

文章编号: 1002-0268 (2007) 09-0001-05

部分二次二阶矩法在公路边坡可靠度分析中的应用

宋云连, 焦同战, 赵海芳

(内蒙古工业大学 建工学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要: 为研究边坡结构可靠性, 利用随机摄动理论和精度较高的部分二次二阶矩法 (PSOSM), 考虑边坡结构上主要随机变量 (如土性参数粘聚力 c 、摩擦系数 f 和重度 γ 等) 对结构可靠性的影响, 研究了各随机变量在相互独立和相关的情况下对公路边坡结构可靠性的影响, 并计算了结构的可靠指标 β 和 β 对这些随机因素的敏感度。结果表明: 当随机变量围绕各自均值向正、负方向波动时, 边坡可靠指标 β 对 c 正负方向变化的敏感性相同, 而 β 对 f 和 γ 负方向变化的敏感性更大, 说明 f 和 γ 围绕各自均值由减小方向变化时, 对结构可靠性影响更大。另外, 在考虑参数间互相独立和相关两种情况下, 同一随机参数对结构可靠指标 β 具有不同的影响结果。说明参数随机性在公路边坡结构可靠性分析中是不容忽视的。

关键词: 道路工程; 结构可靠度; 部分二次二阶矩法; 公路边坡结构; 敏感度

中图分类号: U416.1⁺4

文献标识码: A

Application of Part Second Order and Second Moment Method in Highway Slope Structural Reliability Analysis

SONG Yun-lian, JIAO Tong-zhan, ZHAO Hai-fang

(Institute of Architecture and Civil Engineering, Inner Mongolia University of Technology,
Inner Mongolia Huhhot 010051, China)

Abstract: The slope structural reliability is researched by using stochastic perturbation theory and Part Second Order and Second Moment (PSOSM) method, which is a probability method and has more calculation precision. The slope structural reliability index β is calculated, and the sensitivity of β to each random variable is also analyzed when the main random variables (such as cohesion c , friction coefficient f , unit weight γ) of slope structure are independent and correlative respectively. The calculating result shows that the sensitivity of slope structural reliability index β to c is same when c changes up and down around its mean value. On the basis of random variable mean value of f and γ , the sensitivity of β to f and γ is greater when the f and γ have negative direction change than they have positive direction change. In the other words, the slope structural reliability effect from f and γ to β is greater when f and γ reduce around those mean value. Furthermore, the β result affected by same random variable is different when all the variables are independent or correlative relation. In conclusion, the correlation among random variables of soil material can't be neglected when the highway slope structural reliability is researched.

Key words: road engineering; structure reliability; part second order and second moment method; highway slope structure; sensitivity

0 引言

公路边坡结构失稳每年都造成大量损失, 故国内外学者就其稳定性进行了大量的研究, 现已发展了两种主要研究理论: 确定性分析法 (如安全系数法) 和

非确定性分析法 (如概率分析法)。对于前者, 现已发展了许多很有价值的研究方法和结论。但由于滑坡的随机自然特性, 概率可靠性分析法作为一种适用的

收稿日期: 2006-04-17

基金项目: 留学回国人员科研启动基金 ([2006] 331 号); 内蒙古自然科学基金项目 (200408020708); 内蒙古工业大学重点项目 (ZD200416)

作者简介: 宋云连 (1972 -), 女, 内蒙古乌盟人, 教授, 研究方向为公路边坡、路基路面及结构可靠性. (syllsj @imut. edu. cn)

边坡分析方法也日益被重视起来,如文献[1~3]就针对该课题作了研究。文献[4]基于试验数据计算某边坡的安全系数 $K=1.58 \sim 1.95$,但建成5个月后就失效破坏,说明边坡结构随机特性的不容忽视性。文献[5]研究了边坡结构空间变异性对其稳定性的影响。随着计算机技术的大力发展,数值模拟方法在边坡可靠性分析中也得到了广泛应用。如文献[6]在试验基础上,利用随机模型和 Monte Carlo 数值模拟方法,研究了边坡稳定性分析中的材料空间随机性和强度变异性对边坡结构稳定性、失效特性等的影响。

国内外学者尽管在边坡结构研究方面作了大量的工作,但对于边坡结构在多个随机因素共同作用下更为精确的结构可靠度计算结果、以及该可靠度对各种随机影响因素的敏感度、边坡的失效机理及控制新方法等方面,尚有大量的理论和试验工作需要去做。文中将土性参数考虑成随机变量,利用精度较高的部分二次二阶矩法(PSOSM)研究了公路边坡结构的可靠度,及其对各个随机变量的敏感度结果。

1 部分二次二阶矩法对应结构可靠指标 β 公式的分析

在结构可靠度分析中多采用近似计算方法,其中改进一次二阶矩法(AFOSM)较为常用。该方法利用 Taylor 级数把功能函数线性化。由于结构的失效准则或功能函数多为非线性,如把失效面展开成 n 维超平面,当这个超平面形状与原失效面形状偏离太大时,AFOSM 的计算精度将显著降低^[6]。本文为了提高计算精度,改进了作者提出的部分二次二阶矩法(PSOSM)^[7],在 Taylor 级数展开式中不仅取了线性项,还选取了级数中同一随机变量的二次项,但不考虑二次交叉项。这相当于用一个距原点最近点处拟合的二次超低维圆曲面代替了原来的非线性功能函数,精度比 AFOSM 有所提高,但计算量增加不大。根据上述分析,功能函数实际失效面 Z 、AFOSM 简化面和 PSOSM 简化面相交于设计验算点 P^* ,对于三维情况可见图1所示。

设结构可靠性分析中所有基本随机变量组成随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$,其中各个随机分量都是相互独立的正态随机变量。当不满足时可利用正交变换和当量正态化法进行变化^[6]。计算时,将随机向量 X 用下式转换成相应的标准正态随机向量 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$,即

$$Y_i = (X_i - \mu_{X_i})/\sigma_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中, μ_{X_i} 和 σ_{X_i} 分别为 X_i 的均值和标准差。用 X 或 Y

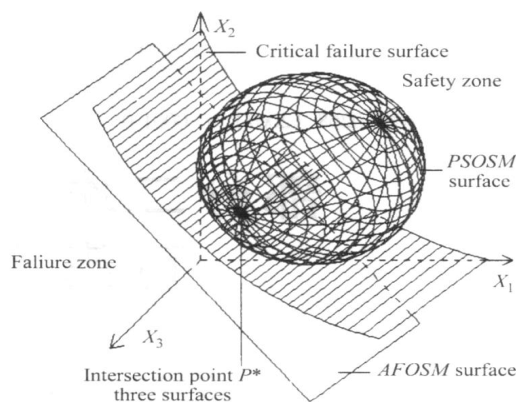


图1 失效面、AFOSM面和PSOSM面关系示意图

Fig. 1 Relation of failure surface, AFOSM surface and PSOSM surface

表示功能函数,其形式为

$$Z = g(X) = \dots = G(Y) = \begin{cases} < 0 & \text{失稳} \\ = 0 & \text{临界。} \\ > 0 & \text{稳定} \end{cases} \quad (2)$$

为了方便计算,工程上常用可靠指标来评价结构的可靠程度。根据 β 几何意义, β 对应极限状态面 $G(Y) = 0$ 上距原点最近点 $P^* (Y_i^* | i = 1, 2, \dots, n)$ 到原点的距离,故可按距离公式迭代求解 β 。把功能函数在点 P^* 处展开成 PSOSM 中的 Taylor 级数形式为:

$$Z = G(Y) \approx G(Y^*) + \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*) \frac{\partial G}{\partial Y_i} \bigg|_{P^*} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} \bigg|_{P^*}, \quad (3)$$

令 $a_i = \frac{\partial G}{\partial Y_i} \bigg|_{P^*}$, $b_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} \bigg|_{P^*}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则功能函数 Z 可写成:

$$Z = G(Y) \approx G(Y^*) + \sum_{i=1}^n a_i (Y_i - Y_i^*) + \sum_{i=1}^n b_i (Y_i - Y_i^*)^2 = C_0 + \sum_{i=1}^n b_i S_i = C_0 + \sum_{i=1}^n b_i (Y_i + C_i)^2, \quad (4)$$

式中, $C_0 = G(Y^*) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i}$; $C_i = \frac{a_i}{2b_i} - Y_i^*$; $S_i = (Y_i + C_i)^2 = Y_i^2 + 2\left(\frac{a_i}{2b_i} - Y_i^*\right)Y_i + \left(\frac{a_i}{2b_i} - Y_i^*\right)^2$ 。

变量 S_i 的均值和方差可以根据标准正态变量 Y_i 前几阶原点矩的特性,由下面公式来求:

$$\mu_{S_i} = E[S_i] = E[(Y_i + C_i)^2] = 1 + \left(\frac{a_i}{2b_i} - Y_i^*\right)^2, \quad (5)$$

$$\sigma_{S_i}^2 = D[(Y_i + C_i)^2] = 2 + 4C_i^2 = 2 + 4\left(\frac{a_i}{2b_i} - Y_i^*\right)^2 \quad (6)$$

则功能函数 Z 的均值和标准差分别为:

$$\mu_Z = C_0 + \sum_{i=1}^n b_i \mu_{S_i} \quad (7)$$

$$\sigma_Z = \left[\sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i} \alpha_i) \quad (8)$$

式中, $\alpha_i = b_i \sigma_{S_i} / \sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i})^{\frac{1}{2}}$ 称为灵敏度系数,表示第 i 个随机变量对标准差的相对影响。

此时,可靠性指标 β 为:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{C_0 + \sum_{i=1}^n b_i \mu_{S_i}}{\sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i} \alpha_i)} = \frac{G(Y^*) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} + \sum_{i=1}^n b_i \mu_{S_i}}{\sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i} \alpha_i)} \quad (9)$$

由于计算 β 迭代到最后所对应的设计验算点在失效面上,即有 $G(Y^*) = 0$, 以此变换式(9)可有:

$$\mu_{S_i} = \beta \sigma_{S_i} \alpha_i + \frac{a_i^2}{4b_i} \quad (10)$$

将 α_i 和 β 的表达式代入式(10)并化简得:

$$Y_i^{(k+1)} = \left(\frac{a_i}{2b_i} \right)^{(k)} \pm \left\{ \frac{(a_i^2 - 4b_i^2)^{(k)} FM + (8b_i^3)^{(k)} [G(Y^{(k)}) + GP]}{(4b_i^2)^{(k)} FM - 16(b_i^3)^{(k)} [G(Y^{(k)}) + GP]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\beta^{(k+1)} = \sqrt{Y^{(k+1)T} \cdot Y^{(k+1)}}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

其中, $GP = \sum_{i=1}^n (b_i Y_i^2 - a_i Y_i + b_i)^{(k)}$;

$$FM = \sum_{i=1}^n (b_i^2 \sigma_{S_i}^2)^{(k)}.$$

公式中上标“(·)”表示迭代次数。在实际计算中,当前后两次计算得到的 β 差在 ± 0.01 之内,迭代即可停止。对于式(11)中“ $\pm$ ”号的选取可以参照变量 Y_i 的实际情况(如土体容重不为负),及其计算值与初值的比较来最后确定。

2 功能函数的选取

2.1 边坡结构失效功能函数的选取

在结构可靠度研究中,选择恰当的功能函数是首要的和关键的。在边坡结构稳定性分析中,简单条分

法由于其计算简单,得到了广泛的应用。该方法中安全系数公式为^[8]:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m [c_i l_i + (W_{yi} \cos \alpha_i - W_{xi} \sin \alpha_i) f_i]}{\sum_{i=1}^m (W_{yi} \sin \alpha_i + W_{xi} \cos \alpha_i)} \quad (13)$$

式中, m 为条块总数; W_{xi} 、 W_{yi} 为第 i 个条块荷载在 x 和 y 方向的分量; f_i 、 c_i 、 l_i 和 α_i 为第 i 个条块滑动底面摩擦系数、凝聚力、底面长度和倾角。

令式(13)分子 $R = \sum_{i=1}^m [c_i l_i + (W_{yi} \cos \alpha_i - W_{xi} \sin \alpha_i) f_i]$ 为总抗滑反力,分母 $S = \sum_{i=1}^m (W_{yi} \sin \alpha_i + W_{xi} \cos \alpha_i)$ 为总下滑力。当以式(13)的推导作为边坡结构可靠性分析中功能函数 Z 选择的基础,即有表达式:

$$Z = R - S. \quad (14)$$

2.2 PSOSM 中功能函数的简化

当公路边坡为 m 层不同岩土筑成,计算结构可靠度时,考虑的土性随机参数有 $3m$ 个,即

$$c_1, f_1, Y_1; c_2, f_2, Y_2; \dots; c_i, f_i, Y_i; \dots; c_m, f_m, Y_m. \quad (15)$$

此时功能函数可写成:

$$Z = R - S = \sum_{i=1}^m l_i c_i + \sum_{i=1}^m A_i f_i Y_i - \sum_{i=1}^m B_i Y_i \quad (16)$$

式中,系数 $A_i = V_i \cos \alpha_i - C_k V_i \sin \alpha_i$; 系数 $B_i = V_i \sin \alpha_i + C_k V_i \cos \alpha_i$; V_i 是第 i 条块体积; C_k 为水平力系数。

由式(16)可见,功能函数是 $3m$ 元二次非线性函数,其可靠度计算比较复杂,本文应用 PSOSM 计算公路边坡结构可靠度时,当随机变量是相互独立的非标准随机变量,可利用标准化变换公式(1),将其转换成标准随机变量,即

$$Y_{3i-2} = \frac{c_i - \mu_{c_i}}{\sigma_{c_i}}, Y_{3i-1} = \frac{f_i - \mu_{f_i}}{\sigma_{f_i}}, Y_{3i} = \frac{Y_i - \mu_{Y_i}}{\sigma_{Y_i}}, \quad (17)$$

相应地有

$$\begin{cases} c_i = \sigma_{c_i} Y_{3i-2} + \mu_{c_i}, \\ f_i = \sigma_{f_i} Y_{3i-1} + \mu_{f_i}, \\ Y_i = \sigma_{Y_i} Y_{3i} + \mu_{Y_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(16)中,经化简后可有

$$Z = \sum_{i=1}^m k_{1i} Y_{3i-2} + \sum_{i=1}^m k_{2i} Y_{3i-1} +$$

$$\sum_{i=1}^m k_{23i} Y_{3i-2} Y_{3i-1} + \sum_{i=1}^m k_{3i} Y_{3i} + k_0, \quad (19)$$

式中, $k_0 = \sum_{i=1}^m (l_i \mu_{c_i} + A_i \mu_{f_i} \mu_{y_i} - B_i \mu_{y_i})$; $k_{1i} = l_i \sigma_{c_i}$; $k_{2i} = A_i \sigma_{f_i} \mu_{y_i}$; $k_{23i} = A_i \sigma_{f_i} \sigma_{y_i}$; $k_{3i} = A_i \sigma_{y_i} \mu_{f_i} - B_i \sigma_{y_i}$ 。

然后就可以利用迭代式(11)、式(12)来计算结构的可靠度,利用敏感度公式 $\alpha_i = b_i \sigma_{S_i} / [\sum_{i=1}^n (b_i \sigma_{S_i})^2]^{1/2}$ 计算各个随机变量对可靠指标的敏感度影响结果。

3 算例分析

有一河滩均质粘性土路堤^[8],堤高 13 m,堤宽 10 m,设计洪水位距堤顶 6 m,初拟横断面如图 2 所示,并做了条分法的条块划分。根据试验测得,在不浸水的条件下,土的容重 $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$,粘聚力 $c = 10 \text{ kPa}$,内摩擦角 $\varphi = 25^\circ$ ($f = \tan \varphi = 0.45$);浸水饱和后 $\gamma_m = 21 \text{ kN/m}^3$ (浮容重 $\gamma' = 11 \text{ kN/m}^3$),粘聚力 $c_m = 5 \text{ kPa}$,内摩擦角 $f_m = \tan \varphi_m = 0.36$;渗流的水力坡降 $I = 0.08$ 。车辆荷载换算成当量土柱高度为 $h_0 = 1.15 \text{ m}$ 。

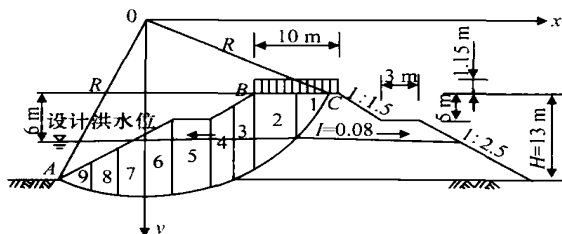


图2 路基横断面结构图

Fig. 2 Subgrade transect structure

按文献[10]取随机数范围分别为:内聚力变异系数 $\delta_c \leq 5\%$;摩擦系数变异系数 $\delta_f \leq 2.5\%$;重度变异系数 $\delta_y \leq 5\%$ 。计算时在上述波动范围内随机产生各个随机变量 200 个,并以此反算其相应均值和标准差。然后利用随机摄动理论^[9]、PSOSM 和自编程序,计算结构可靠指标 β 的变化规律。

3.1 c 、 f 、 γ 独立时的扰动对 β 的影响结果

(1) 随机变量 c 对应 β 计算结果分析

当 c 围绕其均值 10 kPa 上下各波动 $\Delta c = \mu_c \delta_c$,即 $c = \mu_c + \Delta c$ 时,如设 $\delta_c = +\Delta$ 时对应可靠指标 β_+ , $\delta_c = -\Delta$ 时对应可靠指标 β_- ,计算结果表明, β 是关于 $\delta_c = 0$ 的一条对称下降曲线,即 $\beta_+ = \beta_-$,如图 3 所示。说明 c 围绕均值向正、负方向波动相同量,对递减可靠指标的影响相同。

(2) 随机变量 f 对应 β 计算结果分析

当 f 在均值 0.45 附近上下波动相同量 $\Delta f = \mu_f \delta_f$,

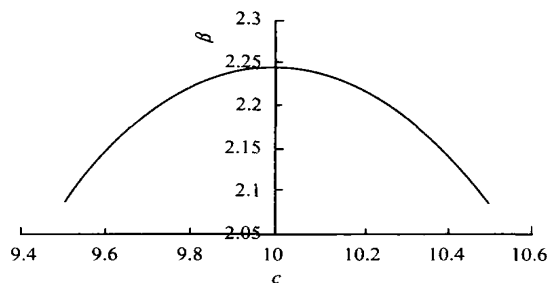


图3 β 和 c 的关系 ($\delta_f = 0.025, \delta_y = 0.05$)

Fig. 3 Relation of β and c ($\delta_f = 0.025, \delta_y = 0.05$)

即 $f = \mu_f + \Delta f$ 时,如果设 $\delta_f = +\Delta$ 时对应的可靠指标 β_+ , $\delta_f = -\Delta$ 时对应的可靠指标 β_- ,计算结果表明,二者不相等,即 $\beta_+ \neq \beta_-$,图 4 左右两侧不对称。但由于小量 δ_f 在计算可靠指标 β 时是以高次方出现,故图 4 中 $(\beta_+ - \beta_-)$ 的差比较小,即其对应数值比较接近。说明 f 围绕均值向正、负方向波动时,对递减的结构可靠指标 β 的影响差别不大。

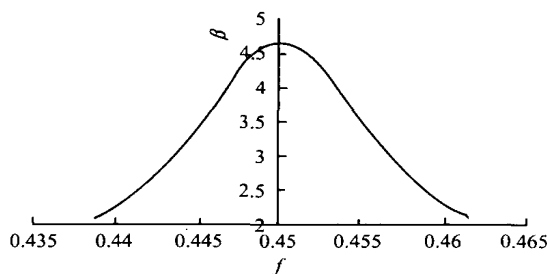


图4 β 和 f 的关系 ($\delta_y = 0.05, \delta_c = 0.05$)

Fig. 4 Relation of β and f ($\delta_y = 0.05, \delta_c = 0.05$)

(3) 随机变量 γ 对应 β 计算结果分析

当 γ 在均值 17 kN 附近上下波动相同量 $\Delta \gamma = \mu_y \delta_y$,即 $\gamma = \mu_y + \Delta \gamma$ 时,其对应可靠指标结果明显不同,如图 5 所示, β 和 γ 曲线是关于 $\gamma = 17 \text{ kN}$ 的左偏态曲线。说明 γ 向负方向波动时对结构可靠指标 β 影响,比其向正方向波动时小,即 β 对 γ 向增大方向波动更敏感,变化率更大。

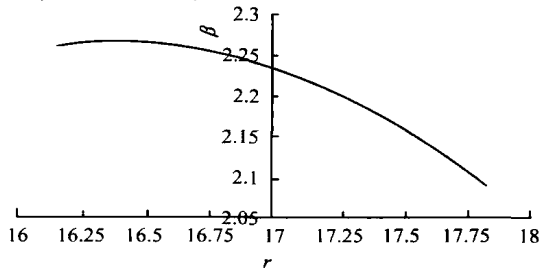


图5 β 和 γ 的关系 ($\delta_f = 0.025, \delta_c = 0.05$)

Fig. 5 Relation of β and γ ($\delta_f = 0.025, \delta_c = 0.05$)

3.2 c 、 f 、 γ 相关时的扰动对 β 影响结果分析

为研究土性参数 c 、 f 、 γ 在相关情况下对 β 的影响规律,假定相关系数分别为 $\rho_{cf} = -0.65$, $\rho_{f\gamma} = 0.4$, $\rho_{\gamma c} = 0.4$,利用自编程序,在随机变量 c 、 f 、 γ 各自波动范围内随机抽取 200 个数,计算机扰动时对 β 的影响规律。计算结果如图 6~图 8 所示。

(1) 相关情况下随机变量 c 对应 β 计算结果分析:

当 c 围绕其均值 10 kPa 上下各波动 $\Delta c = \mu_c \delta_c$,即 $c = \mu_c + \Delta c$ 时, β 是关于 $\delta_c = 0$ 的一条对称上升曲线,即 $\beta_+ = \beta_-$,如图 6 所示。说明 c 向正、负方向波动时对递增 β 影响相同。

(2) 相关情况下随机变量 f 对应 β 计算结果分析

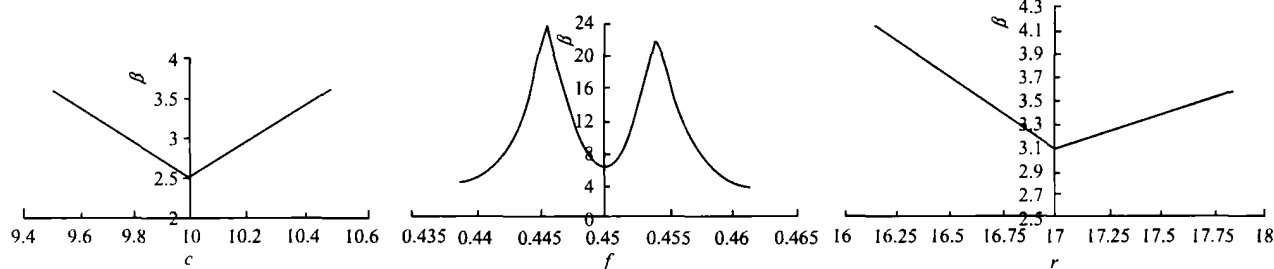


图 6 β 和 c 的关系 ($\delta_f = 0.025$, $\delta_\gamma = 0.05$)

Fig. 6 Relation of β and c

($\delta_\gamma = 0.025$, $\delta_c = 0.05$)

Fig. 7 Relation of β and f

($\delta_f = 0.05$, $\delta_c = 0.05$)

Fig. 8 Relation of β and γ

($\delta_f = 0.025$, $\delta_c = 0.05$)

4 结论

(1) 当土性参数相互独立,各随机参数围绕各自均值向正、负方向波动时, c 对递减 β 的影响相同; f 对递减 β 的影响差别不大; β 对 γ 向正方向波动比向负方向波动更敏感,变化率更大。

(2) 当土性参数互相相关时,各随机参数围绕各自均值向正、负方向波动时, c 对递增 β 影响相同; f 使可靠指标都具有先升后降的变化规律,且 f 向负方向波动比其向正方向波动时对 β 影响敏感; β 对 γ 向负方向波动更敏感,且随着波动量的增加, β 都具有增大变化趋势。

(3) 各随机参数在相互独立和相关的情况下对结构可靠指标具有不同的影响规律。故在公路边坡结构可靠度计算中,随机参数之间的相关性是不容忽视的。

参考文献:

[1] SUNG-CHI HSU, PRISCILLA P NELSON. Material Spatial Variability and Slope Stability for Weak Rock Masses [J]. Journal of Geotechnical and

当 f 在均值 0.45 附近上下各波动 $\Delta f = \mu_f \delta_f$,即 $f = \mu_f + \Delta f$ 时,二者不相等,即 $\beta_+ \neq \beta_-$,图 7 左右两侧不对称。随着波动量的增加,可靠指标都具有先升后降的变化规律,且结构可靠指标 β 对 f 向负方向波动更敏感一些。

(3) 相关情况下随机变量 γ 对应 β 计算结果分析

当 γ 在均值 17 kN 附近上下各波动 $\Delta \gamma = \mu_\gamma \delta_\gamma$,即 $\gamma = \mu_\gamma + \Delta \gamma$ 时,两种情况对应可靠指标结果明显不同,如图 8 所示。 γ 向负方向波动时对结构可靠指标 β 影响比其向正方向波动时大,即 β 对 γ 向负方向波动更敏感,且随着波动量的增加,可靠指标都具有增大变化趋势。

Geoenvironmental Engineering, 2006, 132 (2): 183 - 193.

[2] 王海斌,李永盛.边坡稳定性有限元分析的处理技巧[J].岩石力学与工程学报,2005,24(13):2386-2391.

[3] 傅旭东,茜平一,刘祖德.边坡稳定可靠性的随机有限元分析[J].岩土力学,2001,22(4):413-418.

[4] MAZEN E ADIB. Slope Failure in Weathered Claystone and Siltstone [J]. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, 2000, 126 (9): 787 - 797.

[5] MICHAEL A HICKS, CHRISTAKIS ONISIPHOROU, KRISTINAH SAMY, et al. Implications of soil variability for geo-computations [C] // 13th ACME Conference. Sheffield: University of Sheffield, 2005: 21 - 22.

[6] 赵国藩,金伟良,贡金鑫.结构可靠度理论(第1版)[M].北京:中国建筑工业出版社,2002.

[7] 宋云连.纤维增强复合材料层合板壳结构的可靠性研究[D].哈尔滨:哈尔滨工程大学,2000.

[8] 陆鼎中,程家驹.路基路面工程(第2版)[M].上海:同济大学出版社,1999.

[9] 陈虬,刘先斌.随机有限元及其工程应用[M].成都:西南交通大学出版社,1993.

[10] 陈祖煜.土质边坡稳定分析原理[M].北京:中国水利水电出版社,2003.