m,n)(\phi_1(0,m+n)-\phi_1(0,m)-\varphi_1(0,n)-\varphi_2(0,n)) = 0 \tag{14}$$

$$g(m,n)(\varphi_1(0,m+n)-\varphi_1(0,m)-\varphi_1(0,n)) = 0 \tag{15}$$

$$g(m,n)(\varphi_2(0,m+n)-\varphi_2(0,m)-\varphi_2(0,n)) = 0 \tag{16}$$

引理 3

$$\varphi_1(0,k_1e_1+k_2e_2) = k_1\varphi_1(0,e_1)+k_2\varphi_1(0,e_2),$$

$$\varphi_2(0,k_1e_1+k_2e_2) = k_1\varphi_2(0,e_1)+k_2\varphi_2(0,e_2),$$

$$\phi_1(0,k_1e_1+k_2e_2) = k_1(\varphi_1(0,e_1)+\varphi_2(0,e_1)) + k_2(\varphi_1(0,e_2)+\varphi_2(0,e_2)).$$

证明 对 $k\in Z$, 取 $m=e_1$, $n=ke_2$, 及 $m=e_1+ke_2$, $n=-ke_2$, 由式(15) 得

$$\varphi_1(0,e_1+ke_2) = \varphi_1(0,e_1)+\varphi_1(0,ke_2) \tag{17}$$

$$\varphi_1(0,e_1) = \varphi_1(0,e_1+ke_2)+\varphi_1(0,-ke_2) \tag{18}$$

解式(17) 及(18), 得到 $\varphi_1(0,ke_2)=-\varphi_1(0,-ke_2)$. 进一步, 取 $m=e_1+ke_2$, $n=\pm e_2$, 由式(15) 得

$$\varphi_1(0,e_1+(k\pm1)e_2) = \varphi_1(0,e_1+ke_2) + \varphi_1(0,\pm e_2) \tag{19}$$

由式(17)、(18) 及(19), 得

$$\varphi_1(0,ke_2)\pm\varphi_1(0,e_2) = \varphi_1(0,(k\pm1)e_2).$$

对 $k\in Z$ 做归纳, 得到

$$\varphi_1(0,ke_2) = k\varphi_1(0,e_2).$$

同理可得

$$\varphi_1(0,ke_1) = k\varphi_1(0,e_1),$$

若 $k_1k_2\neq 0$, 则 $g(k_1e_1,k_2e_2)\neq 0$, 由式(15) 得,

$$\varphi_1(0,k_1e_1+k_2e_2) = \varphi_1(0,k_1e_1)+\varphi_1(0,k_2e_2) = k_1\varphi_1(0,e_1)+k_2\varphi_1(0,e_2).$$

同理可得

$$\varphi_2(0,k_1e_1+k_2e_2) = k_1\varphi_2(0,e_1)+k_2\varphi_2(0,e_2).$$

最后, 对 $\forall n\in\Gamma^*$, 存在 $m\in\Gamma^*$ 使得 $g(m,n)\neq 0$, 则由式(13)、(14) 得

$$\phi_1(0,k_1e_1+k_2e_2) = k_1(\varphi_1(0,e_1)+\varphi_2(0,e_1)) + k_2(\varphi_1(0,e_2)+\varphi_2(0,e_2)).$$

引理 4 $\mathrm{Der}(L_q)_0 = C\delta_1\oplus C\delta_2\oplus Cp_1\oplus Cp_2$, 其中 δ_1,δ_2 为 L_q 的度导子, p_1,p_2 满足 $p_i(E(m))=m_ix^m$, $p_i(x^m)=m_ix^m$, $p_i(d_j)=0$, $i,j=1,2$.

证明 由引理2, 引理3 得到 $\dim\mathrm{Der}(L_q)_0\leqslant 4$. 设 δ_1,δ_2,p_1 及 p_2 是 L_q 上的线性映射, 满足 $\delta_1(E(m))=m_1E(m)$, $\delta_1(x^m)=m_1x^m$; $\delta_2(E(m))=m_2E(m)$, $\delta_2(x^m)=m_2x^m$. $p_1(E(m))=m_1x^m$, $p_1(x^m)=m_1x^m$; $p_2(E(m))=m_2x^m$, $p_2(x^m)=m_2x^m$, $p_1(d_1)=0$, $p_1(d_2)=0$, $p_2(d_1)=0$, $p_2(d_2)=0$. 容易证明 δ_1,δ_2,p_1 及 p_2 线性无关且都属于 $\mathrm{Der}(L_q)_0$, 所以 $\dim\mathrm{Der}(L_q)_0=4$, 且

$$\mathrm{Der}(L_q)_0 = C\delta_1\oplus C\delta_2\oplus Cp_1\oplus Cp_2.$$

接下来考虑 $r\neq 0$ 的情形.

引理 5 $f_3(r,0)=f_4(r,0)=g_3(r,0)=g_4(r,0)=0$.

证明 由李括号 $[d_i,E(m)]=-[E(m),d_i]=$

$m_iE(m)$, $i=1,2$, 及导子的定义可得

$$m_1f_3(r,0)+m_2f_4(r,0)=0,$$
$$m_1g_3(r,0)+m_2g_4(r,0)=0,$$

由 m 的任意性得 $f_3(r,0)=f_4(r,0)=g_3(r,0)=g_4(r,0)=0$.

引理 6　若 $r\neq 0$, 则 $d_r\in \mathrm{ad}(L_q)$.

证明　不失一般性, 假设 $r_1\neq 0$. 取 $m=e_2$, $n=m_2e_2$, 由式(11) 得

$$\varphi_1(r,m_2e_2)=\frac{q^{r_1m_2}-1}{q^{r_1}-1}\varphi_1(r,e_2) \tag{20}$$

取 $m=m_1e_1$, $n=e_2$, 由式(11) 得

$$(1-q^{m_1})\varphi_1(r,m_1e_1+e_2)=(1-q^{m_1+r_1})\times \varphi_1(r,m_1e_1)+(1-q^{m_1(1+r_2)})\varphi_1(r,e_2) \tag{21}$$

取 $m=m_1e_1+e_2$, $n=-e_2$, 由式(11) 得

$$(1-q^{-m_1})\varphi_1(r,m_1e_1)=(1-q^{-m_1-r_1})\times \varphi_1(r,m_1e_1+e_2)+(q^{r_1}-q^{m_1(r_2-1)})\varphi_1(r,-e_2) \tag{22}$$

由式(20) 得 $\varphi_1(r,-e_2)=-q^{-r_1}\varphi_1(r,e_2)$. 将式(20)、(21) 代入(22) 就得到

$$\varphi_1(r,m_1e_1)=\frac{q^{m_1r_2}-1}{1-q^{r_1}}\varphi_1(r,e_2) \tag{23}$$

取 $m=m_1e_1$, $n=m_2e_2$, 由式(11) 得

$$(1-q^{m_1m_2})\varphi_1(r,m)=(1-q^{m_2(m_1+r_1)})\varphi_1(r,m_1e_1)+(1-q^{m_1(m_2+r_2)})\varphi_1(r,m_2e_2) \tag{24}$$

将式(20) 及(23) 代入 (24) 就得到

$$\varphi_1(r,m)=\frac{q^{m_1r_2}-q^{m_2r_1}}{1-q^{r_1}}\varphi_1(r,e_2) \tag{25}$$

类似的证明, 得到

$$\varphi_2(r,m)=\frac{q^{m_1r_2}-q^{m_2r_1}}{1-q^{r_1}}\varphi_2(r,e_2) \tag{26}$$

将式(25) 及(26) 代入(10) 得到

$$g(m,r+n)\phi_1(r,n)=g(m,r+n)\times \frac{q^{n_1r_2}-q^{n_2r_1}}{1-q^{r_1}}(\varphi_1(r,e_2)+\varphi_2(r,e_2)) \tag{27}$$

在式(27) 中对换 m,n, 且选取 $n\in\Gamma^*$ 满足 $g(n,r+m)\neq 0$, 则

$$\phi_1(r,m)=\frac{q^{m_1r_2}-q^{m_2r_1}}{1-q^{r_1}}(\varphi_1(r,e_2)+\varphi_2(r,e_2)).$$

又由李括号 $[d_i,E(m)]=-[E(m),d_i]=m_iE(m)$, $i=1,2$, 及导子的定义可得

$$g(m,r)f_1(r,0)=r_1\varphi_1(r,m),$$
$$g(m,r)f_2(r,0)=r_1\varphi_2(r,m),$$
$$g(m,r)g_1(r,0)=r_2\varphi_1(r,m),$$
$$g(m,r)g_2(r,0)=r_2\varphi_2(r,m).$$

因此 d_r 是由 $\varphi_1(r,e_2)$ 和 $\varphi_2(r,e_2)$ 所决定, 故 $\dim\mathrm{Der}(L_q)_r\leqslant 2$. 注意到 $\mathrm{ad}x^r$, $\mathrm{ad}E(r)$ 是 $\mathrm{Der}(L_q)_r$ 中线性独立的导子, 因此 $\dim\mathrm{Der}(L_q)_r=2$ 且有 $\mathrm{Der}(L_q)_r=\mathbb{C}\mathrm{ad}x^r\oplus\mathbb{C}\mathrm{ad}E(r)$. 这样便证明了本引理.

由引理 4 和引理 6 便得到定理 1 的证明.

参考文献:

[1] McConnell J C, Pettit J J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras [J]. J London Math Soc, 1988, 38: 47- 55.

[2] Kirkman E, Procesi C, Small L. A q-analog for the virasoro algebra [J]. Comm Algebra, 1994, 22: 3755- 3774.

[3] Jiang C, Meng D. The derivation algebra of the associative algebra $C_q[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ [J]. Comm in Algebra, 1998, 26: 1723- 1736.

[4] Jiang C, Meng D. The automorphism group of the derivation algebra of the virasoro-like algebra [J]. Advances in Math, 1998, 27: 175- 183.

[5] Xue M, Lin W, Tan S. Central extension and derivations and automorphism group for Lie algebras arising from 2-dimensional torus [J]. Journal of Lie Theory, 2006, 16 (1): 139- 153.

[6] Chen Y, Xue M, Lin W, et al. Structure and automorphism group of a class of derivation Lie algebras over quantum torus [J]. Chinese Algebra of Math, 2005, 26A(6): 1- 12.

[7] Farnsteiner R. Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algebra [J]. Journal of Algebra, 1998, 118(1): 34- 35.

The Derivations for a Lie Algebra over Quantum Torus

ZHENG Zhao-juan*

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Let $\widetilde{A}=C_q[x_1^{\pm1},x_2^{\pm1}]$ be the non-commutative torus over the complex field (where $q\neq 0$ is generic), and $A=\widetilde{A}\setminus C$, Der $\widetilde{A}$ be the Lie algebra of derivations over $\widetilde{A}$. Using the define of derivation and Lie bracket relations, the derivations $\mathrm{Der}L_q$ for the Lie algebra $L_q=\mathrm{Der}\,\widetilde{A}\oplus A$ is obtained. It is $\mathrm{Der}L_q=\mathrm{ad}L_q\oplus\delta_1\oplus\delta_2\oplus p_1\oplus p_2$, where $\mathrm{ad}L_q$ is the inner derivation of L_q, δ_1, δ_2 are degree derivations of L_q, p_1, p_2 satisfied $p_i(E(m))=m_ix^m$, $p_i(x^m)=m_ix^m$, $i=1,2$.

Key words: Lie algebra; quantum torus; the derivations