



综述

极小超曲面的陈省身问题和陈省身猜想

献给彭家贵教授 80 寿辰

成庆明^{1*}, 魏国新²

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Fukuoka University, Fukuoka 814-0180, Japan;

2. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631

E-mail: cheng@fukuoka-u.ac.jp, weiguoxin@tsinghua.org.cn

收稿日期: 2024-03-22; 接受日期: 2024-06-13; 网络出版日期: 2024-07-17; * 通信作者

日本学术振兴会基金 (批准号: 22K03303)、福冈大学基金 (批准号: 225001)、国家自然科学基金 (批准号: 12171164) 和广东省自然科学基金 (批准号: 2023A1515010510) 资助项目

摘要 单位球面中紧致极小超曲面的陈省身问题和陈省身猜想是微分几何中最重要的研究课题之一. 本文介绍单位球面中紧致极小超曲面的陈省身问题和陈省身猜想的研究进展以及最新的研究现状.

关键词 极小超曲面 陈省身猜想 数量曲率 广义极大值原理

MSC (2020) 主题分类 53C42

1 引言

令 $S^{n+1}(1)$ 为 $n+1$ 维单位球面, 考虑 $n+1$ 维单位球面中的极小超曲面. 通过计算单位球面中极小超曲面的第二基本形式模长平方 S 的 Laplace, Simons^[25] 证明了对于 $n+1$ 维单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S \leq n$, 则 $S \equiv 0$ 或者 $S \equiv n$. Chern 等^[9] 证明了 Clifford 环 $S^m(\sqrt{\frac{m}{n}}) \times S^{n-m}(\sqrt{\frac{n-m}{n}})$, $1 \leq m \leq n-1$ 是单位球面中满足 $S \equiv n$ 的唯一的极小超曲面 (参见文献 [16]). Chern 等^[9] 还提出了下面的重要问题 (参见文献 [35]):

陈省身问题 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 下面的结论是否成立?

- (1) $S \leq c(n)$, 其中 $c(n)$ 是一个只依赖于 n 的常数;
- (2) 第二基本形式模长平方 S 的值是离散的;
- (3) 在相差一个刚体运动下, S 的值可以完全决定这个超曲面.

由 Simons^[25] 的结果可知, 如果 $S \leq n$, 则 $S = 0$ 或者 $S = n$. 著名的陈省身猜想表述如下:

陈省身猜想 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S > n$, 则 $S \geq 2n$.

英文引用格式: Cheng Q-M, Wei G X. Chern problems and Chern conjecture for minimal hypersurfaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 131–144, doi: 10.1360/SSM-2024-0077

注 1.1 对于陈省身问题和陈省身猜想, 数量曲率是常数这一条件是必要的. 事实上, Otsuki^[21]证明了单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中存在很多紧致的极小超曲面满足 $n - \epsilon_1 < S < n + \epsilon_2$, 其中 $\epsilon_1 > 0$ 和 $\epsilon_2 > 0$.

本文介绍关于单位球面中紧致极小超曲面的陈省身问题和陈省身猜想的进展.

2 基本公式

令 M^n 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的 n 维超曲面. 选取一个局部单位正交标架 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}\}$, 它的对偶标架为 $\{\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$, 使得 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ 是 M^n 的局部正交标架. 限制在 M^n 上,

$$\omega_{n+1} = 0.$$

因此有

$$\omega_{n+1,i} = \sum_{j=1}^n h_{ij}\omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

M^n 的平均曲率 H 和第二基本形式 $\vec{\alpha}$ 定义如下:

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{ii}, \quad \vec{\alpha} = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j \vec{e}_{n+1}.$$

如果 $H \equiv 0$, 则称 M^n 为极小超曲面. 由 M^n 的结构方程可以得到如下的 Gauss 方程、Codazzi 方程和 Ricci 公式:

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \quad (2.1)$$

$$h_{ijk} = h_{ikj},$$

$$\begin{aligned} h_{ijkl} - h_{ijlk} &= \sum_m h_{im}R_{mjkl} + \sum_m h_{mj}R_{mikl}, \\ h_{ijklm} - h_{ijkml} &= \sum_a h_{ajk}R_{ailm} + \sum_a h_{iak}R_{ajlm} + \sum_a h_{ija}R_{aklm}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $h_{ijk} = \nabla_k h_{ij}$ 、 $h_{ijkl} = \nabla_l h_{ijk}$ 和 $h_{ijklm} = \nabla_m h_{ijkl}$.

对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的极小超曲面, 从 (2.1) 可知, 数量曲率 r 为

$$r = n(n-1) - S,$$

其中 S 是 M^n 的第二基本形式模长的平方. 从上述公式可知, r 是常数当且仅当 S 是常数.

定义函数 f_3 和 f_4 如下:

$$f_3 = \sum_{i,j,k=1}^n h_{ij}h_{jk}h_{ki}, \quad f_4 = \sum_{i,j,k,l=1}^n h_{ij}h_{jk}h_{kl}h_{li}.$$

对于极小超曲面, 有

$$\frac{1}{3}\Delta f_3 = (n-S)f_3 + 2C, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{4}\Delta f_4 = (n-S)f_4 + (2A+B), \quad (2.4)$$

其中

$$C = \sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2, \quad A = \sum_{i,j,k} \lambda_i^2 h_{ijk}^2, \quad B = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j h_{ijk}^2,$$

λ_i 是 M^n 的主曲率. 如果第二基本形式的模长平方 S 是常数, 则有

$$\begin{aligned} \sum_i h_{ii} &= \sum_i \lambda_i = 0, \quad S = \sum_{i,j} h_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2, \\ \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= S(S-n), \quad \sum_p h_{ijpp} = (n-S)h_{ij}, \\ h_{ijij} - h_{jiji} &= (\lambda_i - \lambda_j)(1 + \lambda_i \lambda_j), \end{aligned} \quad (2.5)$$

并且,

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 + S(S-n)(2n+3-S) + 3(2B-A) = 0. \quad (2.6)$$

3 陈省身猜想

本节讨论陈省身猜想, 现在复述如下:

陈省身猜想 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S > n$, 则 $S \geq 2n$.

3.1 一般情形

Peng 和 Terng^[23] 是最先开始研究陈省身猜想的数学家并取得了如下突破性的成果:

定理 3.1 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S > n$, 则

$$S \geq n + \frac{1}{12n}.$$

证明 最主要的想法是证明如下的一些估计:

- (1) $A - 2B \leq S(S-n)$;
- (2) 存在一点 p 和一个主曲率 λ_k 满足不等式

$$f_3 \lambda_k - S \lambda_k^2 \geq -\frac{2}{3n} S^2;$$

- (3) $\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq \frac{3}{2S} \sum (S + f_3 \lambda_k - S \lambda_k^2)^2$.

由 (2.6), 可以得到

$$S(S-n)(4S-2n-3) \geq \frac{3}{2} S \left(1 - \frac{2}{3n} S\right)^2.$$

因此,

$$S > n + \frac{1}{12n}.$$

证毕. □

特别地, 当 $n=3$ 时, Peng 和 Terng^[23] 解决了陈省身猜想, 得到了如下定理:

定理 3.2 对于单位球面 $S^4(1)$ 中的具有常数量曲率的 3 维紧致极小超曲面, 如果 $S > 3$, 则 $S \geq 6$.

证明 当 $n = 3$ 时,

$$f_4 = \frac{1}{2}S^2.$$

定理证明的主要想法如下:

(1) 根据 $f_4 = \frac{1}{2}S^2$, 证明

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \leq 3S(S-3)^2;$$

(2) 应用极大值原理, 证明存在一点 q 满足 $f_3(q) = 0$;

(3) 在 q 点, $\lambda_1 = -\lambda_3 = -\sqrt{\frac{S}{2}}$, $\lambda_2 = 0$ 并且

$$\sum_{i,j} h_{ij2}^2 \geq \frac{1}{3}S(S-3);$$

(4) 在 q 点, 证明

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 \geq \frac{6}{S} \left(\frac{1}{3}S(S-3)^2 + \frac{1}{2}S \right)^2 + \frac{3}{4}S(S^2 - 4S + 6).$$

这样就可以得到

$$S(S-6)(19S-42) \geq 0.$$

因此, 如果 $S > 3$, 则 $S \geq 6$. □

关于陈省身猜想, 对于 $n \geq 4$ 的情形, Yang 和 Cheng^[31-33] 作出了重要突破. 他们证明了如下定理:

定理 3.3 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S > n$, 则

$$S \geq n + \frac{1}{3}n.$$

证明 为了证明定理, 首先, 将 h_{ijkl} 对称化并记为 u_{ijkl} , 则

$$u_{ijkl} := \frac{1}{4}(h_{ijkl} + h_{jkli} + h_{klij} + h_{lijk}).$$

可以得到

$$\sum_{i,j,k,l} h_{ijkl}^2 = \sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 + \frac{3}{2}\{Sf_4 - f_3^2 - 2S^2 + nS\}. \quad (3.1)$$

令 $S - n = tS$ 且定义函数 f 如下:

$$Sf = Sf_4 - f_3^2 - \frac{S^3}{n}.$$

我们能证明如下的不等式:

$$\sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 \geq \frac{1}{2}Sf - 2A + \frac{t}{1-t} \left(2 + \frac{1}{2}t \right) S^2$$

$$+ \frac{4}{tS^2} \sum_i \lambda_i^2 \left(\sum_j \lambda_j^2 h_{jji} \right)^2 + \frac{1}{S} f_3 \sum_{i,j,k} 2\lambda_i h_{ijk}^2 + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 \right)^2. \quad (3.2)$$

从而

$$\begin{aligned} S(S-n)(S-2n-3) + 3(A-2B) &\geq 2Sf - 2A + 2t(1+t) \frac{S^3}{n} + \frac{4}{tS^2} \sum_i \lambda_i^2 \left(\sum_j \lambda_j^2 h_{jji} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{S} f_3 \sum_{i,j,k} 2\lambda_i h_{ijk}^2 + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

为了证明定理, 需要证明下面的引理. 对任意一点 $p \in M^n$, 定义

$$\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i, \quad \lambda_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i. \quad (3.4)$$

引理 3.1 如果 M^n 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中具有常数量曲率的极小超曲面, 则对任意一点 p , 有

$$\begin{aligned} f &\geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{S}{n} + \lambda_1 \lambda_2 \right)^2, \\ 3(A-B) &\leq (1-\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 t S^2 \leq \left(S + 2 \left\{ \frac{Sf + \frac{S^3}{n}}{4} \right\}^{\frac{1}{3}} \right) (1-\alpha) t S^2, \\ \sum_k \left(\sum_i \lambda_i^2 h_{iik} \right)^2 &\leq \frac{1+2\alpha}{3} t S^2 f, \\ \left(\sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 \right)^2 &\leq \left[\frac{1}{3} (A+2B) - \frac{4}{3} \sum_k \frac{n+2}{(n+2)S + 2n\lambda_k^2} \left(\sum_i \lambda_i^2 h_{iik} \right)^2 \right] t S^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中非负常数 α 满足 $\alpha \leq 1$ 且 $\alpha t S^2 = \sum_i h_{iii}^2$.

引理 3.2 令 M^n 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面. 如果 $S > n$, 并且 $u > 0$, $c_0 \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$,

$$(\beta + t)c_0 u = (u - 1 + uc_0)^2,$$

则存在一点 $p_0 \in M^n$ 使得, 在 p_0 点处,

$$\begin{aligned} &tS^2 \left(S - 2n - 3 - 2(1+t) \frac{S}{n} - (\beta - 1 - 4u) \frac{S}{n} \right) \\ &\geq \{1 + \beta - (3+t)u\} Sf - \left(4 + \frac{4}{3}\beta - 5u \right) (A-B) \\ &\quad + \left\{ 4\sqrt{\frac{2(n+2)\beta}{3nt}} - \frac{2(n+2)}{nt} - 3(c_0 + 1)u \right\} \frac{1}{S} \sum_j \left(\sum_i \lambda_i^2 h_{ijj} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由 (3.3)、引理 3.1 和 3.2, 通过冗长的计算, 可以证明

$$S \geq n + \frac{n}{3}.$$

证毕. □

3.2 f_3 为常数时的陈省身猜想

由第 3.1 小节知, 陈省身猜想在 $n = 3$ 时已经由 Peng 和 Terng^[23] 解决. 对于 $n \geq 4$ 的情形, 虽然有部分结果, 但是陈省身猜想还没被解决. 当 $n = 4$ 时, Lusala 等^[18] 在 $f_3 = 0$ 且数量曲率非负的假设条件下解决了陈省身猜想. 后来, Deng 等^[11] 在 $f_3 = 0$ 的条件下证明了数量曲率是非负的, 从而在 $f_3 = 0$ 的假设条件下解决了陈省身猜想.

定理 3.4 对于单位球面 $S^5(1)$ 中的具有常数量曲率且 $f_3 = 0$ 的 4 维紧致极小超曲面, 如果 $S > 4$, 则 $S \geq 12$.

注 3.1 这里的 $f_3 = 0$ 当且仅当极小超曲面是 Willmore 超曲面, 即极小超曲面是 Willmore 泛函的临界点 (参见文献 [17]).

对于更一般的情形, $n \geq 4$ 且 f_3 是常数的情形, Yang 和 Cheng^[33] 证明了下面的结果:

定理 3.5 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率且 f_3 为常数的 n 维紧致极小超曲面, 如果 $S > n$, 则

$$S \geq n + \frac{2}{3}n.$$

最近, Cheng 等^[8] 改进了 Yang 和 Cheng^[33] 的结果, 他们证明了如下定理:

定理 3.6 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率且 f_3 为常数的 n 维完备极小超曲面, 如果 $S > n$, 则 $S \geq 1.8252n - 0.712898$.

注 3.2 在上面的定理中, 只需要假设极小超曲面是完备的, 完备是比紧致更弱的一个拓扑条件.

定理 3.6 的证明 因为 f_3 是常数, 所以有

$$tSf_3 = 2C,$$

并且可以证明, 对于任意 α , 都有

$$\sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 \geq 2\alpha \left(2B + A - 2\frac{f_3}{S}C - \frac{t}{1-t}S^2 \right) - 2\alpha^2 Sf + \frac{C^2}{S^2} + \frac{t}{2(1-t)}tS^2, \quad (3.7)$$

且

$$Sf + \frac{t}{1-t}S^2 = Sf_4 - f_3^2 - S^2 = A - 2B. \quad (3.8)$$

从

$$S(S-n)(S-2n) = \sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 + \frac{3}{2}S(S-n) - \frac{3}{2}(A-2B), \quad (3.9)$$

可以得到如下结论:

注 3.3 如果能证明

$$\sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 + \frac{3}{2}S(S-n) - \frac{3}{2}(A-2B) \geq 0,$$

则陈省身猜想在 f_3 为常数的条件下就解决了.

因为 S 是常数, 由 Gauss 方程可知 Ricci 曲率是有下界的. 对函数 f_4 , 利用 Omori^[20] 和 Yau^[34] 的广义极大值原理, 可知存在点列 $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset M^n$ 满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(p_m) = \sup f_4, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_4(p_m)| = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \Delta f_4(p_m) \leq 0.$$

因为 S 是常数, 对于任意 i, j, k 和 l , $\{\lambda_i(p_m)\}$ 、 $\{h_{ijk}(p_m)\}$ 和 $\{h_{ijkl}(p_m)\}$ 是有界的序列, 则可以假设

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_i(p_m) = \bar{\lambda}_i, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijk}(p_m) = \bar{h}_{ijk} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijkl}(p_m) = \bar{h}_{ijkl}.$$

以下的计算都是对 $\bar{\lambda}_i$ 、 $\bar{h}_{ijk}$ 和 $\bar{h}_{ijkl}$ 来说的. 为简单起见, 去掉 $\bar{\cdot}$. 我们有

$$tSf_4 \geq 2A + B$$

和

$$tf_3^2 \geq (2-t)A + (1+2t)B - tS^2. \quad (3.10)$$

因为

$$C^2 = \left(\sum_{i,j,k} \lambda_i h_{ijk}^2 \right)^2 \leq \frac{1}{3}(A+2B)tS^2, \quad (3.11)$$

令 $\alpha = -\frac{3-4t}{2}$, 得到

$$\sum_{i,j,k,l} u_{ijkl}^2 - \frac{3}{2}(A-2B) + \frac{3}{2}S(S-n) \geq \frac{4t^2-9t+3}{3(1-t)}(A-B) - 2t \frac{t}{1-t} S^2,$$

即

$$S(S-n)(S-2n) \geq \frac{4t^2-9t+3}{3(1-t)}(A-B) - 2t \frac{t}{1-t} S^2 \quad (3.12)$$

和

$$t > \frac{9-\sqrt{33}}{8}.$$

从 $A-B \leq \frac{2}{3}tS^3$ 和 (3.12), 可以证明

$$S > \frac{\sqrt{465}-7}{8}n - \frac{9}{4} \left(1 - \frac{\sqrt{465}}{31} \right) \approx 1.82048n - 0.684881. \quad (3.13)$$

为了证明定理, 需要对 $A-B$ 作一个更优的估计. 根据 h_{ijk} 的对称性, 可知

$$\begin{aligned} 3(A-B) &= \sum_{i \neq j \neq k \neq i} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - \lambda_i \lambda_j - \lambda_i \lambda_k - \lambda_j \lambda_k) h_{ijk}^2 \\ &\quad + 3 \sum_{i \neq j} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i \lambda_j) h_{iij}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

因为, 对任意的 i 和 j , 都有

$$-\lambda_i \lambda_j \leq \frac{1}{4}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

且对 3 个不同的 i, j 和 k , 可知 $\lambda_i \lambda_j$ 、 $\lambda_i \lambda_k$ 和 $\lambda_j \lambda_k$ 中至少有一个是非负的. 我们可以证明

$$3(A-B) \leq \left(S + 2 \left\{ \frac{Sf + \frac{S^3}{n}}{4} \right\}^{\frac{1}{3}} \right) \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \left(S + 2 \left\{ \frac{Sf + \frac{S^3}{n}}{4} \right\}^{\frac{1}{3}} \right) tS^2. \quad (3.15)$$

根据

$$S-n = tS, \quad (1-t)Sf \leq \frac{1}{3}(A-B), \quad A-B \leq \frac{2}{3}tS^3 \quad (3.16)$$

和 a_k 的定义

$$a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 1 + 2 \left(\frac{1}{36} \frac{t}{1-t} a_k + \frac{1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.17)$$

可得

$$3(A - B) \leq a_{k+1} t S^3.$$

从 (3.12) 以及上面的估计, 得到

$$S > 1.8252n - 0.712898. \quad (3.18)$$

证毕. □

4 陈省身问题

本节讨论陈省身问题:

陈省身问题 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的具有常数量曲率的 n 维紧致极小超曲面, 下面的结论是否成立?

- (1) $S \leq c(n)$, 其中 $c(n)$ 是一个只依赖于 n 的常数;
- (2) 第二基本形式模长平方 S 的值是离散的;
- (3) 在相差一个刚体运动下, S 的值可以完全决定这个超曲面.

4.1 3 维时的陈省身问题

对于 $n = 3$ 的情形, Peng 和 Terng^[22] 证明了如下定理:

定理 4.1 令 M^3 是 4 维单位球面中的具有常数量曲率的紧致极小超曲面. 若每一点处, M^3 都有 3 个不同的主曲率, 则 $S = 6$ 且 M^3 是 Cartan 等参极小超曲面.

证明 因为 $n = 3$, 所以 $f_4 = \frac{1}{2}S^2$ 和 $f_3 = 3(\lambda_i^2 - \frac{S}{2})\lambda_i$. 由于 M^3 是紧致的, 所以存在点 p , 使得 f_3 在 p 点处达到最大值, 即 $f_3(p) = \max f_3$. 为了证明定理, 下面分 4 个步骤.

(1) 因为 M^3 是极小的并且在每一点处都有 3 个不同主曲率, 不妨设 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. 又因为 S 是常数, 在点 p 处, 可以证明如下结论:

- $h_{iik} = 0$ 对于任意 i 和 k 成立, 且 $h_{123} = \frac{1}{6}S(S - 3)$;
- $h_{iijk} = 0$, $h_{iiik} = 0$ 和 $h_{kiii} = 0$ 对于任意 $i \neq j \neq k \neq i$ 成立;
-

$$3 \sum_{i,j} h_{iijj}^2 - 2 \sum_i h_{iiiii}^2 = 3S(S - 3)^2. \quad (4.1)$$

(2) 因为 f_3 在 p 点取得最大值, 所以 $\Delta f_3 \leq 0$. 由 $f_3 = 3(\lambda_i^2 - \frac{S}{2})\lambda_i$, 对于任意 i , 可以证明

$$f_3(p) > 0, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad \frac{S}{6} < \lambda_1^2 < \frac{S}{2}, \quad 0 < \lambda_2^2 < \frac{S}{2}.$$

(3) 因为对于任意 j , 都有

$$\begin{cases} \sum_i h_{iijj}(p) = 0, \\ \sum_i h_{iijj}(p)\lambda_i = -\sum_{i,k} h_{ikj}^2 = -\frac{1}{6}S(S-3), \end{cases}$$

其中 $h_{iijj} = h_{jjii} + (1 + \lambda_i \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)$, 所以通过求解上面的方程组, 可以得到

$$h_{iijj} = -\frac{1}{3}(S-3)\lambda_i + g_i \lambda_j + Z g_i g_j,$$

其中

$$g_i = \lambda_i^2 - \frac{f_3}{S} \lambda_i - \frac{S}{3}, \quad \forall i,$$

Z 是一个常数.

(4) 从第 3 步和 (4.1), 有

$$Z \left(\frac{S^2}{6} - \frac{f_3(p)^2}{S} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{S} \right) f_3(p) \pm \sqrt{\frac{f_3(p)^2}{S^2} \left(\frac{19}{9} S^2 - \frac{8}{3} S + 1 \right) + \frac{7}{9} S(S-6) \left(S - \frac{15}{7} \right)}.$$

由 $f_3 = 3(\lambda_i^2 - \frac{S}{2})\lambda_i$, 对于任意 i 和

$$\frac{1}{3} \nabla_j \nabla_j f_3(p) = \sum_i h_{iijj} \lambda_i^2 + \sum_{i,k} h_{ikj}^2 (\lambda_i + \lambda_k) \leq 0,$$

可以证明 f_3 是常数.

从而可知, M^3 是具有 3 个不同主曲率的等参极小超曲面. 因此, $S = 6$ 且 M^3 是 Cartan 等参极小超曲面. $\square$

根据定理 4.1, 为了解决 3 维时的陈省身问题, 只需要证明如果有一个点 p 处的不同主曲率个数是 2, 则 $S = 3$ (参见文献 [3]).

定理 4.2 令 M^3 是 4 维单位球面中的具有常数量曲率的极小超曲面. 如果点 $p \in M^3$ 处的不同主曲率个数是 2, 则 $S = 3$ 且 M^3 局部上是 Clifford 极小超曲面.

证明 因为 M^3 在点 p 有 2 个不同的主曲率, 可以假设 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ 且 $\lambda_3 = -2\lambda_1$, $S = 6\lambda_1^2$. 因为 M^3 是极小的且 S 是常数, 所以可得 $h_{11k} = -h_{22k}$ 且 $h_{33k} = 0$. 因为 $\lambda_1 = \lambda_2$, 可以假设 $h_{123} = 0$. 定义

$$a = h_{113}^2, \quad b = h_{111}^2 + h_{112}^2,$$

可以得到

$$6a + 4b = S(S-3).$$

(1) 证明如下结论:

• h_{ijkl} 关于指标 $\{i, j, k, l\}$ 是对称的, 除非 $\{i, j, k, l\}$ 是 $\{1, 1, 3, 3\}$ 或者 $\{2, 2, 3, 3\}$ 的置换;

•

$$h_{3311} = h_{3322} = \frac{2}{3\lambda_1}(a+b), \quad h_{3333} = \frac{2a}{3\lambda_1}, \quad h_{3312} = 0, \quad h_{3313} = \frac{2}{3\lambda_1}h_{113}h_{111},$$

$$h_{1111} = h_{2222}, \quad h_{1133} = h_{2233} = -\frac{a}{3\lambda_1}, \quad h_{3323} = \frac{2}{3\lambda_1}h_{113}h_{112}.$$

(2) 通过计算 $\sum_{i,j,k} h_{ijk1}^2$ 、 $\sum_{i,j,k} h_{ijk2}^2$ 和 $\sum_{i,j,k} h_{ijk3}^2$, 可以证明

$$x + 2y = \frac{26}{9}a^2 + \frac{7}{18}ab - b^2 - \frac{5}{4}Sb,$$

其中

$$x = \lambda_1^2(3h_{1123}^2 + 3h_{2213}^2 + h_{1113}^2 + h_{2223}^2) \quad \text{和} \quad y = \lambda_1^2(h_{1111}^2 + h_{1112}^2).$$

(3) 根据 Ricci 恒等式, 通过计算 $\sum_{i,j,k} h_{ijk}(h_{33ijk} - h_{ijk33})$, 可得

$$x + 4a\lambda_1 h_{1111} = -\frac{34}{9}a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{3}b^2 + \lambda_1^2(72\lambda_1^2 - 18)a + \lambda_1^2(40\lambda_1^2 - 8)b.$$

根据步骤 (2) 和 (3) 的断言, 可以证明 $a = b = 0$, 即 $S = 3$. 由 Chern 等^[9]的结果可知, M^3 局部上是 Clifford 环. $\square$

注 4.1 由定理 4.1 和 4.2 可知, 3 维的陈省身问题已经解决 (参见文献 [2]).

4.2 4 维时的陈省身问题

对于 $n = 4$, Deng 等^[11]研究了陈省身问题并且在 $f_3 = 0$ 的条件下回答了陈省身问题. 事实上, 他们证明了如下定理:

定理 4.3 对于单位球面 $S^5(1)$ 中的具有常数量曲率的 4 维紧致 Willmore 极小超曲面, S 满足 $S \leq 12$.

由上述定理和 Gauss 方程可知, 数量曲率是非负的, 再根据 Lusala 等的结果, 可得如下定理:

定理 4.4 对于单位球面 $S^5(1)$ 中的具有常数量曲率的 4 维紧致 Willmore 极小超曲面, $S = 0, 4, 12$ 且 M^4 是下列之一:

- (1) $S^4(1)$;
- (2) Clifford 环 $S^2(\sqrt{\frac{1}{2}}) \times S^2(\sqrt{\frac{1}{2}})$;
- (3) 具有 4 个不同主曲率的 Cartan 极小超曲面.

最近, Cheng 和 Wei^[7]在更弱的拓扑条件下, 即完备的条件下, 通过利用 Omori 和丘成桐的广义极大值原理证明了如下定理:

定理 4.5 对于单位球面 $S^5(1)$ 中的具有常数量曲率且 $f_3 = 0$ 的 4 维完备的极小超曲面, S 满足 $S \leq 12$.

证明 因为 $f_3 = \sum_i \lambda_i^3 \equiv 0$, 所以有

$$\lambda_1 + \lambda_4 = -(\lambda_2 + \lambda_3) = 0.$$

因为数量曲率是常数, 所以由 Gauss 方程可知 M^4 的截面曲率是有界的. 对函数 f_4 利用 Omori^[20] (参见文献 [34]) 的广义极大值原理, 存在点列 $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset M^4$ 满足

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f_4(p_m) &= \sup f_4, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} |\nabla f_4(p_m)| &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \nabla_l \nabla_l f_4(p_m) &\leq 0, \quad l = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{4.2}$$

从 (2.4) 和 (2.5) 可知, 对于任意 i, j, k 和 l , $\{\lambda_i(p_m)\}$ 、 $\{h_{ijk}(p_m)\}$ 和 $\{h_{ijkl}(p_m)\}$ 是有界的序列. 这样, 可以假设 (如果有必要, 可以取 $\{p_m\}$ 的子点列)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_i(p_m) = \hat{\lambda}_i, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijk}(p_m) = \hat{h}_{ijk}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_{ijkl}(p_m) = \hat{h}_{ijkl}, \quad \forall i, j, k, l.$$

从现在开始, 为方便起见, 关于 $\hat{\lambda}_i$ 、 $\hat{h}_{ijk}$ 和 $\hat{h}_{ijkl}$ 的所有计算, 本文都去掉 $\hat{\cdot}$.

因为 $\lambda_1 + \lambda_4 = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, 如果 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则有

$$\sup f_4 = \sup \left(\frac{S^2}{4} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \right) = \frac{S^2}{4} = \inf f_4,$$

我们知道 $f_4 \equiv \frac{S^2}{4}$ 是常数且在任意点 $\lambda_1 = \lambda_2$. 在这种情形下, $S = 4$. 因此, M^4 是 Clifford 环.

以下假设 $\lambda_1 < \lambda_2$. 因此,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4, \quad \lambda_1 + \lambda_4 = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0.$$

令 $\lambda_1^2 = t\lambda_2^2$ 和 $a = \frac{1}{\lambda_2^2}$. 若 $S > 12$, 则

$$t > 1, \quad a < \frac{1+t}{6}.$$

为了证明定理, 下面分为 4 个步骤.

(1) 因为 M^4 是 Willmore 极小且 $S > 4$ 是常数, 所以由 (4.2) 可知

$$\begin{cases} \sum_i h_{iik} = 0, \\ \sum_i \lambda_i h_{iik} = 0, \\ \sum_i \lambda_i^2 h_{iik} = 0, \\ \sum_i \lambda_i^3 h_{iik} = 0. \end{cases}$$

因此, 对于任意 $i, k = 1, 2, 3, 4$, 都有 $h_{iik} = 0$.

(2) 通过直接计算可知

$$h_{1234} = 0, \quad h_{123}h_{124}h_{134}h_{234} = 0.$$

不妨假设 $h_{123} = 0$ 或 $h_{134} = 0$.

(3) 若 $h_{123} = 0$, 根据

$$\begin{cases} h_{123}^2 + h_{124}^2 + h_{134}^2 + h_{234}^2 = \frac{1}{6}S(S-4), \\ \lambda_4 h_{123}^2 + \lambda_3 h_{124}^2 + \lambda_2 h_{134}^2 + \lambda_1 h_{234}^2 = 0, \\ \lambda_4^2 h_{123}^2 + \lambda_3^2 h_{124}^2 + \lambda_2^2 h_{134}^2 + \lambda_1^2 h_{234}^2 = \frac{1}{9}S^2(S-4) - \frac{1}{6}\{Sf_4 - S^2\}, \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} h_{124}^2 + h_{134}^2 + h_{234}^2 = \frac{1}{6}S(S-4), \\ \lambda_3 h_{124}^2 + \lambda_2 h_{134}^2 + \lambda_1 h_{234}^2 = 0, \\ \lambda_3^2 h_{124}^2 + \lambda_2^2 h_{134}^2 + \lambda_1^2 h_{234}^2 = \frac{1}{9}S^2(S-4) - \frac{1}{6}\{Sf_4 - S^2\}. \end{cases}$$

通过解方程组可知, 若 $S > 12$, 则

$$2h_{134}^2 = -\frac{2(t+1)}{9(\sqrt{t}-1)}\{(t^2+8t+1)-3\sqrt{t}(t+1)-(5t+5-6\sqrt{t})a\}\lambda_2^4 < 0. \quad (4.3)$$

这是不可能的.

(4) 若 $h_{134} = 0$, 则

$$\begin{cases} h_{123}^2 + h_{124}^2 + h_{234}^2 = \frac{1}{6}S(S-4), \\ \lambda_4 h_{123}^2 + \lambda_3 h_{124}^2 + \lambda_1 h_{234}^2 = 0, \\ \lambda_4^2 h_{123}^2 + \lambda_3^2 h_{124}^2 + \lambda_1^2 h_{234}^2 = \frac{1}{9}S^2(S-4) - \frac{1}{6}\{Sf_4 - S^2\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

通过解线性方程组可知

$$\begin{aligned} 2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)h_{123}^2 &= \frac{5S^2}{72}(S-4) - \frac{S}{6}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \frac{S}{6}(S-4)\lambda_1\lambda_2, \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)h_{124}^2 &= \frac{S}{6}\left[\left(\lambda_1^2 - \frac{5S}{12}\right)(S-4) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2\right], \\ 2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)h_{234}^2 &= \frac{5S^2}{72}(S-4) - \frac{S}{6}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + \frac{S}{6}(S-4)\lambda_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

通过直接计算有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_1\nabla_4f_4 &= -Sh_{123}h_{234}, \\ \frac{1}{4}\Delta f_4 &= \frac{8}{3}(S-6)\lambda_1^2\lambda_2^2 - \frac{S^2}{18}(S-10). \end{aligned} \quad (4.6)$$

从

$$\frac{1}{16}(\Delta f_4)^2 \geq \frac{1}{16}\{\nabla_1\nabla_1f_4 + \nabla_4\nabla_4f_4\}^2 \geq \frac{1}{4}\nabla_1\nabla_1f_4 \cdot \nabla_4\nabla_4f_4 \geq \frac{1}{4}(\nabla_1\nabla_4f_4)^2,$$

得到

$$\begin{aligned} &\frac{16(t+1)^2}{81}\left\{-t^2+10t-1+(5t^2-26t+5)\frac{a}{t+1}\right\}^2 \\ &\geq \frac{16(t+1)^4}{81t(t-1)}\{[t^2+8t+1-5(t+1)a]^2-9t(t+1-2a)^2\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

如果 $S > 12$, 则上述不等式不成立.

因此, 得到 $S \leq 12$. □

注 4.2 关于单位球面中的不假设数量曲率是常数的 n 维紧致极小超曲面的刚性研究, 参见文献 [3, 4, 12, 13, 26, 30]. 关于单位球面中的 n 维紧致 (或完备) 的常平均曲率超曲面的刚性研究, 参见文献 [1, 5–7, 10, 14, 15, 19, 24, 27–29].

致谢 作者感谢审稿专家的宝贵意见.

参考文献

- 1 Barbosa J L, do Carmo M. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. Math Z, 1984, 185: 339–353
- 2 Chang S P. On minimal hypersurfaces with constant scalar curvatures in S^4 . J Differential Geom, 1993, 37: 523–534

- 3 Cheng Q M. The rigidity of Clifford torus $S^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$. *Comment Math Helv*, 1996, 71: 60–69
- 4 Cheng Q M, Ishikawa S. A characterization of the Clifford torus. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 127: 819–828
- 5 Cheng Q M, Nakagawa H. Totally umbilic hypersurfaces. *Hiroshima Math J*, 1990, 20: 1–10
- 6 Cheng Q M, Wan Q R. Hypersurfaces of space forms $M^4(c)$ with constant mean curvature. In: *Geometry and Global Analysis* (Sendai, 1993). Sendai: Tohoku Univ, 1993, 437–442
- 7 Cheng Q M, Wei G. Complete hypersurfaces with w -constant mean curvature in the unit spheres. *Trans Amer Math Soc*, 2024, 377: 887–904
- 8 Cheng Q M, Wei G, Yamashiro T. Chern conjecture on minimal hypersurfaces. *arXiv:2104.14057*, 2021
- 9 Chern S S, do Carmo M, Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. In: *Functional Analysis and Related Fields*. Berlin: Springer-Verlag, 1970, 59–75
- 10 de Almeida S C, Brito F G B. Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature. *Duke Math J*, 1990, 61: 195–206
- 11 Deng Q, Gu H, Wei Q. Closed Willmore minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in $S^5(1)$ are isoparametric. *Adv Math*, 2017, 314: 278–305
- 12 Ding Q, Xin Y L. On Chern’s problem for rigidity of minimal hypersurfaces in the spheres. *Adv Math*, 2011, 227: 131–145
- 13 Ge J Q, Tang Z Z. Chern conjecture and isoparametric hypersurfaces, *Differential Geometry*. In: *Advanced Lectures in Mathematics*, vol. 22. Somerville: Int Press, 2012, 49–60
- 14 Gu J, Xu H, Xu Z, et al. A survey on rigidity problems in geometry and topology of submanifolds. In: *Proceedings of the 6th International Congress of Chinese Mathematicians*. *Advanced Lectures in Mathematics*, vol. 37. Beijing-Boston: Int Press, 2017, 79–99
- 15 Guo Z, Li H. A variational problem for submanifolds in a sphere. *Monatsh Math*, 2007, 152: 295–302
- 16 Lawson H B Jr. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann of Math* (2), 1969, 89: 187–197
- 17 Li H. Willmore hypersurfaces in a sphere. *Asian J Math*, 2001, 5: 365–377
- 18 Lusala T, Scherfner M, Souise L A M Jr. Closed minimal Willmore hypersurfaces of $S^5(1)$ with constant scalar curvature. *Asian J Math*, 2005, 9: 65–78
- 19 Okumura M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *Amer J Math*, 1974, 96: 207–213
- 20 Omori H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J Math Soc Japan*, 1967, 19: 205–214
- 21 Otsuki T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. *Amer J Math*, 1970, 92: 145–173
- 22 Peng C K, Teng C L. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres. *Math Ann*, 1983, 266: 105–113
- 23 Peng C K, Teng C L. Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature. In: *Seminar on Minimal Submanifolds*. Princeton: Princeton Univ Press, 1983, 179–198
- 24 Scherfner M, Weiss S, Yau S-T. A review of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres. In: *Advanced Lectures in Mathematics (ALM)*, vol. 21. Somerville: Int Press, 2012, 175–187
- 25 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math* (2), 1968, 88: 62–105
- 26 Suh Y J, Yang H Y. The scalar curvature of minimal hypersurfaces in a unit sphere. *Commun Contemp Math*, 2007, 9: 183–200
- 27 Tang Z Z, Wei D, Yan W J. A sufficient condition for a hypersurface to be isoparametric. *Tohoku Math J* (2), 2020, 72: 493–505
- 28 Tang Z Z, Yan W J. On the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces. *Sci China Math*, 2023, 66: 143–162
- 29 Xu H W. A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature in a sphere. *Arch Math*, 1993, 61: 489–496
- 30 Xu H W, Xu Z Y. On Chern’s conjecture for minimal hypersurfaces and rigidity of self-shrinkers. *J Funct Anal*, 2017, 273: 3406–3425
- 31 Yang H C, Cheng Q M. A note on the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere. *Chin Sci Bull*, 1991, 36: 1–6
- 32 Yang H C, Cheng Q M. An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere. *Manuscripta Math*, 1994, 84: 89–100
- 33 Yang H C, Cheng Q M. Chern’s conjecture on minimal hypersurfaces. *Math Z*, 1998, 227: 377–390
- 34 Yau S-T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm Pure Appl Math*, 1975, 28: 201–228
- 35 Yau S-T. Problem section. In: *Seminar on Differential Geometry*. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 102. Princeton: Princeton Univ Press, 1982, 699–706

Chern problems and Chern conjecture for minimal hypersurfaces

Qing-Ming Cheng & Guoxin Wei

Abstract It is well known that Chern problems and Chern conjecture for n -dimensional compact minimal hypersurfaces in the unit sphere are very important subjects in differential geometry. In this paper, we give a survey of research on Chern problems and Chern conjecture for n -dimensional compact minimal hypersurfaces in the unit sphere. We describe the recent progress of study on Chern problems and Chern conjecture.

Keywords minimal hypersurface, Chern conjecture, scalar curvature, the generalized maximum principle

MSC(2020) 53C42

doi: 10.1360/SSM-2024-0077