



3 维奇异摄动四阶旋度问题的非协调有限元逼近及其 Nitsche 方法分析

张百驹¹, 张智民^{2*}

1. 云南大学数学与统计学院, 昆明 650500;

2. Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit, MI 48202, USA

E-mail: 20220151@ynu.edu.cn, ag7761@wayne.edu

收稿日期: 2022-11-13; 接受日期: 2023-08-09; 网络出版日期: 2024-01-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12131005) 资助项目

摘要 本文对 3 维奇异摄动四阶旋度模型介绍并分析了一种稳健的非协调有限元方法. 对于模型问题的解, 本文给出了相应的先验估计, 并基于此证明了所提出的有限元方法关于奇异摄动参数 ε 是稳健的, 还证明了数值解以 $h^{1/2}$ 一致收敛. 此外, 本文还探索了利用 Nitsche 方法弱处理第二边界条件的效果, 并证明了, 当 $\varepsilon < h$ 时, 与强加边界条件的情形相比, 这样的处理能得到更好的误差估计. 最后, 数值实验验证了该方法的良好性能并证实了本文的理论预测.

关键词 四阶旋度问题 奇异摄动 非协调有限元 Nitsche 方法

MSC (2020) 主题分类 65N30, 65N15, 41A25

1 引言

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为可收缩的 Lipschitz 区域且 $\partial\Omega$ 为其边界. 考虑如下四阶旋度问题:

$$\begin{cases} \alpha(\nabla \times)^4 \mathbf{u} + \beta(\nabla \times)^2 \mathbf{u} + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $\mathbf{n}$ 是关于边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\mathbf{f}$ 是一个满足 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ 的外源场, $\alpha, \beta > 0$ 和 $\gamma \geq 0$ 是参数.

上述四阶旋度问题出现于许多领域中, 如电磁反散射问题^[3, 18, 21]和磁流体力学^[32]. 近年来, 越来越多的学者开始关注四阶旋度问题的有限元方法. 对四阶旋度问题设计有限元方法的主要难点在于如何处理四阶旋度算子 $(\nabla \times)^4$. 为解决此问题, 学者们提出并分析了各种有限元方法, 如协调有限元

英文引用格式: Zhang B J, Zhang Z M. Nonconforming finite element approximations and the analysis of Nitsche's method for a singularly perturbed quad-curl problem in three dimensions (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 647–670, doi: 10.1360/SCM-2022-0676

方法^[14, 15, 29, 30]、非协调有限元方法^[16, 28, 32]、混合有限元方法^[4, 22, 31]、间断 Galerkin 方法^[5, 6, 13, 24]和弱 Galerkin 方法^[23, 25]等.

现有文献主要考虑当 α 和 β 同阶或者 $\beta = 0$ 时的有限元空间构造与数值方法的设计. 然而, 根据文献^[32], α 通常远远小于 β 或 γ . 与四阶椭圆问题类似^[19, 26], 这个事实给稳健数值格式的设计带来了一些困难. 众所周知, 利用 Morley 元离散如下奇异摄动四阶椭圆问题可能不收敛:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 ε 是满足 $0 < \varepsilon \leq 1$ 的实小参数. 当 ε 趋于 0 时, 四阶问题 (1.2) 会形式上退化为一个二阶椭圆问题. 由于利用 Morley 元离散二阶问题可能会发散^[19], 如果利用 Morley 元离散 (1.2), 则当 ε 在 0 附近时该方法的收敛率就会变差. 为克服此困难, 通常可以修正 Morley 元方法的变分形式^[26] 或者修改 Morley 元的基函数^[19]. 一个自然的问题是, 现有非协调有限元方法对 $\alpha \ll \beta$ 的四阶旋度问题 (1.1) 是否是稳健的, 如果不是, 那么如何构造稳健的方法? 本文尝试解决这个问题.

为表述方便并与 (1.2) 类比, 不妨考虑如下奇异摄动四阶旋度问题:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (\nabla \times)^4 \mathbf{u} + (\nabla \times)^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 ε 是满足 $0 < \varepsilon \leq 1$ 的实小参数. 在数值实验中可以发现, 如果对奇异摄动问题 (1.3) 采用非协调有限元方法^[16, 32], 则当 ε 趋于 0 时, 数值解的收敛率会变差. 这是因为当 ε 趋于 0 时, 四阶旋度问题 (1.3) 会形式上退化成 Maxwell 方程, 而根据文献^[16, 注 4.10] 可知, 利用这些非协调元离散 Maxwell 方程是不收敛的. Nilssen 等^[19] 对奇异摄动四阶椭圆问题 (1.2) 提出了一种具有 H^1 连续性的稳健的 H^2 非协调元. 受此启发, 我们猜测, 如果能对四阶旋度问题 (1.3) 设计一种具有 $\mathbf{H}(\text{curl})$ 连续性的非协调元, 则能得到对此问题稳健的数值方法. 幸运的是, 我们在以前的工作中已构造出这种非协调元^[28]. 而为了得到稳健的误差估计, 还需要建立问题 (1.3) 的解关于 ε 的先验估计, 且需研究此问题与以下退化问题的关系:

$$\begin{cases} (\nabla \times)^2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (1.4)$$

具体结果将在下文给出. 基于此, 本文证明了所提出的非协调有限元方法在能量范数下关于 ε 是一致收敛的, 收敛阶为 $O(h^{1/2})$.

本文的另一目的是分析应用 Nitsche 方法弱施加奇异摄动四阶旋度问题 (1.3) 中第二个边界条件后的效果. Guzmán 等^[11] 对奇异摄动四阶椭圆问题 (1.2) 应用了 Nitsche 方法. 具体而言, 他们在数值格式中弱施加了 (1.2) 中的 Neumann 边界条件. 他们证明当 ε 小于网格尺寸 h 时, 这样的处理更具优越性, 并得到了更好的误差估计. 受此启发, 我们好奇该方法是否能够推广到奇异摄动四阶旋度问

题 (1.3). 事实证明, 答案是肯定的, 并且对退化问题 (1.4) 的解作一些正则性假设后, 当 $\varepsilon < h$ 时, 可得到比强加边界条件时更优的误差估计. 本文还提供了真解具有边界层的数值算例以验证弱处理边界条件的优势.

近期, Huang 和 Zhang^[17] 也发展出了对奇异摄动四阶旋度问题 (1.3) 稳健的混合有限元方法. 然而, 本文至少有以下几点与之不同:

- (1) 本文构造了一族非协调元, 而文献 [17] 主要考虑了一阶和二阶情形.
- (2) 由于本文考虑了任意阶的有限元, 因此误差估计中所构造的投影算子也有所不同.
- (3) 本文最低阶元有 28 个自由度, 而文献 [17] 中的最低阶元有 32 个自由度.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节引入一些记号, 此外, 还推导 (1.3) 的真解关于 ε 的先验估计, 并研究 (1.3) 的真解与退化问题 (1.4) 的真解的关系. 第 3 节介绍 3 维四阶旋度问题的非协调有限元方法, 还定义相关的投影算子, 并研究其逼近性质. 第 4 节提出并分析弱处理边界条件的有限元方法, 并证明所提出的方法关于参数 ε 是稳健的, 并且相关的误差估计要优于强加边界条件的情形. 第 5 节进行一些数值实验以验证我们的理论结果.

本文用 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$ 分别表示 $A \leq CB$ 和 $A \geq CB$, 其中 C 是与 h 、 ε 和罚参数无关的常数.

2 预备知识

2.1 记号

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为可收缩的 Lipschitz 区域, $\partial\Omega$ 为其边界. 对于正整数 m , 在单连通子区域 $D \subset \Omega$ 上使用标准的 Sobolev 空间记号 $H^m(D)$ 和 $H_0^m(D)$, 并赋予范数 $\|\cdot\|_{m,D}$ 和半范数 $|\cdot|_{m,D}$. 如果 $D = \Omega$, 这里略去此下标. 通常, 用 $L^2(D)$ 代替 $H^0(D)$.

在单连通子区域 $D \subset \Omega$ 上, 记

$$\mathbf{H}(\text{div}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(D)\}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{div}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; D) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ 在 } \partial D \text{ 上}\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H}(\text{curl}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) : \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D)\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{curl}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{curl}; D) : \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \text{ 在 } \partial D \text{ 上}\}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}^1(\text{curl}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(D) : \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(D)\}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H}(\text{grad curl}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) : \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(D)\}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{grad curl}; D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{grad curl}; D) : \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0, \nabla \times \mathbf{v} = 0, \text{ 在 } \partial D \text{ 上}\}, \quad (2.7)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界 ∂D 的单位外法向量.

令 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 为 Ω 的一族拟一致四面体剖分, 对于所有 $K \in \mathcal{T}_h$, 记 $h_K = \text{diam}(K)$, 并记 $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. 用 $\mathcal{F}_h$ 表示所有面构成的集合, 并用 $\mathcal{F}_h^i$ 和 $\mathcal{F}_h^b$ 分别表示所有内部面和边界面构成的集合. 此外, 定义 $F \in \mathcal{F}_h$ 和 $K \in \mathcal{T}_h$ 的块 (patch) 如下:

$$\mathcal{T}_F = \{K \in \mathcal{T}_h : F \subset \partial K\}, \quad \mathcal{T}_K = \{K' \in \mathcal{T}_h : \partial K' \cap \partial K \neq \emptyset\}.$$

给定 $K \in \mathcal{T}_h$ 和 $F \subset \partial K$, 用 λ_F 表示在 F 为 0 的 K 的重心坐标. 单元泡函数和面泡函数定义如下:

$$b_K = \prod_F \lambda_F, \quad b_F = \prod_{G \neq F} \lambda_G, \quad (2.8)$$

其中乘法遍历所有 K 的面.

对于给定的四面体 $S \subset \mathbb{R}^3$ 和 $m \geq 0$, 向量值多项式空间定义为 $\mathbf{P}^m(S) = [P^m(S)]^3$, 其中 $P^m(S)$ 是 S 上次数小于等于 m 的多项式空间. 当 $m < 0$ 时, 令 $\mathbf{P}^m(S)$ 和 $P^m(S)$ 为空集. 本文用以下记号表示内部和边界上的内积:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_K = \int_K \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \quad \langle p, q \rangle_F = \int_F p q ds.$$

现在定义切向跳跃算子. 如果 $F \in \mathcal{F}_h^i$ 且 $F = \overline{K^+} \cap \overline{K^-}$, 令

$$[\![\mathbf{v} \times \mathbf{n}]\!]_F = (\mathbf{v}|_{K^+} \times \mathbf{n}_F)|_F - (\mathbf{v}|_{K^-} \times \mathbf{n}_F)|_F,$$

其中 $\mathbf{n}_F$ 表示 F 上由 K^+ 指向 K^- 的法向量. 如果 $F \in \mathcal{F}_h^b$ 是边界面且 $F \subset \partial K$, 令

$$[\![\mathbf{v} \times \mathbf{n}]\!]_F = (\mathbf{v}|_K \times \mathbf{n}_F)|_F.$$

还定义如下切向和法向平均算子:

$$\begin{aligned} \{\!\!\{ \mathbf{v} \times \mathbf{n} \}\!\!\}_F &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}|_{K^+} \times \mathbf{n}_F|_F + \mathbf{v}|_{K^-} \times \mathbf{n}_F|_F), \quad \text{当 } F \in \mathcal{F}_h^i, F = \partial K^+ \cap \partial K^- \text{ 时,} \\ \{\!\!\{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \}\!\!\}_F &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}|_{K^+} \cdot \mathbf{n}_F|_F + \mathbf{v}|_{K^-} \cdot \mathbf{n}_F|_F), \quad \text{当 } F \in \mathcal{F}_h^i, F = \partial K^+ \cap \partial K^- \text{ 时,} \\ \{\!\!\{ \mathbf{v} \times \mathbf{n} \}\!\!\}_F &= \mathbf{v} \times \mathbf{n}_F|_F, \quad \text{当 } F \in \mathcal{F}_h^b \text{ 时,} \\ \{\!\!\{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \}\!\!\}_F &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_F|_F, \quad \text{当 } F \in \mathcal{F}_h^b \text{ 时.} \end{aligned}$$

后面将频繁使用如下迹不等式 (详见文献 [2, 定理 1.6.6] 和 [11, 命题 1]).

命题 2.1 对于任意具有分片光滑边界 ∂D 的单连通区域 D , 有

$$\|v\|_{0,\partial D} \lesssim \|v\|_{0,D}^{1/2} \|v\|_{1,D}^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(D). \quad (2.9)$$

特别地, 由通常的尺度论证 (scaling argument) 可在任意四面体 K 上得到如下估计:

$$\|v\|_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1/2} \|v\|_{0,K} + \|v\|_{0,K}^{1/2} \|\nabla v\|_{0,K}^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(K), \quad (2.10)$$

$$\|v\|_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1/2} \|v\|_{0,K} + h_K^{1/2} \|\nabla v\|_{0,K}, \quad \forall v \in H^1(K). \quad (2.11)$$

此外, 对于固定的 q 和任意 $v \in P^q(K)$, 有如下标准的逆估计:

$$\|v\|_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1/2} \|v\|_{0,K}. \quad (2.12)$$

2.2 奇异摄动四阶旋度问题的正则性估计

本小节旨在研究奇异摄动四阶旋度问题 (1.3) 的如下正则性估计.

引理 2.1 假设区域 Ω 是凸的. 令 $\mathbf{u}$ 为 (1.3) 的解, 且 $\bar{\mathbf{u}}$ 为 (1.4) 的解, 则如下估计成立:

$$\|\mathbf{u}\|_2 + \varepsilon \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{f}\|_0, \quad (2.13)$$

$$\|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0, \quad (2.14)$$

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_0 \lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0, \quad (2.15)$$

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_1 \lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (2.16)$$

证明 下面将利用类似文献 [19, 引理 5.1] 中的方法建立上述估计. 首先回顾问题 (1.4) 的如下正则性估计:

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_2 \lesssim \|\mathbf{f}\|_0. \quad (2.17)$$

上述估计是文献 [31, 定理 3.5] 的直接推论. 因为

$$(\nabla \times)^4 \mathbf{u} = \varepsilon^{-2} (\nabla \times)^2 (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), \quad (2.18)$$

所以由文献 [16, 引理 A.1] 可得

$$\|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim \varepsilon^{-2} \|(\nabla \times)^2 (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_{-1} \lesssim \varepsilon^{-2} \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_0. \quad (2.19)$$

对 (2.18) 两边同时乘以 $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ 并由分部积分可得

$$\varepsilon^2 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^2 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 = \langle \varepsilon^2 (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \mathbf{n} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) \rangle + (\varepsilon^2 (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \mathbf{f}). \quad (2.20)$$

利用迹不等式 (2.9) 和 (2.17) 可得

$$\|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_{0, n\partial\Omega} \lesssim \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^{1/2} \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_1^{1/2} \quad \text{和} \quad \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_{0, \partial\Omega} \lesssim \|\mathbf{f}\|_0.$$

而且显然有

$$(\varepsilon^2 (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \mathbf{f}) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} (\|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^2 + \|\mathbf{f}\|_0^2).$$

再由 Young 不等式得到

$$\langle \varepsilon^2 (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \mathbf{n} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) \rangle \lesssim \varepsilon^3 \delta \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \|\mathbf{f}\|_0^2, \quad (2.21)$$

其中 $\delta > 0$. 由 (2.19) 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_1 &\leq \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^2 + \varepsilon^4 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_1^2) \\ &\lesssim \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^2 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

结合 (2.20)–(2.22), 有

$$\varepsilon^2 \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^2 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 \lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0^2. \quad (2.23)$$

从 (2.19) 和 (2.23) 可推导出

$$\|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim \varepsilon^{-3/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (2.24)$$

根据文献 [31, 引理 3.6], 有

$$\|\mathbf{u}\|_2 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{u}\|_1 \lesssim \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0, \quad (2.25)$$

其中使用了 Friedrichs 不等式和以下事实:

$$\|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0 = \|\nabla \nabla \times \mathbf{u}\|_0. \quad (2.26)$$

由 (2.23) 和 (2.25), 推得

$$\|\mathbf{u}\|_2 \lesssim \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (2.27)$$

于是估计 (2.13) 和 (2.14) 就可从 (2.23)、(2.24) 和 (2.27) 得到.

现在考虑 L^2 估计 (2.15). 为此, 使用对偶论证技巧. 对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, 令 $\boldsymbol{\psi}$ 是以下问题的解:

$$\begin{cases} (\nabla \times)^2 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.28)$$

类似 (2.17), 有

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_2 \lesssim \|\mathbf{v}\|_0. \quad (2.29)$$

由 (2.28)、(1.3)、(1.4) 和分部积分, 得到

$$(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = (\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}), \nabla \times \boldsymbol{\psi}) = -(\varepsilon^2 (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, (\nabla \times)^2 \boldsymbol{\psi}) - \langle \varepsilon^2 \mathbf{n} \times (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \nabla \times \boldsymbol{\psi} \rangle. \quad (2.30)$$

再由迹不等式、估计式 (2.13) 和 (2.29), 得到

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\lesssim \varepsilon^2 (\|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0 + \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_0^{1/2} \|(\nabla \times)^2 \mathbf{u}\|_1^{1/2}) \|\boldsymbol{\psi}\|_2 \\ &\lesssim \varepsilon^2 (\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-1/4} \varepsilon^{-3/4}) \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{v}\|_0 \\ &\lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{v}\|_0, \end{aligned}$$

并由此可得 (2.15).

根据文献 [10, 第 1 章, 定理 3.7], 并回顾 $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, 推得

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_1 \lesssim \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_0 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0. \quad (2.31)$$

因此, (2.16) 可从 (2.14) 和 (2.15) 得到. $\square$

3 一族 3 维 curl-curl 非协调有限元

3.1 局部空间

本小节介绍奇异摄动四阶旋度问题的一族非协调有限元. 由于该非协调元是基于 $\mathbf{H}(\text{curl}; \Omega)$ 有限元加上一些泡函数得到的, 因此首先回顾一些相关的有限元. 对于 $K \in \mathcal{T}_h$, 令 $\mathbf{N}^k(K)$ 表示局部的第一类 Nédélec 空间,

$$\mathbf{N}^k(K) = \mathbf{P}^k(K) + \{\mathbf{v} \in \mathbf{P}^{k+1}(K) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0\} \quad (k \geq 1), \quad (3.1)$$

并令 $\mathbf{M}^k(K)$ 表示局部 Brezzi-Douglas-Marini (BDM) 空间

$$\mathbf{M}^k(K) = \mathbf{P}^k(K) \quad (k \geq 1). \quad (3.2)$$

然后对 3 维四阶旋度问题定义如下局部空间:

$$\mathbf{U}^k(K) = \mathbf{N}^k(K) + b_K \mathbf{Q}^{k-1}(K), \quad (3.3)$$

其中,

$$\mathbf{Q}^{k-1}(K) = \sum_{F \subset \partial K} b_F \mathbf{Q}_F^{k-1}(K), \quad (3.4)$$

且

$$\mathbf{Q}_F^{k-1}(K) = \{\mathbf{q} \times \mathbf{n}_F \in \mathbf{P}^{k-1}(K) \times \mathbf{n}_F : (\mathbf{q} \times \mathbf{n}_F, nb_K b_F(\mathbf{w} \times \mathbf{n}_F))_K = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{P}^{k-2}(K)\}. \quad (3.5)$$

空间 $b_K \mathbf{Q}^{k-1}(K)$ 是 Guzmán 和 Neilan^[12] 提出的.

对局部空间 $\mathbf{U}^k(K)$ 定义如下自由度:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_e, \kappa \rangle_e, \quad \forall \kappa \in \mathbf{P}^k(e), \quad e \text{ 为 } K \text{ 的任意一边}, \quad (3.6)$$

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\mu} \rangle_F, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \quad F \text{ 为 } K \text{ 的任意一面}, \quad (3.7)$$

$$\langle (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\chi} \rangle_F, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \quad F \text{ 为 } K \text{ 的任意一面}, \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})_K, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{P}^{k-2}(K). \quad (3.9)$$

文献 [28, 定理 3.1] 已经证明, 任意 $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^k(K)$ 可被自由度 (3.6)–(3.9) 唯一确定.

注 3.1 对最低阶情形 ($k=1$), (3.3) 中的 $b_K \mathbf{Q}^{k-1}(K)$ 由 7 次多项式构成, 在实际计算中, 这会要求使用高阶积分公式. 为解决此问题, 可以将 $\mathbf{Q}^{k-1}(K)$ 替换为 $Y = \mathbf{P}^1(K) \setminus \text{span}\{(\lambda_i - 1/3)\nabla \lambda_i\}_{i=1}^4$, 其中 λ_i ($i=1, 2, 3, 4$) 是 K 的重心坐标 (详见文献 [27]). 现在 $b_K Y$ 只包含五次多项式, 相较于前者, 编程难度有所降低.

3.2 全局空间及投影算子

在前面已经定义了局部空间, 现在可由此定义如下全局空间:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{u}|_K \in \mathbf{U}^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ &\quad \langle [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}], \boldsymbol{\chi} \rangle_F = 0, \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \forall F \in \mathcal{F}_h^i\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{U}_{h,0} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_h : \langle [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}], \boldsymbol{\chi} \rangle_F = 0, \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \forall F \in \mathcal{F}_h^b\}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{N}_h = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{u}|_K \in \mathbf{N}^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v}|_K \in \mathbf{M}^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{W}_{h,0} = \{w \in H_0^1(\Omega) : w|_K \in P^{k+1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.14)$$

现在研究关于 $\mathbf{U}_h$ 的投影算子. 自由度 (3.6)–(3.9) 可自然地诱导出插值算子 $\boldsymbol{\Pi}_U : \mathbf{H}^1(\text{curl}; \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$ (详见文献 [28]). 然而, 此算子不一定有如下性质:

$$\|\nabla \times \boldsymbol{\Pi}_U \mathbf{u}\|_0 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{u}\|_0,$$

而此性质将在推导关于 ε 一致的误差估计时起重要的作用. 因此需要定义其他的算子.

为此回顾文献 [8] 给出的投影算子. 根据文献 [8, 定理 6.5] 可知, 存在算子 $\mathcal{J}_h^N : \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) \rightarrow \mathbf{N}_h$ 和 $\mathcal{J}_h^M : \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) \rightarrow \mathbf{M}_h$ 使得以下性质成立.

- (i) $P(\mathcal{T}_h)$ 关于 $\mathcal{J}_h$ 是逐点不变的, 如果 $\mathcal{J}_h = \mathcal{J}_h^N$, 则 $P(\mathcal{T}_h) = \mathbf{N}_h$; 如果 $\mathcal{J}_h = \mathcal{J}_h^M$, 则 $P(\mathcal{T}_h) = \mathbf{M}_h$.
- (ii) 存在关于 h 一致的 c 使得

$$\|\mathcal{J}_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))} \leq c, \quad (3.15)$$

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h \mathbf{v}\|_0 \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in P(\mathcal{T}_h)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_0, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega). \quad (3.16)$$

(iii) 下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) \\ \downarrow \mathcal{J}_h^N & & \downarrow \mathcal{J}_h^M \\ \mathbf{N}_h & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathbf{M}_h. \end{array} \quad (3.17)$$

进而可证明如下引理.

引理 3.1 令整数 s 满足 $0 \leq s \leq k+1$, 则对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^s(\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega)$, 有下式成立:

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^{s-m} \|\mathbf{w}\|_s, \quad 0 \leq m \leq s. \quad (3.18)$$

证明 如果 $s = m = 0$, 则利用 (3.15) 可得

$$\|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_0 \leq \|\mathbf{w}\|_0 + \|\mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_0 \lesssim \|\mathbf{w}\|_0.$$

考虑 $s \geq 1$. 令 $\Pi_h^M : \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{M}_h$ 是标准 BDM 插值^[1]. 利用三角不等式、逆估计和文献 [9, 定理 11.13], 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_{m,K} &\leq \|\mathbf{w} - \Pi_h^M \mathbf{w}\|_{m,K} + \|\Pi_h^M \mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_{m,K} \\ &\lesssim h_K^{s-m} \|\mathbf{w}\|_{s,K} + h_K^{-m} (\|\Pi_h^M \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{0,K} + \|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_{0,K}). \end{aligned}$$

由上式和 (3.16) 及 Π_h^M 的逼近性质, 可得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} &\lesssim h^{s-m} \|\mathbf{w}\|_s + h^{-m} (\|\Pi_h^M \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_0 + \|\mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \mathbf{w}\|_0) \\ &\lesssim h^{s-m} \|\mathbf{w}\|_s + h^{-m} \|\Pi_h^M \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_0 \\ &\lesssim h^{s-m} \|\mathbf{w}\|_s. \end{aligned}$$

由此引理 3.1 得证. □

接下来叙述关于 $\mathbf{U}_h$ 的算子的构造.

引理 3.2 存在算子 $\mathbf{I}_h : \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_h$ 使得对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ 且 $0 \leq s \leq k+1$, 有

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_0 \lesssim h^s (\|\mathbf{v}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s), \quad (3.19)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^{s-m} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s, \quad 0 \leq m \leq s. \quad (3.20)$$

进一步地, 存在 $\mathbf{I}_h^0: \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) \rightarrow \mathbf{U}_{h,0}$ 使得, 如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{grad curl}; \Omega)$, 则

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v}\|_0 \lesssim h^s (\|\mathbf{v}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s), \quad (3.21)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^{s-m} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s, \quad 0 \leq m \leq s; \quad (3.22)$$

如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{v} \notin \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, 则

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v}\|_0 \lesssim h (\|\mathbf{v}\|_1 + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_1), \quad (3.23)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^{s-m} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s + h^{-m} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_0, \quad 0 \leq m \leq s. \quad (3.24)$$

证明 首先, 定义投影 $\Pi_h: \mathbf{N}_h \rightarrow \mathbf{U}_h$ 如下: 对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$, 有

$$\langle (\Pi_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{t}_e, \kappa \rangle_e = 0, \quad \forall \kappa \in P^k(e), \quad (3.25)$$

$$\langle (\Pi_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\mu} \rangle_F = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \quad (3.26)$$

$$\langle (\nabla \times \Pi_h \mathbf{w}) \times \mathbf{n}_F - \llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket, \boldsymbol{\chi} \rangle_F = 0, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F), \quad (3.27)$$

$$(\Pi_h \mathbf{w} - \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho})_K = 0, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{P}^{k-2}(K), \quad (3.28)$$

其中, e 遍历 K 的所有边, F 遍历 K 的所有面. 根据文献 [28, 定理 3.1] 和 $\mathbf{U}_h$ 的定义可知, Π_h 是良定义的.

容易验证, 对包含面 F 的任意的四面体 K , 有

$$|\llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket|_F - \nabla \times (\mathbf{w}|_K) \times \mathbf{n}_F|_F = \begin{cases} \frac{1}{2} \llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket, & F \in \mathcal{F}_h^i, \\ 0, & F \in \mathcal{F}_h^b. \end{cases} \quad (3.29)$$

因此由 (3.25)–(3.29) 和尺度论证, 对于 $\mathbf{w} \in \mathbf{N}_h$, 有

$$\|\Pi_h \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{0,K} \lesssim h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket_{0,F}. \quad (3.30)$$

然后, 令 $\mathbf{I}_h = \Pi_h \mathcal{J}_h^N$. 如果 $s = 0$, 则根据尺度论证及 (3.17) 有

$$h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket_{0,F} \lesssim h_K \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{w}\|_{0,\mathcal{T}_K}. \quad (3.31)$$

由 (3.30) 和 (3.31) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_{0,K} &\leq \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + \|\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \Pi_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \llbracket \nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rrbracket_{0,F} \\ &\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K}. \end{aligned}$$

由上述估计和 (3.15) 可推得

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_0 \lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_0 + h \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_0 \lesssim \|\mathbf{v}\|_0 + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_0. \quad (3.32)$$

利用逆估计, 应用 (3.30) 和 (3.31) 及 $\mathbf{w} = \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}$, 并回顾 (3.17), 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v})\|_{0,K} &\leq \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{0,K} + \|\nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K^{-1} \|\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,K} + \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K}. \end{aligned}$$

由上述估计和 (3.15) 可得

$$\|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v})\|_0 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_0 + \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_0 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{v}\|_0. \quad (3.33)$$

考虑 $s \geq 1$. 注意到, 如果 $\nabla \times \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, 则 $\llbracket (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \rrbracket$ 在 $F \in \mathcal{F}_h^i$ 上为 0. 利用迹不等式 (2.11) 和 (3.17) 可推导出

$$\begin{aligned} &h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\ &= h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \|\llbracket (\nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{v})) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\ &\lesssim h_K \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{0,\mathcal{T}_K} + h_K^2 |\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})|_{1,\mathcal{T}_K} \\ &= h_K \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K} + h_K^2 |\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}|_{1,\mathcal{T}_K}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

由 (3.30) 和 (3.34) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_{0,K} &\leq \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + \|\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^i} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\ &\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K} + h_K^2 |\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}|_{1,\mathcal{T}_K}. \end{aligned}$$

由上式、引理 3.1 及 (3.16) 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_0 &\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_0 + h \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_0 + h^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim h^s \|\mathbf{v}\|_s + h^s \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s. \end{aligned} \quad (3.35)$$

结合 (3.32) 和 (3.35) 得到 (3.19).

利用逆估计、(3.30) 及 (3.34) 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v})\|_{m,K} &\leq \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} + \|\nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{m,K} + h_K^{-m-1} \|\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{m,K} + h_K^{-m} \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K} \\ &\quad + h_K^{1-m} |\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}|_{1,\mathcal{T}_K}. \end{aligned}$$

由上式和引理 3.1 可得

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v})\|_{m,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{m,K}^2 \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
& + h^{-m} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& + h^{1-m} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla \times \mathbf{v} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}|_{1,\mathcal{T}_K}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim h^{s-m} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_s.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

结合 (3.33) 与 (3.36) 可推得 (3.20).

接下来研究 $\mathbf{I}_h^0$ 的构造. 为此, 需用

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \mathbf{w}) \times \mathbf{n}_F - \llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket, \boldsymbol{\chi} \rangle_F &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F) \text{ 和 } K \text{ 的内部面 } F, \\
\langle (\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \mathbf{w}) \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\chi} \rangle_F &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F) \text{ 和 } K \text{ 的边界面 } F
\end{aligned} \tag{3.37}$$

替换 (3.27) 以修改 $\mathbf{\Pi}_h$. 对于任意内部面 F , 回顾 (3.29) 并利用以下事实:

$$\langle (\nabla \times (\mathbf{\Pi}_h \mathbf{w} - \mathbf{w})) \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\chi} \rangle_F = -\langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}_F, \boldsymbol{\chi} \rangle_F, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{P}^{k-1}(F),$$

得到

$$\|\mathbf{\Pi}_h \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{0,K} \lesssim h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K} \|\llbracket (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F}. \tag{3.38}$$

我们指出, 与 (3.30) 相比, (3.38) 的右端项可能包含边界面. 如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{grad curl}; \Omega)$, 则利用类似 (3.31) 和 (3.34) 的方法可得

$$\begin{aligned}
h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} &\lesssim h_K \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{w}\|_{0,\mathcal{T}_K}, \quad \text{当 } s = 0 \text{ 时}, \\
h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{w}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\
&\lesssim h_K \|\nabla \times \mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{w}\|_{0,\mathcal{T}_K} + h_K^2 |\nabla \times \mathbf{w} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{w}|_{1,\mathcal{T}_K}, \quad \text{当 } s \geq 1 \text{ 时}.
\end{aligned}$$

因此, 如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{grad curl}; \Omega)$, 则利用类似 (3.19) 和 (3.20) 的证明可得 (3.21) 和 (3.22).

然而, 如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{v} \notin \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, 则只能得到如下估计:

$$h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K \cap \mathcal{F}_h^b} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \lesssim h_K \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K}. \tag{3.39}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v}\|_{0,K} &\leq \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + \|\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} \\
&\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K^{3/2} \sum_{F \subset \partial K} \|\llbracket \nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\
&\lesssim \|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}\|_{0,K} + h_K \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K}, \\
\|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{v})\|_{m,K} &\leq \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} + \|\nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}_h \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} \\
&\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} + h_K^{3/2-m-1} \sum_{F \subset \partial T} \|\llbracket (\nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{v}) \times \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,F} \\
&\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{v} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{v})\|_{m,K} + h_K^{-m} \|\mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,\mathcal{T}_K}.
\end{aligned}$$

利用以上两式, 可得到 (3.23) 和 (3.24). □

4 有限元方法

本节介绍 (1.3) 的有限元方法并分析其收敛性. 为此, 考虑如下与 (1.3) 等价的问题:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \nabla \times \Delta \nabla \times \mathbf{u} + (\nabla \times)^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (4.1)$$

此问题可由恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}$ 与如下事实得到:

$$\nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \mathbf{n}) = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

其变分问题可叙述为: 求 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{grad curl}; \Omega)$ 和 $p \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{grad curl}; \Omega), \\ (\mathbf{u}, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中,

$$A_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}), \quad (4.3)$$

且 $a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \nabla \times \mathbf{w})$.

4.1 弱施加边界条件情形的分析

为定义相关有限元方法, 引入如下双线性型:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \nabla \times \mathbf{w})_K - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle_F \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v} \right\rangle_F + \sigma \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \langle \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w} \rangle_F, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中, σ 是正的罚参数, 且 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}_F \cdot \nabla$.

于是有限元方法可叙述为: 求 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$ 和 $p_h \in W_{h,0}$ 使得

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in W_{h,0}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中,

$$A_{\varepsilon,h}(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \varepsilon^2 a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (\nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{w}_h), \quad (4.6)$$

$$b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{v}_h, \nabla p_h). \quad (4.7)$$

注 4.1 将 $\mathbf{v}_h = \nabla q_h$ ($\forall q_h \in W_{h,0}$) 代入 (4.5) 的第一个方程, 并由 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ 可得 $p_h = 0$. 因此, 其解 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$ 满足

$$A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h. \quad (4.8)$$

定义关于 $\mathbf{U}_h$ 的范数如下:

$$\|\mathbf{v}\|_{\varepsilon,h}^2 = \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{gc,h}^2 + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{v}\|_0^2, \quad (4.9)$$

其中 $\|\mathbf{v}\|_{gc,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \nabla \times \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{0,F}^2$.

以下引理建立了 $A_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ 在核空间 $\mathbf{Z}_h$ 上的强制性, 其中 $\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h : (\mathbf{v}_h, \nabla q_h) = 0, \forall q_h \in W_{h,0}\}$.

引理 4.1 存在只与网格 $\mathcal{T}_h$ 的形状规则性相关的常数 $\sigma_0 > 0$, 使得对于 $\sigma \geq \sigma_0$, 有

$$\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}^2 \lesssim A_{\varepsilon,h}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{Z}_h. \quad (4.10)$$

证明 利用文献 [28, 引理 4.1], 有

$$\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}^2 \lesssim 2(\|\nabla \times \mathbf{w}\|_0^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{w}\|_{gc,h}^2).$$

因此只需要证明 $a_h(\cdot, \cdot)$ 关于 $\|\mathbf{w}\|_{gc,h}$ 是强制的. 由 (4.4), 得到

$$a_h(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla \times \mathbf{w}|_{1,K}^2 - 2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle_F + \sigma \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2. \quad (4.11)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及标准的尺度论证可知存在只与网格 $\mathcal{T}_h$ 的形状规则性相关的常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} 2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle_F &\leq 2 \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \left\| \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{w} \right\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F |\nabla \times \mathbf{w}|_{1,\mathcal{T}_F}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\nabla \times \mathbf{w}|_{1,K}^2 + \frac{C^2}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2. \end{aligned}$$

利用以上估计及 (4.11) 得到

$$a_h(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla \times \mathbf{w}|_{1,K}^2 + \left(\sigma - \frac{C^2}{2} \right) \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2.$$

取 $\sigma_0 = \frac{1}{2}(C^2 + 1)$ 可得所需要的结果. $\square$

下述引理保证了有限元方法 (4.5) 是适定的.

引理 4.2 对于任意 $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) \in \mathbf{U}_h \times W_{h,0}$, 有以下离散稳定性成立:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{\varepsilon,h} + |\tilde{p}_h|_1 \lesssim \sup_{(\mathbf{0},0) \neq (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{U}_h \times W_{h,0}} \frac{A_{\varepsilon,h}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, \tilde{p}_h) + b(\tilde{\mathbf{u}}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h} + |q_h|_1}. \quad (4.12)$$

证明 由 $\nabla q_h \in \mathbf{U}_{h,0}$ ($\forall q_h \in W_{h,0}$) 有如下 inf-sup 条件成立:

$$\sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}} \geq \frac{b(\nabla q_h, q_h)}{\|\nabla q_h\|_{\varepsilon,h}} \gtrsim |q_h|_1, \quad \forall q_h \in W_{h,0}.$$

因此, 离散稳定性可直接由引理 4.1、上述 inf-sup 条件及 Babuška-Brezzi 理论^[1] 得到. $\square$

下面的引理给出了由 (4.9) 定义的范数下的插值误差估计.

引理 4.3 令 $\mathbf{u}$ 是 (4.1) 的解并满足 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, 其中 $2 \leq s \leq k+1$. 令 $\mathbf{I}_h$ 是引理 3.2 定义的投影, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_{\varepsilon, h} \lesssim (h^s + \varepsilon h^{s-1})(\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s), \quad (4.13)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_{\varepsilon, h} \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (4.14)$$

进一步地, 如果退化问题的解满足 $\nabla \times \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $1 \leq m \leq k+1$, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_{\varepsilon, h} \lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 + h^m (\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m). \quad (4.15)$$

证明 利用 (3.20) 和 (2.13) 可得

$$\varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \lesssim \varepsilon^2 h^{2s-2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s^2, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \lesssim \varepsilon^2 h \|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2, \quad (4.17)$$

$$\varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \lesssim \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 \lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0^2. \quad (4.18)$$

类似地, 由 (3.20)、(2.13) 及 (2.11) 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,F}^2 &\lesssim \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-2} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2) \\ &\lesssim \varepsilon^2 h^{2s-2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,F}^2 &\lesssim \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-2} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2) \\ &\lesssim \varepsilon^2 h \|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,F}^2 &\lesssim \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-2} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2) \\ &\lesssim \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 \lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

由 (3.20)、(2.13)、(2.14) 和 (2.17), 有

$$\|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_0^2 \lesssim h^{2s} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s^2, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_0^2 &\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \times \mathbf{I}_h(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 \\ &\lesssim h \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_1 + h^2 \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_1^2 \\ &\lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_0^2 &\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \times \mathbf{I}_h(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 \\ &\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \times \mathbf{I}_h(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 + h^{2m} \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m^2 \\ &\lesssim \varepsilon \|\mathbf{f}\|_0^2 + h^{2m} \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

由 (3.19) 和 (2.13)–(2.17) 可得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_0^2 \lesssim h^{2s} (\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s)^2, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_0^2 &\lesssim \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h \bar{\mathbf{u}}\|_0^2 \\
&\lesssim h(\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_0 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0)(\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_1 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_1) + h^2(\|\bar{\mathbf{u}}\|_1 + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_1)^2 \\
&\lesssim h\|\mathbf{f}\|_0^2,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_0^2 &\lesssim \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0^2 + \|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h \bar{\mathbf{u}}\|_0^2 \\
&\lesssim (\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_0 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0)^2 + h^{2m}(\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m)^2 \\
&\lesssim \varepsilon\|\mathbf{f}\|_0^2 + (\|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0)^2 + h^{2m}(\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m)^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

于是估计式 (4.13) 可由 (4.9)、(4.16)、(4.19)、(4.22) 及 (4.25) 得到, 估计式 (4.14) 可由 (4.9)、(4.17)、(4.20)、(4.23) 及 (4.26) 得到, 且估计式 (4.15) 可由 (4.9)、(4.18)、(4.21)、(4.24) 及 (4.27) 得到. $\square$

引理 4.4 在引理 4.3 的假设下, 对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbf{U}_h$, 都有

$$A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{w}) \lesssim (1 + \sigma)(\varepsilon h^{s-1} + h^s)(\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s)\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}, \tag{4.28}$$

$$A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{w}) \lesssim (1 + \sigma)h^{1/2}\|\mathbf{f}\|_0\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}, \tag{4.29}$$

$$A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{w}) \lesssim (1 + \sigma)(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{f}\|_0 + h^m(\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m))\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}. \tag{4.30}$$

证明 由 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon,h}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \nabla \nabla \times \mathbf{w})_K + (\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \nabla \times \mathbf{w}) \\
&\quad - \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle_F - \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle_F \\
&\quad + \varepsilon^2 \sigma \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \langle \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \nabla \times \mathbf{w} \rangle_F \\
&=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式、(2.12) 及 (4.3), 有

$$J_1, J_2, J_4, J_5 \lesssim (1 + \sigma)\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_{\varepsilon,h}\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}.$$

然后由 (4.13)–(4.15) 可得

$$J_1, J_2, J_4, J_5 \lesssim (1 + \sigma)(\varepsilon h^{s-1} + h^s)(\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s)\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}, \tag{4.32}$$

$$J_1, J_2, J_4, J_5 \lesssim (1 + \sigma)h^{1/2}\|\mathbf{f}\|_0\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}, \tag{4.33}$$

$$J_1, J_2, J_4, J_5 \lesssim (1 + \sigma)(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{f}\|_0 + h^m(\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m))\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}. \tag{4.34}$$

接下来估计 J_3 . 由 Cauchy-Schwarz 不等式、迹不等式 (2.11)、(4.3) 及 (3.20), 得到

$$\begin{aligned}
J_3 &\lesssim \varepsilon^2 \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \left\| \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \right\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F^{-1} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \varepsilon \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + h_K^2 \|\nabla(\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon,h}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \varepsilon h^{s-1} (\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s) \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon, h}. \quad (4.35)$$

由迹不等式 (2.11)、(3.20)、(2.12) 及 (2.13), 可得

$$\begin{aligned} J_3 &\lesssim \varepsilon^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\nabla(\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|\nabla(\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \|\nabla \times \mathbf{w}\|_0 \\ &\lesssim \varepsilon^2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \|\nabla \times \mathbf{w}\|_0 \\ &\lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon, h}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

我们强调, 如果 $\varepsilon \leq h$, 则上述估计意味着

$$J_3 \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon, h}. \quad (4.37)$$

此外, 如果 $h \leq \varepsilon$, 则当 $s = 2$ 时, 由 (4.35) 及 (2.13) 有

$$J_3 \lesssim \varepsilon h \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon, h} \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{w}\|_{\varepsilon, h}. \quad (4.38)$$

最后, 估计式 (4.28) 可由 (4.31)、(4.32) 及 (4.35) 得到, 估计式 (4.29) 可由 (4.31)、(4.33)、(4.37) 及 (4.38) 得到, 且估计式 (4.30) 可由 (4.31) 和 (4.34) 得到. $\square$

在前面的引理的帮助下, 可以证明本节的主要结果.

定理 4.1 假设 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ 且 $2 \leq s \leq k+1$, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\varepsilon, h} \lesssim (h^s + \varepsilon h^{s-1}) (\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s), \quad (4.39)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\varepsilon, h} \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (4.40)$$

进一步地, 如果退化问题的解满足 $\nabla \times \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ 且 $1 \leq m \leq k+1$, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\varepsilon, h} \lesssim (\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 + h^m (\|\bar{\mathbf{u}}\|_m + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_m)). \quad (4.41)$$

注 4.2 值得一提的是, 对于 $\varepsilon \ll h$, 估计式 (4.41) 给出了比 $h^{1/2}$ 更好的收敛阶.

证明 在 (4.12) 中令 $\tilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ 和 $\tilde{p}_h = 0$, 回顾 (4.8) 和 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h$, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\varepsilon, h} &\lesssim \sup_{(\mathbf{0}, 0) \neq (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{U}_h \times W_{h,0}} \frac{A_{\varepsilon, h}(\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon, h} + |q_h|_1} \\ &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_0 + \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \frac{A_{\varepsilon, h}(\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon, h}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

其中相容性误差被定义为

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = A_{\varepsilon, h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h). \quad (4.43)$$

在 (4.1) 的第一个等式的两边同时乘以 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$, 并由分部积分可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) &= \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \nabla \times \mathbf{v}_h)_K - \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}_h \right\rangle_F \\ &\quad - \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u}, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F + (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

将上式代入 (4.43) 可得

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \varepsilon^2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u}, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F. \quad (4.44)$$

根据文献 [28, 引理 3.2] 可得, 对于任意 $\chi \in \mathbf{P}^{k-1}(F)$, 都有

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u}, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F = \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u} - \chi, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F. \quad (4.45)$$

因此令 $\chi = \{\frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathcal{J}_h^N \mathbf{u}\}|_F$, 则有

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times \mathbf{u}, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F &= \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \nabla \times (\mathbf{u} - \mathcal{J}_h^N \mathbf{u}) \right\}, [\nabla \times \mathbf{v}_h] \right\rangle_F \\ &\lesssim \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\nabla \times \mathbf{u} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{u}) \right\} \right\|_{0,F} \|[\nabla \times \mathbf{v}_h]\|_{0,F}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

现在分别估计上述不等式右边的每一个因子. 注意到 $[\nabla \times \mathbf{v}_h]$ 的积分平均在 F 上为 0, 于是由 Poincaré 不等式可得

$$\|[\nabla \times \mathbf{v}_h]\|_{0,F} \lesssim h_F \|\nabla_F([\nabla \times \mathbf{v}_h])\|_{0,F},$$

其中 ∇_F 是 F 上的面梯度. 利用 (2.12) 得到

$$\|[\nabla \times \mathbf{v}_h]\|_{0,F} \lesssim h_F^{1/2} |\nabla \times \mathbf{v}_h|_{1,\mathcal{T}_F}. \quad (4.47)$$

由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\nabla \times \mathbf{u} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{u}) \right\} \right\|_{0,F} \\ &\lesssim h_F^{-1/2} |\nabla \times \mathbf{u} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{u}|_{1,\mathcal{T}_F} + |\nabla \times \mathbf{u} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{u}|_{1,\mathcal{T}_F}^{1/2} |\nabla \times \mathbf{u} - \mathcal{J}_h^M \nabla \times \mathbf{u}|_{2,n\mathcal{T}_F}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

由 (4.46)–(4.48) 和引理 3.1 有

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \lesssim \varepsilon h^{s-1} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s \|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}. \quad (4.49)$$

于是误差估计 (4.39) 可由 (4.42)、(4.28)、(4.49)、三角不等式及 (4.13) 得到.

类似可得

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \lesssim \varepsilon \|\nabla \times \mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}, \quad (4.50)$$

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \lesssim \varepsilon h \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}. \quad (4.51)$$

由此, 通过 (4.50)、(4.51) 和 (2.13) 可得

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)^{1/2} E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)^{1/2} \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}. \quad (4.52)$$

于是误差估计式 (4.40) 可由 (4.42)、(4.29)、(4.52) 及 (4.14) 得到.

最后, 由 (4.50) 及 (2.13) 有

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{v}_h\|_{\varepsilon,h}. \quad (4.53)$$

而估计式 (4.41) 可由 (4.42)、(4.30)、(4.53) 和 (4.15) 得到. $\square$

注 4.3 根据注 4.1, 有 $p_h = 0$. 类似地, 将 $\mathbf{v} = \nabla p$ 代入 (4.2) 也可以得到 $p = 0$. 因此无须对 Lagrange 乘子 p 作误差估计.

4.2 强加边界条件的情形

类似于奇异摄动四阶椭圆问题的非协调有限元方法 (如文献 [19, 26]), 也可以对 (4.1) 定义强加第二个边界条件的有限元方法. 尽管这种处理比前面介绍的方法更自然, 但是将会看到前面的方法的收敛性会更好一些.

在此情形下, 有限元方法可定义为: 求 $\mathbf{u}_h^0 \in \mathbf{U}_{h,n0}$ 和 $p_h^0 \in W_{h,0}$ 使得

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon,h}^0(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{v}_h, \nabla p_h^0) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_{h,0}, \\ (\mathbf{u}_h^0, \nabla q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in W_{h,0}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

其中

$$A_{\varepsilon,h}^0(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \nabla \times \mathbf{w}_h)_K + (\nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{w}_h). \quad (4.55)$$

定义与 $\mathbf{U}_{h,0}$ 相关的范数

$$\|\mathbf{v}_h\|_A^2 := A_{\varepsilon,h}^0(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \|\mathbf{v}_h\|_0^2. \quad (4.56)$$

离散问题 (4.54) 的适定性可类似引理 4.1 和 4.12 得到.

接下来, 给出与引理 4.3 类似的结果.

引理 4.5 令 $\mathbf{u}$ 是 (4.1) 的解, 当 $2 \leq s \leq k+1$ 时满足 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ 和 $\nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, 且 $\mathbf{I}_h^0$ 是引理 3.2 给出的算子, 则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u}\|_A \lesssim (h^s + \varepsilon h^{s-1})(\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s), \quad (4.57)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u}\|_A \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (4.58)$$

证明 不等式 (4.57) 可用引理 3.2 中类似的方法得到.

考虑 (4.58). 类似 (4.17) 可得

$$\varepsilon^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \lesssim \varepsilon^2 h \|\mathbf{u}\|_2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_2 \lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2.$$

接下来估计 $\|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_0$. 利用三角不等式可得

$$\|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_0 \leq \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_0 + \|\nabla \times (\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_0.$$

注意到上面不等式右端第一项已在 (4.14) 得到. 由 $\mathbf{I}_h$ 和 $\mathbf{I}_h^0$ 的定义, 可以看到 $\mathbf{I}_h \mathbf{u}|_K = \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u}|_K$ 对于任意满足 $\partial K \cap \partial \Omega = \emptyset$ 的 $K \in \mathcal{T}_h$ 都成立. 因此, 由尺度论证, 有

$$\|\nabla \times (\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_{0,K} \lesssim \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{u})\|_{0,F}.$$

利用上面的不等式并回顾 $\nabla \times \mathbf{u}|_{\partial \Omega} = 0$, 可得

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times (\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \lesssim \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{u})\|_{0,F}^2$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{u} - \mathbf{u})\|_{0,F}^2.$$

通过加一项减一项适当的式子可得

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \mathbf{u} - \mathbf{u})\|_{0,F}^2 &\lesssim \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}))\|_{0,F}^2 \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})\|_{0,F}^2. \end{aligned}$$

利用迹不等式 (2.9)、(3.1)、(2.13) 和 (2.14), 得到

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}))\|_{0,F}^2 &\lesssim h \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_1 \lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2, \\ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} h_F \|\mathbf{n} \times \nabla \times (\mathcal{J}_h^N \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})\|_{0,F}^2 &\lesssim h \|\mathbf{f}\|_0^2. \end{aligned}$$

最后, 结合以上不等式得到 (4.58). $\square$

定理 4.2 在定理 4.1 的假设下, 有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^0\|_A \lesssim (h^s + \varepsilon h^{s-1})(\|\mathbf{u}\|_s + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_s), \quad (4.59)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^0\|_A \lesssim h^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0. \quad (4.60)$$

证明 在引理 4.5 的帮助下, 该定理可用类似定理 4.1 的方法证明. $\square$

注 4.4 注意到 $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^0$ 的误差没有类似 (4.41) 的估计. 这是因为无法得到类似 (4.15) 的估计. 通过仔细查看引理 4.3 的证明可以发现, 由于结果 (3.24), 我们无法得到关于 $\|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_0$ 的良好估计. 具体而言, 与 (4.24) 相比, 由 (3.24) 和 (2.13) 有

$$\begin{aligned} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{I}_h^0 \mathbf{u})\|_0 &\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - \nabla \times \mathbf{I}_h^0 (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h^0 \bar{\mathbf{u}})\|_0 \\ &\lesssim \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h^0 \bar{\mathbf{u}})\|_0 \\ &\lesssim \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{f}\|_0 + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h^0 \bar{\mathbf{u}})\|_0. \end{aligned}$$

然而, 由 (3.24) 只能推导出

$$\|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{I}_h^0 \bar{\mathbf{u}})\|_0 \lesssim \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}\|_0, \quad (4.61)$$

而从这一估计无法得到有用的信息.

以上讨论解释了弱处理边界条件的优势. 特别是, 如果 $\varepsilon \ll h$, 则由 (4.41) 能够得到关于能量范数更好的收敛阶 $O(h^m)$, 显然此收敛阶优于 $O(h^{1/2})$.

5 数值结果

本节提供了一些数值算例以验证定理 4.1 和 4.2 得到的收敛阶, 并用以解释弱处理第二个边界条件的优势; 也比较了本文的方法与非协调有限元方法^[32]. 本文的算法是基于 iFEM 程序包^[7]实现的. 为简便, 只考虑了 $k=1$ 的情形.

5.1 算例 1

考虑立方体区域 $\Omega = (0, 1)^3$ 上的奇异摄动四阶旋度问题 (4.1). 精确解为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x)^3 \sin(\pi y)^2 \sin(\pi z)^2 \cos(\pi y) \cos(\pi z) \\ \sin(\pi y)^3 \sin(\pi z)^2 \sin(\pi x)^2 \cos(\pi z) \cos(\pi x) \\ -2 \sin(\pi z)^3 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

且

$$\mathbf{f} = -\varepsilon^2 \nabla \times \Delta \nabla \times \mathbf{u} + (\nabla \times)^2 \mathbf{u}, \quad \sigma = 50.$$

虽然 $\mathbf{f}$ 依赖于 ε , 但此时收敛阶并不会受此影响, 这是因为 $\|\mathbf{u}\|_2$ 和 $\|\nabla \times \mathbf{u}\|_2$ 不依赖于 ε . 网格 $\mathcal{T}_h$ 是将立方体分割成 N^3 等分小立方体后再分割成 6 个四面体后得到的. 给定 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_h$, 考虑如下误差量:

$$\begin{aligned} E_{L^2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0}{\|\mathbf{u}\|_0}, \quad E_{\text{curl}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = \frac{\|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0}{\|\nabla \times \mathbf{u}\|_0}, \\ E_{\text{gc}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{\|\nabla_h \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0}{\|\nabla \nabla \times \mathbf{u}\|_0}, \\ E_{\varepsilon, h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{(\varepsilon^2 \|\nabla_h \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0^2 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0^2)^{1/2}}{\|\mathbf{u}\|_{\varepsilon, h}}, \\ E_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) &= \frac{(\varepsilon^2 \|\nabla_h \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0^2 + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_0^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0^2)^{1/2}}{\|\mathbf{u}\|_A}. \end{aligned}$$

表 1 记录了有限元方法 (4.5) 在 $\varepsilon = 10^{-2}$ 和 $\varepsilon = 10^{-5}$ 时的收敛结果. 可以看到能量范数的收敛阶是渐近最优的, 这证实了定理 4.1 的结果. 由于真解没有边界层, 因此还观察到了其他范数的收敛阶也是最优的.

表 1 算例 1: 非协调有限元方法 (4.5) 的数值结果

ε	h	$E_{L^2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\text{curl}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\text{gc}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\varepsilon, h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶
10^{-2}	0.2165	5.987E-02		8.934E-02		5.535E-01		1.129E-01	
	0.1732	3.900E-02	1.92	5.943E-02	1.83	4.327E-01	1.10	8.013E-02	1.54
	0.1443	2.733E-02	1.95	4.230E-02	1.87	3.545E-01	1.09	6.098E-02	1.50
	0.1237	2.018E-02	1.97	3.163E-02	1.89	3.006E-01	1.07	4.884E-02	1.44
	0.1083	1.550E-02	1.98	2.455E-02	1.90	2.613E-01	1.05	4.061E-02	1.38
	0.0962	1.227E-02	1.98	1.961E-02	1.90	2.314E-01	1.03	3.475E-02	1.33
	0.0866	9.953E-03	1.99	1.604E-02	1.91	2.078E-01	1.02	3.038E-02	1.28
10^{-5}	0.2165	5.777E-02		8.459E-02		7.187E-01		8.440E-02	
	0.1732	3.781E-02	1.90	5.546E-02	1.89	5.702E-01	1.04	5.534E-02	1.89
	0.1443	2.661E-02	1.93	3.901E-02	1.93	4.696E-01	1.06	3.892E-02	1.93
	0.1237	1.972E-02	1.94	2.887E-02	1.95	3.984E-01	1.07	2.881E-02	1.95
	0.1083	1.519E-02	1.96	2.221E-02	1.97	3.457E-01	1.06	2.216E-02	1.97
	0.0962	1.205E-02	1.97	1.760E-02	1.97	3.053E-01	1.05	1.756E-02	1.97
	0.0866	9.788E-03	1.97	1.429E-02	1.98	2.734E-01	1.05	1.426E-02	1.98

表 2 和 3 分别记录了非协调有限元方法 (4.54) 和文献 [32] 给出的非协调有限元方法在 $\varepsilon = 10^{-2}$ 和 $\varepsilon = 10^{-5}$ 下的数值结果. 其中 $\hat{\mathbf{u}}_h$ 是用文献 [32] 中的方法算出的数值解. 因为 $\|\mathbf{u}\|_2$ 和 $\|\nabla \times \mathbf{u}\|_2$ 不依赖于 ε , 可观察到表 2 中的所有范数的收敛阶都是最优的, 这与定理 4.2 的结论相符. 相比之下, 非协调有限元方法 [32] 的所有收敛阶都随着 ε 趋于 0 而变差.

虽然我们的有限元空间的局部自由度要多于文献 [32] (本文的是 28 个而文献 [32] 的是 20 个), 但是本文的方法关于 ε 是稳健的. 因此本文的方法在解奇异摄动四阶旋度问题时有一定优势.

表 2 算例 1: 非协调有限元方法 (4.54) 的数值结果

ε	h	$E_{L^2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{\text{curl}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{\text{gc}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶
10^{-2}	0.2165	6.055E-02		9.042E-02		5.678E-01		1.126E-01	
	0.1732	3.934E-02	1.93	6.001E-02	1.84	4.394E-01	1.15	7.953E-02	1.56
	0.1443	2.752E-02	1.96	4.261E-02	1.88	3.578E-01	1.13	6.027E-02	1.52
	0.1237	2.029E-02	1.98	3.178E-02	1.90	3.022E-01	1.10	4.808E-02	1.47
	0.1083	1.556E-02	1.99	2.461E-02	1.92	2.620E-01	1.07	3.983E-02	1.41
	0.0962	1.230E-02	1.99	1.961E-02	1.93	2.315E-01	1.05	3.395E-02	1.36
	0.0866	9.970E-03	2.00	1.600E-02	1.93	2.076E-01	1.04	2.957E-02	1.31
10^{-5}	0.2165	5.796E-02		8.535E-02		7.499E-01		8.515E-02	
	0.1732	3.789E-02	1.91	5.585E-02	1.90	5.903E-01	1.07	5.573E-02	1.90
	0.1443	2.665E-02	1.93	3.924E-02	1.94	4.835E-01	1.09	3.915E-02	1.94
	0.1237	1.974E-02	1.95	2.901E-02	1.96	4.086E-01	1.09	2.895E-02	1.96
	0.1083	1.520E-02	1.96	2.230E-02	1.97	3.535E-01	1.08	2.225E-02	1.97
	0.0962	1.206E-02	1.97	1.767E-02	1.98	3.115E-01	1.07	1.763E-02	1.98
	0.0866	9.792E-03	1.97	1.434E-02	1.98	2.784E-01	1.07	1.431E-02	1.98

表 3 算例 1: 非协调有限元方法 [32] 的数值结果

ε	h	$E_{L^2}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}_h)$	收敛阶	$E_{\text{curl}}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}_h)$	收敛阶	$E_{\text{gc}}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}_h)$	收敛阶	$E_A(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}_h)$	收敛阶
10^{-2}	0.2165	1.407E+00		9.889E-01		3.275E+00		1.062E+00	
	0.1732	1.340E+00	0.22	9.452E-01	0.20	3.856E+00	-0.73	1.050E+00	0.05
	0.1443	1.253E+00	0.37	8.864E-01	0.35	4.285E+00	-0.58	1.023E+00	0.14
	0.1237	1.159E+00	0.51	8.220E-01	0.49	4.586E+00	-0.44	9.878E-01	0.23
	0.1083	1.064E+00	0.64	7.574E-01	0.61	4.781E+00	-0.31	9.491E-01	0.30
	0.0962	9.737E-01	0.76	6.952E-01	0.73	4.894E+00	-0.20	9.092E-01	0.36
	0.0866	8.891E-01	0.86	6.369E-01	0.83	4.943E+00	-0.09	8.697E-01	0.42
10^{-5}	0.2165	1.604E+00		1.133E+00		3.903E+00		1.138E+00	
	0.1732	1.645E+00	-0.11	1.164E+00	-0.12	4.995E+00	-1.11	1.169E+00	-0.12
	0.1443	1.670E+00	-0.08	1.182E+00	-0.08	6.076E+00	-1.07	1.187E+00	-0.08
	0.1237	1.686E+00	-0.06	1.194E+00	-0.06	7.149E+00	-1.06	1.199E+00	-0.06
	0.1083	1.696E+00	-0.05	1.201E+00	-0.05	8.216E+00	-1.04	1.206E+00	-0.05
	0.0962	1.703E+00	-0.04	1.207E+00	-0.04	9.280E+00	-1.03	1.212E+00	-0.04
	0.0866	1.709E+00	-0.03	1.210E+00	-0.03	1.034E+01	-1.03	1.215E+00	-0.03

5.2 算例 2

算例 2 将展示在某些情形下, 弱施加第二个边界条件是非常有利的. 令退化问题 (1.4) 的精确解为

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x^2 y^2 z (x-1)^3 (y-1)^3 (z-1)^3}{4} - \frac{3 x^2 y^2 z^2 (x-1)^3 (y-1)^3 (z-1)^2}{8} \\ \frac{x^2 y z^2 (x-1)^3 (y-1)^3 (z-1)^3}{4} + \frac{3 x^2 y^2 z^2 (x-1)^3 (y-1)^2 (z-1)^3}{8} \end{pmatrix},$$

并令 $\mathbf{f} = (\nabla \times)^2 \bar{\mathbf{u}}$, $\sigma = 20$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $\Omega = (0, 1)^3$. 由于在上述右端项下本算例无法精确求出 (4.1) 的解 $\mathbf{u}$, 所以无法直接计算 $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$. 然而, 因为 $\varepsilon = 10^{-6}$ 非常小, 根据 (2.14) 及 (2.15), 可以利用退化问题的解来计算误差. 我们指出 $\nabla \times \mathbf{u}$ 有强烈的边界层. 实际上, 由 (4.1) 的第二个边界条件和简单计算可以看到 $\nabla \times \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ 且 $\nabla \times \bar{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} \neq 0$. 另外, 由 (2.14) 可知, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $\|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_0 \rightarrow 0$, 这表示 $\nabla \times \mathbf{u}$ 有强烈的边界层.

表 4 比较了误差 $E_{L^2}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$ 、 $E_{L^2}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$ 、 $E_{\text{curl}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$ 和 $E_{\text{curl}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$ 以及相关的收敛阶. 可以看到弱处理边界条件下所有误差都以最优阶收敛, 而强加边界条件下没有一个以最优阶收敛.

表 5 和 6 比较了子区域 $\Omega_0 = (0.125, 0.875)^3$ 中的误差

$$\begin{aligned} &E_{L^2, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h), \quad E_{\text{curl}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h), \quad E_{\text{gc}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h), \quad E_{\varepsilon, h, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h), \\ &E_{L^2, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0), \quad E_{\text{curl}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0), \quad E_{\text{gc}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0), \quad E_{A, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0) \end{aligned}$$

以及相应的收敛阶, 其中下标 Ω_0 表示只在 Ω_0 上求相关积分. 注意到 Ω_0 离边界层足够远. 因此精确解在 Ω_0 上非常光滑. 从表 5 和 6 可以发现, 对弱处理边界的情形, 所有收敛阶都是最优的. 然而, 对

表 4 算例 2: 在弱处理边界条件和强处理边界条件下当 $\varepsilon = 10^{-6}$ 时在 Ω 上的收敛情形

h	$E_{L^2}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\text{curl}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{L^2}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{\text{curl}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶
0.2165	4.199E-02		5.625E-02		9.971E-02		2.780E-01	
0.1732	2.745E-02	1.90	3.649E-02	1.94	7.798E-02	1.10	2.476E-01	0.52
0.1443	1.930E-02	1.93	2.553E-02	1.96	6.404E-02	1.08	2.256E-01	0.51
0.1237	1.429E-02	1.95	1.884E-02	1.97	5.434E-02	1.07	2.086E-01	0.51
0.1083	1.100E-02	1.96	1.447E-02	1.98	4.720E-02	1.06	1.949E-01	0.51
0.0962	8.720E-03	1.97	1.146E-02	1.98	4.173E-02	1.05	1.836E-01	0.51
0.0866	7.082E-03	1.98	9.294E-03	1.99	3.739E-02	1.04	1.741E-01	0.51

表 5 算例 2: 在弱处理边界条件下当 $\varepsilon = 10^{-6}$ 时在 Ω_0 上的收敛情形

h	$E_{L^2, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\text{curl}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\text{gc}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶	$E_{\varepsilon, h, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h)$	收敛阶
0.2165	2.298E-02		4.251E-02		4.687E-01		4.227E-02	
0.1732	1.484E-02	1.96	2.677E-02	2.07	3.605E-01	1.18	2.663E-02	2.07
0.1443	9.678E-03	2.34	1.807E-02	2.16	2.831E-01	1.33	1.797E-02	2.16
0.1237	7.024E-03	2.08	1.312E-02	2.08	2.385E-01	1.11	1.305E-02	2.08
0.1083	5.916E-03	1.29	1.086E-02	1.42	2.264E-01	0.39	1.080E-02	1.42
0.0962	4.666E-03	2.02	8.459E-03	2.12	1.977E-01	1.15	8.413E-03	2.12
0.0866	3.619E-03	2.41	6.713E-03	2.19	1.722E-01	1.31	6.675E-03	2.20

表 6 算例 2: 在强处理边界条件下当 $\varepsilon = 10^{-6}$ 时在 Ω_0 上的收敛情形

h	$E_{L^2, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{\text{curl}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{\text{gc}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶	$E_{A, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$	收敛阶
0.2165	6.063E-02		5.792E-02		5.178E-01		5.797E-02	
0.1732	4.576E-02	1.26	3.862E-02	1.82	3.804E-01	1.38	3.874E-02	1.81
0.1443	3.669E-02	1.21	2.855E-02	1.66	2.875E-01	1.53	2.869E-02	1.65
0.1237	3.050E-02	1.20	2.256E-02	1.53	2.396E-01	1.18	2.271E-02	1.52
0.1083	2.889E-02	0.40	2.074E-02	0.63	2.275E-01	0.39	2.089E-02	0.62
0.0962	2.506E-02	1.21	1.748E-02	1.45	1.981E-01	1.17	1.762E-02	1.45
0.0866	2.211E-02	1.19	1.503E-02	1.43	1.725E-01	1.31	1.516E-02	1.43

强加边界条件的情形, 除 $E_{\text{gc}, \Omega_0}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_h^0)$ 外, 没有一个收敛阶是最优的. 由此可知, 当强加边界条件时, 即使离边界很远的区域, 边界层的出现也会污染有限元解的精度. 在奇异摄动四阶椭圆问题中也有类似的现象被报道过 (参见文献 [11, 20]).

上述讨论解释了对问题 (4.1) 的边界条件进行弱处理的优势.

致谢 感谢两位审稿人对于本文提出的宝贵意见和建议, 这些意见和建议对于完善论文的内容和结构起到了积极的作用.

参考文献

- Boffi D, Brezzi F, Fortin M. Mixed Finite Element Methods and Applications. Berlin-Heidelberg: Springer, 2013
- Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd ed. Texts in Applied Mathematics, vol. 15. New York: Springer, 2008
- Cakoni F, Haddar H. A variational approach for the solution of the electromagnetic interior transmission problem for anisotropic media. Inverse Probl Imaging, 2007, 1: 443–456
- Cao S, Chen L, Huang X. Error analysis of a decoupled finite element method for quad-curl problems. J Sci Comput, 2022, 90: 29
- Chen G, Cui J, Xu L. A hybridizable discontinuous Galerkin method for the quad-curl problem. J Sci Comput, 2021, 87: 16–23
- Chen G, Qiu W, Xu L. Analysis of an interior penalty DG method for the quad-curl problem. IMA J Numer Anal, 2021, 41: 2990–3023
- Chen L. iFEM: An innovative finite element methods package in MATLAB. University of Maryland, <https://www.math.uci.edu/~chenlong/Papers/iFEMpaper.pdf>, 2008
- Ern A, Guermond J L. Mollification in strongly Lipschitz domains with application to continuous and discrete de Rham complexes. Comput Methods Appl Math, 2016, 16: 51–75
- Ern A, Guermond J L. Finite Elements I—Approximation and Interpolation. Texts in Applied Mathematics, vol. 72. Cham: Springer, 2021
- Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- Guzmán J, Leykekhman D, Neilan M. A family of non-conforming elements and the analysis of Nitsche's method for a singularly perturbed fourth order problem. Calcolo, 2012, 49: 95–125
- Guzmán J, Neilan M. A family of nonconforming elements for the Brinkman problem. IMA J Numer Anal, 2012, 32: 1484–1508
- Hong Q G, Hu J, Shu S, et al. A discontinuous Galerkin method for the fourth-order curl problem. J Comput Math, 2012, 30: 565–578
- Hu K, Zhang Q, Zhang Z. Simple curl-curl-conforming finite elements in two dimensions. SIAM J Sci Comput, 2020, 42: A3859–A3877
- Hu K, Zhang Q, Zhang Z. A family of finite element Stokes complexes in three dimensions. SIAM J Numer Anal, 2022, 60: 222–243
- Huang X. Nonconforming finite element Stokes complexes in three dimensions. Sci China Math, 2023, 66: 1879–1902
- Huang X, Zhang C. Robust mixed finite element methods for a quad-curl singular perturbation problem. arXiv:

- 2206.10864, 2022
- 18 Monk P, Sun J. Finite element methods for Maxwell's transmission eigenvalues. *SIAM J Sci Comput*, 2012, 34: B247–B264
 - 19 Nilssen T K, Tai X C, Winther R. A robust nonconforming H^2 -element. *Math Comp*, 2001, 70: 489–505
 - 20 Semper B. Conforming finite element approximations for a fourth-order singular perturbation problem. *SIAM J Numer Anal*, 1992, 29: 1043–1058
 - 21 Sun J. Iterative methods for transmission eigenvalues. *SIAM J Numer Anal*, 2011, 49: 1860–1874
 - 22 Sun J. A mixed FEM for the quad-curl eigenvalue problem. *Numer Math*, 2016, 132: 185–200
 - 23 Sun J, Zhang Q, Zhang Z. A curl-conforming weak Galerkin method for the quad-curl problem. *BIT*, 2019, 59: 1093–1114
 - 24 Sun Z, Gao F, Wang C, et al. A quadratic C^0 interior penalty method for the quad-curl problem. *Math Model Anal*, 2020, 25: 208–225
 - 25 Wang C, Wang J, Zhang S. Weak Galerkin finite element methods for quad-curl problems. *J Comput Appl Math*, 2023, 428: 115186
 - 26 Wang M, Xu J C, Hu Y C. Modified Morley element method for a fourth order elliptic singular perturbation problem. *J Comput Math*, 2006, 24: 113–120
 - 27 Xie X, Xu J, Xue G. Uniformly-stable finite element methods for Darcy-Stokes-Brinkman models. *J Comput Math*, 2008, 26: 437–455
 - 28 Zhang B J, Zhang Z M. A new family of nonconforming elements with $H(\text{curl})$ -continuity for the 3D quad-curl problem. *Commun Comput Phys*, 2023, 33: 1069–1089
 - 29 Zhang Q, Wang L, Zhang Z. $H(\text{curl}^2)$ -conforming finite elements in 2 dimensions and applications to the quad-curl problem. *SIAM J Sci Comput*, 2019, 41: A1527–A1547
 - 30 Zhang Q, Zhang Z. Curl-curl conforming elements on tetrahedra. *arXiv:2007.10421v2*, 2022
 - 31 Zhang S. Mixed schemes for quad-curl equations. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2018, 52: 147–161
 - 32 Zheng B, Hu Q, Xu J. A nonconforming finite element method for fourth order curl equations in $\mathbb{R}^3$. *Math Comp*, 2011, 80: 1871–1886

Nonconforming finite element approximations and the analysis of Nitsche's method for a singularly perturbed quad-curl problem in three dimensions

Baiju Zhang & Zhimin Zhang

Abstract We introduce and analyze a robust nonconforming finite element method for a three-dimensional singularly perturbed quad-curl model problem. For the solution of the model problem, we derive proper *a priori* bounds, based on which we prove that the proposed finite element method is robust with respect to the singular perturbation parameter ε and the numerical solution is uniformly convergent with order $h^{1/2}$. In addition, we investigate the effect of treating the second boundary condition weakly by Nitsche's method. We show that such a treatment leads to sharper error estimates than imposing the boundary condition strongly when the parameter $\varepsilon < h$. Finally, numerical experiments are provided to illustrate the good performance of the method and confirm our theoretical predictions.

Keywords quad-curl problem, singular perturbation, nonconforming finite element, Nitsche's method

MSC(2020) 65N30, 65N15, 41A25

doi: 10.1360/SCM-2022-0676