



不具有稳定性质的 4-一致超图族

献给刘桂真教授 80 寿辰

张一泉, 李恒*, 侯建锋

福州大学离散数学与理论计算机科学研究中心, 福州 350108

E-mail: fzzyx@gmail.com, hengli.fzu@gmail.com, jfhou@fzu.edu.cn

收稿日期: 2023-03-24; 接受日期: 2024-01-17; 网络出版日期: 2024-03-20; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2023YFA1010202) 和国家自然科学基金 (批准号: 12071077) 资助项目

摘要 不同于图的情形, 对于正整数 $r \geq 3$ 和一些经典的 r -一致超图族 $\mathcal{M}$, 顶点数固定条件下边数最多的不含 $\mathcal{M}$ 的 r -一致超图 (称为 $\mathcal{M}$ 的极图) 可能不止一个, 而且这些超图在距离上相距较远, 这种现象被称为不稳定性, 也是确定此类超图 Turán 数的基本障碍. Liu 和 Mubayi (2022) 给出了第一个具有不稳定性质的 3-一致超图族的例子. 对于 $r \geq 4$, 通过具有不稳定性质的 3-一致超图族可以构造具有同样性质的 r -一致超图族. 本文构造第一个不依赖于 3-一致超图的 4-一致超图族 $\mathcal{M}$, 使得 $\mathcal{M}$ 有两个在距离上相距较远的极图. 同时, 本文证明相应的 Andrásfai-Erdős-Sós 型稳定性定理: 任意最小度接近于极图平均度的不含 $\mathcal{M}$ 的 4-一致超图一定是这两个极图中一个的子图. 此外, 作为本文结果的推论, 本文还证明了 $\mathcal{M}$ 的可行域具有两个最大值点.

关键词 超图 Turán 数 稳定性 可行域

MSC (2020) 主题分类 05C35, 05C65, 05D05

1 引言

1.1 Turán 数和稳定性

设 r 是至少为 2 的正整数, 如果超图 $\mathcal{H}$ 的边集是由有限点集 V 的一些 r 元子集构成的集合族, 则称 $\mathcal{H}$ 为 r -一致超图 (或者 r -图), 其中 V 称为 $\mathcal{H}$ 的顶点集. 为了方便, 用 $v(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的顶点数, $\mathcal{H}$ 表示其边集. 设 F 和 $\mathcal{H}$ 均为 r -图, 如果 $\mathcal{H}$ 的任何子图都不同构于 F , 则称 $\mathcal{H}$ 不含 F ; 反之, 称 $\mathcal{H}$ 包含 F 的拷贝. 设 $\mathcal{F}$ 为一族 r -图构成的图族, 如果对于任意 $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ 都不含 F , 则称 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{F}$. 超图族 $\mathcal{F}$ 的 Turán 数, 记为 $\text{ex}(n, \mathcal{F})$, 定义为具有 n 个顶点的不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图所能含有的最大边数. 定义

$$\pi(\mathcal{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{r}}$$

英文引用格式: Zhang Y X, Li H, Hou J F. A family of 4-uniform hypergraphs with no stability (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1905–1924, doi: 10.1360/SSM-2023-0059

为 $\mathcal{F}$ 的 Turán 密度. Katona 等^[12] 证明了该极限是存在的. 如果 $\pi(\mathcal{F}) > 0$, 则称 $\mathcal{F}$ 是非退化的, 否则称 $\mathcal{F}$ 是退化的. 若 n 个顶点不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图 $\mathcal{H}$ 边数达到 $\text{ex}(n, \mathcal{F})$, 则称 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$ 的极图.

Turán 问题是极值组合研究中的核心问题. 对于图 (即 $r = 2$ 时) 的 Turán 数的研究已经有许多丰富的研究成果. Mantel^[24] 证明了 n 个顶点且不包含三角形的图的边数最多为 $\lfloor n^2/4 \rfloor$, 并证明了平衡的完全二部图是边数达到最大时的唯一极图. Turán^[31] 将 Mantel 定理推广到完全图 $K_{\ell+1}$, 得到了著名的 Turán 定理: n 个顶点不含完全图 $K_{\ell+1}$ 的图的边数不超过 Turán 图 $T(n, \ell)$ 的边数, 其中 $T(n, \ell)$ 表示 n 个顶点的平衡完全 ℓ -部图.

与图相比, 超图 Turán 问题的已知结果非常少, 甚至确定超图的 Turán 密度都是一个极具挑战性的问题, 目前仍处于起步阶段. Turán^[31] 在解决了完全图的 Turán 数后, 提出了完全 r -图的 Turán 问题: 对于 $\ell > r \geq 3$, 确定 ℓ 个顶点的完全 r -图 K_ℓ^r 的 Turán 密度 $\pi(K_\ell^r)$. 对于该问题, 著名数学家 Erdős 为确定任意一个 $\pi(K_\ell^r)$ 的值悬赏 500 美金, 为确定所有的 $\pi(K_\ell^r)$ 悬赏 1000 美金. Turán^[31] 对完全 3-图的 Turán 密度有如下猜想.

猜想 1.1^[31] 对于正整数 $\ell \geq 3$, 有

$$\pi(K_{\ell+1}^3) = 1 - \frac{4}{\ell^2}.$$

猜想 1.1 远未解决, 甚至对最简单的 4 个顶点的完全 3-图 K_4^3 的情形, 虽然一直得到广泛的关注和研究 (参见文献 [2, 5, 15]), 但仍未完全解决. 其中, 最好的上界 $\pi(K_4^3) \leq 0.561666$ 由 Razborov^[29] 使用旗代数方法给出.

稳定性理论是 Turán 问题研究的核心, 它不仅能刻画顶点数为 n 、边数接近 $\text{ex}(n, \mathcal{F})$ 且不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图的结构, 而且也是确定 Turán 数的重要方法: 首先确定 Turán 数的渐近值, 然后证明稳定性定理, 最后使用稳定性定理来准确地确定 Turán 数. 第一个稳定性定理由 Erdős 和 Simonovits^[30] 给出, 并被用于确定边临界图的 Turán 数, 随后陆续被一些研究者 (参见文献 [1, 8, 9, 11, 14, 26, 27] 用于研究其他图和超图的极值问题).

定理 1.1^[30] 给定整数 $\ell \geq 2$, 对于任意 $\delta > 0$, 存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 $N_0 = N_0(\epsilon)$ 使得对于任意 $n > N_0$ 有以下结论成立: 若 G 是一个 n 个顶点不含 $K_{\ell+1}$ 的图, 且 G 至少有 $(1 - \epsilon)|T(n, \ell)|$ 条边, 则图 G 可以通过删去或增加至多 δn^2 条边转换为 Turán 图 $T(n, \ell)$.

不同于图或者图族的稳定性, 许多学者猜测存在不具有稳定性的超图或者超图族, 其原因在于可能存在图族 $\mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{M}$ 的极图不止一个, 且在距离上相距较远. 其中一个典型的例子便是 K_4^3 . Kostochka^[15] 证明了, 若猜想 1.1 对于 K_4^3 是正确的, 则至少存在 2^{n-2} 个具有 $3n$ 个顶点且彼此间相距较远的极图. 基于此, Mubayi^[25] 给出了如下定义.

定义 1.1 (稳定数) 给定正整数 $r \geq 2, t \geq 1$. 若存在 m_0 , 且对于所有正整数 $m \geq m_0$, 都存在 m 个顶点的 r -图 $\mathcal{G}_1(m), \dots, \mathcal{G}_t(m)$ 使得如下结论成立, 则称图族 $\mathcal{F}$ 是 t -稳定的: 对于任意 $\delta > 0$, 存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 N_0 使得对于所有正整数 $n > N_0$, 若 $\mathcal{H}$ 是一个 n 个顶点不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图, 且 $\mathcal{H}$ 的边数满足 $|\mathcal{H}| > (1 - \epsilon)\text{ex}(n, \mathcal{F})$, 则 $\mathcal{H}$ 可以通过增加或删去至多 δn^r 条边转换为某个 $\mathcal{G}_i(n)$. 若 $\mathcal{F}$ 是 1-稳定的, 则称 $\mathcal{F}$ 是稳定的. 定义 $\mathcal{F}$ 的稳定数, 记为 $\xi(\mathcal{F})$, 为使得 $\mathcal{F}$ 是 t -稳定的最小的正整数 t ; 若不存在这样的正整数 t , 则记 $\xi(\mathcal{F}) = \infty$.

对于图, 经典的 Erdős-Stone-Simonovits 定理^[3, 4] 和 Erdős-Simonovits 稳定性定理^[30] 表明每一个非退化的图族都是稳定的. 超图的不稳定性近两年才被证实, Liu 和 Mubayi^[19] 构造了稳定数为 2 的有限 3-图族, 这是第一个不稳定的例子. Zhang 等^[32] 在此基础上构造了 3-图中另一个稳定数为 2 的例子. 对于任意至少为 2 的正整数 t , Liu 等^[21] 构造了第一个稳定数为 t 的有限 3-图族. Liu 和

Mubayi^[19] 及 Liu 等^[21] 提出, 是否存在稳定数为无穷大的有限超图族? 近期 Hou 等^[10] 给出了有限 3- 图族 $\mathcal{M}$, 使得 $\xi(\mathcal{M}) = \infty$, 从而回答了该问题. Liu 和 Pikhurko^[22] 在文献 [28] 的基础上, 给出了第一个有指数多个极图的有限 3- 图族.

以往对不稳定的研究均在 3- 图族中. 文献 [10, 21] 指出, 利用简单的分析, 对于任意 $r \geq 4$, 通过不稳定的 3- 图族可以构造具有不稳定性的 r - 图族, 但是其构造结果单一. 很自然的问题是, 是否存在不依赖于 3- 图族的具有不稳定性的 r - 图族呢? 本文构造第一个不依赖于 3- 图且稳定数为 2 的有限 4- 图族, 并证明其 Andrásfai-Erdős-Sós 型稳定性定理.

为了介绍本文的主要定理, 首先需要一些定义. 设 $\mathcal{T}$ 为 s 个顶点的 r - 图, 令 $t = (t_1, \dots, t_s)$, 其中每个 t_i 都是一个正整数, $\mathcal{T}$ 的膨胀 (blow up) $\mathcal{T}(t)$ 是将 $\mathcal{T}$ 的每个点 i 替换为大小为 t_i 的点集, 并将 $\mathcal{T}$ 的每条边替换为相应的完全 r - 部 r - 图所得到的 r - 图. 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 为两个 r - 图, 若存在映射 $\phi: V(\mathcal{H}) \rightarrow V(\mathcal{G})$, 使得对于任意 $E \in \mathcal{H}$ 都有 $\phi(E) \in \mathcal{G}$, 则称 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ - 可染的, 并且称映射 ϕ 为从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{G}$ 的同态. 换言之, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ - 可染的当且仅当 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 的某个膨胀的子图. 若 4- 图 $\mathcal{H}$ 的点集可以划分成两个互不相交的非空子集 A 和 B , 使得 $\mathcal{H}$ 的每条边交 A 和 B 都恰好是两个点, 则称 $\mathcal{H}$ 是一个偶二部 4- 图. 令 $\mathcal{G}_8^2$ 表示顶点集为 $[8] = \{1, \dots, 8\}$ 、补图为 $\overline{\mathcal{G}_8^2} = \{1234, 5678, 1256, 3478, 1278, 3456\}$ 的 4- 图. 本文的主要结果如下:

定理 1.2 存在一个有限 4- 图族 $\mathcal{M}$, 使得以下结论成立.

(1) 存在正整数 N_0 , 使得对于所有正整数 $n > N_0$, 都有

$$\text{ex}(n, \mathcal{M}) \leq \frac{n^4}{64},$$

等号成立当且仅当 $8 \mid n$.

(2) 存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 N_0 , 使得对于所有正整数 $n > N_0$, 有以下结论成立: 设 $\mathcal{H}$ 是一个 n 个顶点不含 $\mathcal{M}$ 的 4- 图, 若 $\mathcal{H}$ 的最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \epsilon)n^3$, 则 $\mathcal{H}$ 或者是偶二部 4- 图或者是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的, 即表明 $\xi(\mathcal{M}) = 2$.

1.2 可行域

定理 1.2 还可以用来研究可行域问题. Liu 和 Mubayi^[18] 推广了著名的 Kruskal-Katona 定理, 提出了超图可行域的概念, 以便于更深刻地认识极图的结构. 下面先介绍其相关定义, 设 $\mathcal{H}$ 是 n 个点的 r - 图, $\mathcal{H}$ 的边密度定义为 $\rho(\mathcal{H}) = |\mathcal{H}| / \binom{V(\mathcal{H})}{r}$, 定义 $\mathcal{H}$ 的阴影为

$$\partial\mathcal{H} = \left\{ A \in \binom{V(\mathcal{H})}{r-1} : \text{存在 } B \in \mathcal{H} \text{ 使得 } A \subset B \right\}.$$

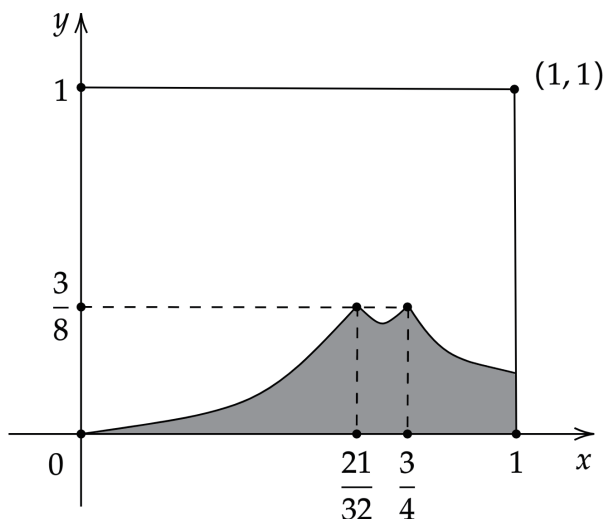
显然, $\partial\mathcal{H}$ 是一个 $(r-1)$ - 图.

设 $\mathcal{F}$ 为 r - 图族, 定义 $\mathcal{F}$ 的可行域 $\Omega(\mathcal{F})$ 为由 $[0, 1]^2$ 中所有满足如下条件的点 (x, y) 所构成的集合: 存在一个不含 $\mathcal{F}$ 的 r - 图序列 $(\mathcal{H}_k)_{k=1}^\infty$, 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(\mathcal{H}_k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\partial\mathcal{H}_k) = x, \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\mathcal{H}_k) = y.$$

用

$$\text{proj}\Omega(\mathcal{F}) = \{x : \text{存在 } y \in [0, 1] \text{ 使得 } (x, y) \in \Omega(\mathcal{F})\}$$


 图 1 $\mathcal{M}$ 的可行域函数 $g(\mathcal{M})$ 有两个最大值点

表示 $\mathcal{F}$ 可行域的定义域, 其最大的 x 取值记作 $c(\mathcal{F})$, 即 $\text{proj}\Omega(\mathcal{F}) = [0, c(\mathcal{F})]$. 此外, Liu 和 Mubayi^[18] 证明了存在一个左连续且几乎处处可微的函数 $g(\mathcal{F}): \text{proj}\Omega(\mathcal{F}) \rightarrow [0, 1]$, 使得

$$\Omega(\mathcal{F}) = \{(x, y) \in [0, c(\mathcal{F})] \times [0, 1]: 0 \leq y \leq g(\mathcal{F})(x)\},$$

并称 $g(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$ 的可行域函数. Liu [17] 及 Liu 和 Mubayi^[18] 分析了 $g(\mathcal{F})$ 的性质, 证明了 $g(\mathcal{F})$ 可能存在无穷多个局部最大值点, 同时猜想 $g(\mathcal{F})$ 可能存在无穷多个全局最大值点. 此问题被 Hou 等^[10] 解决. 利用定理 1.2, 可得如下结果 (如图 1 所示):

定理 1.3 我们有 $g(\mathcal{M})(x) \leq 3/8$, 此外, 等号成立当且仅当 $x = 21/32$ 或 $x = 3/4$.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节介绍 4- 图族 $\mathcal{M}$ 的构造, 第 3 节确定 $\mathcal{M}$ 的 Turán 数并给出定理 1.2(1) 的证明, 第 4 节讨论 $\mathcal{M}$ 的稳定性并证明定理 1.2(2), 第 5 节研究 $\mathcal{M}$ 的可行域并证明定理 1.3.

2 $\mathcal{M}$ 的构造

本节借助已有 4- 图的极图来构造定理 1.2 所需要的有限 4- 图族 $\mathcal{M}$. 首先介绍相关概念和记号. 对于正整数 n_1 , 记 $[n_1] := \{1, \dots, n_1\}$; 对于大于 n_1 的正整数 n_2 , 记 $[n_1, n_2] := \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$. 设 $\mathcal{H}$ 是 r - 图, 对于顶点 $v \in V(\mathcal{H})$, 点 v 在 $\mathcal{H}$ 中的链图 $L_{\mathcal{H}}(v)$ 为

$$L_{\mathcal{H}}(v) = \{A \in \partial\mathcal{H}: A \cup \{v\} \in \mathcal{H}\}.$$

点 v 在 $\mathcal{H}$ 中的度定义为 $d_{\mathcal{H}}(v) = |L_{\mathcal{H}}(v)|$, 即图 $\mathcal{H}$ 中包含点 v 的边的数目, 分别用 $\delta(\mathcal{H})$ 和 $\Delta(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 的最小度和最大度. 点 v 在 $\mathcal{H}$ 中的邻居 $N_{\mathcal{H}}(v)$ 定义为

$$N_{\mathcal{H}}(v) = \{u \in V(\mathcal{H}) \setminus \{v\}: \text{存在 } e \in \mathcal{H} \text{ 使得 } \{u, v\} \subseteq e\}.$$

当不会引起混淆时, 将省略下标 $\mathcal{H}$. 对于点集 A , 用 $\mathcal{H}[A]$ 表示 A 在 $\mathcal{H}$ 中的导出子图. 在不引起混淆时, 用 $F \subseteq \mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{H}$ 中包含一个 r - 图 F 的拷贝.

设 $\{u, v\}$ 是 r -图 $\mathcal{H}$ 中的一对顶点, 若存在某条边 $E \in \mathcal{H}$, 使得 $\{u, v\} \subseteq E$, 则称顶点对 $\{u, v\}$ 在图 $\mathcal{H}$ 中被覆盖. 对于顶点子集 $S \subseteq V(\mathcal{H})$, 如果 S 中的任意一个点对都被覆盖, 则称 S 是 2-覆盖的; 如果 $\mathcal{H}$ 中所有点对都被覆盖, 则称 $\mathcal{H}$ 为 2-覆盖的. 对于正整数 $\ell \geq r \geq 2$, 令 $\mathcal{K}_{\ell+1}^r$ 表示由所有满足如下条件边数不超过 $\binom{\ell+1}{2}$ 的 r -图 F 组成的 r -图族: F 包含一个大小为 $\ell+1$ 的顶点集 S , 称为核, 使得 S 中任意一对顶点在 F 中均被覆盖. 在此, 注意到 $\mathcal{K}_{\ell+1}^r$ 是一个有限超图族.

在引言中, 定义 $\mathcal{G}_8^2$ 是顶点集为 $[8] = \{1, \dots, 8\}$ 、补图为 $\overline{\mathcal{G}}_8^2 := \{1234, 5678, 1256, 3478, 1278, 3456\}$ 的 4-图. 下面介绍两个非常重要的超图类 (如图 2 所示), 它们在我们的证明中发挥着非常重要的作用.

定义 2.1 用 $\mathcal{G}_n^1$ 表示 n 个点的平衡的完全偶二部 4-图, 即其点集被分成大小分别为 $\lfloor n/2 \rfloor$ 和 $\lceil n/2 \rceil$ 的两个不交的部分 A 和 B , 其边集由所有交 A 和 B 都恰好为两个点的边构成. 对于 $n \geq 8$, 用 $\mathcal{G}_n^2$ 表示 n 个点的 $\mathcal{G}_8^2$ 边数最多的膨胀.

注 2.1 • 经过简单计算可知 $\mathcal{G}_n^2$ 每个部分的大小为 $\lfloor n/8 \rfloor$ 或者 $\lceil n/8 \rceil$.

• 对于 $i = 1, 2$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{G}_n^i|/n^4 = 1/64$.

• 现在说明需要在 $\mathcal{G}_n^1$ 中增加或者删除至少 $\Omega(n^4)$ 条边才可以得到 $\mathcal{G}_n^2$: 观察易知, $\mathcal{G}_n^1$ 中的每一对顶点都在 $\Omega(n^2)$ 条边上, 所以 $\partial(\partial\mathcal{G}_n^1)$ 是一个完全图. 另外, $\partial(\partial\mathcal{G}_n^2)$ 是一个完全 8-部图. 因此, 至少要删除 $\partial(\partial\mathcal{G}_n^1)$ 的 $(1 - \pi(K_9))\binom{n}{2} = \Omega(n^2)$ 条边才可以得到 $\partial(\partial\mathcal{G}_n^2)$. 又因为删除 $\partial(\partial\mathcal{G}_n^1)$ 中一条边需要删除 $\mathcal{G}_n^1$ 中 $\Omega(n^2)$ 条边, 所以需要改变 $\mathcal{G}_n^1$ 的 $\Omega(n^4)$ 条边才可以得到 $\mathcal{G}_n^2$.

下面介绍一个特殊的 4-图 $\mathcal{F}_7$, 其点集为 $\{1, 2, \dots, 7\}$, 边集为

$$\{1234, 1235, 1236, 4567\}.$$

Füredi 等^[7] 证明了如下 $\mathcal{F}_7$ 的度稳定性结果.

定理 2.1^[7] 存在 $\gamma > 0$ 和正整数 N_0 使得对于正整数 $n > N_0$, 有以下结论成立: 若 n 个顶点的 4-图 $\mathcal{H}$ 的最小度满足 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \gamma)n^3$, 则 $\mathcal{H}$ 或者包含一个 $\mathcal{F}_7$ 的拷贝或者是一个偶二部 4-图.

利用定理 2.1, Füredi 等^[7] 确定了当 n 充分大时 $\mathcal{F}_7$ 的 Turán 数.

定理 2.2^[7] 存在正整数 n_0 , 使得对于 $n > n_0$, 都有 $\text{ex}(n, \mathcal{F}_7) = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \binom{\lceil n/2 \rceil}{2}$, 并且 n 个点平衡的完全偶二部 4-图是唯一的极图.

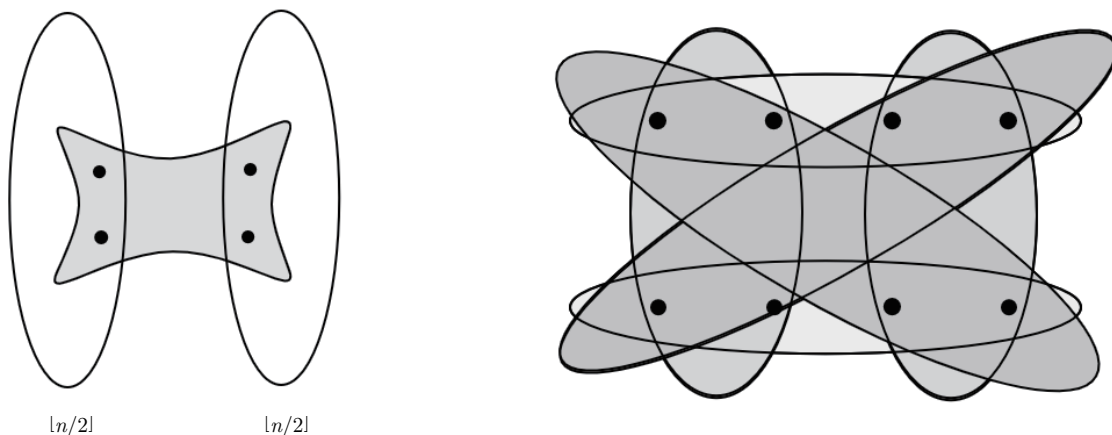


图 2 平衡的完全偶二部 4-图 $\mathcal{G}_n^1$ 和 $\mathcal{G}_n^2$ 的补图

有了以上准备知识, 下面来构造定理 1.2 所需要的有限 4- 图族 $\mathcal{M}$. 对于 $i = 1, 2$, 令

$$\mathcal{F}_\infty(\mathcal{G}_n^i) = \{4\text{-图 } F: \text{对所有正整数 } n, \mathcal{G}_n^i \text{ 都不含 } F\}.$$

对于正整数 m , 令

$$\mathcal{F}_m(\mathcal{G}_n^i) = \{F \in \mathcal{F}_\infty(\mathcal{G}_n^i): v(F) \leq m\}.$$

构造 4- 图族

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^1) \cap \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^2).$$

注 2.2 • 显然 $\mathcal{G}_8^2$ 的任何膨胀都不包含 $\mathcal{K}_9^4$ 中的任何一个图, 而 $\mathcal{K}_9^4$ 中图的点数至多为 81, 这是我们在 $\mathcal{M}$ 的构造中选择 $m = 81$ 的原因.

• 因为对于所有正整数 n , $\mathcal{G}_n^1$ 都不含 $\mathcal{F}_7$, 并且 $\mathcal{G}_n^2$ 不含 $\mathcal{K}_9^4$, 所以若存在 4- 图 $\mathcal{J} \in \mathcal{K}_9^4$ 使得 $\mathcal{J}$ 包含 $\mathcal{F}_7$ 的一个拷贝, 则 $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$.

3 $\mathcal{M}$ 的 Turán 数

在本节和后面章节中, 均令 $\mathcal{M}$ 为上一节定义的有限 4- 图族. 本节将利用超图的 Lagrange 来证明定理 1.2(1). 首先, 给出所需要的概念和引理. 设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 $[n]$ 的 r - 图, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}$ 的 Lagrange 函数定义为

$$p_{\mathcal{H}}(x) = \sum_{E \in \mathcal{H}} \prod_{i \in E} x_i.$$

令 Δ_{n-1} 为 $n-1$ 维标准单纯形, 即

$$\Delta_{n-1} = \left\{ x \in [0, 1]^n: \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

超图 $\mathcal{H}$ 的 Lagrange 函数, 记为 $\lambda(\mathcal{H})$, 定义为

$$\lambda(\mathcal{H}) = \max\{p_{\mathcal{H}}(x): x \in \Delta_{n-1}\}.$$

注意到 $p_{\mathcal{H}}(x)$ 是连续的, 并且 Δ_{n-1} 是紧的, 所以 $\lambda(\mathcal{H})$ 定义中最大值是存在的.

显然 $\lambda(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{H}$ 膨胀的边数密切相关, Frankl 和 Füredi^[6] 及 Keevash^[13] 分别独立地给出了如下引理:

引理 3.1 ^[6, 13] 设正整数 $r \geq 2$, $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个 r - 图, 如果 $\mathcal{G}$ 为顶点集 $[n]$ 上 $\mathcal{H}$ 的膨胀, 则 $|\mathcal{G}| \leq \lambda(\mathcal{H})n^r$.

下面计算两类特殊 4- 图的 Lagrange 函数.

引理 3.2 若 $\mathcal{H}$ 是 n 个点的完全偶二部 4- 图, 则 $\lambda(\mathcal{H}) < 1/64$.

证明 设图 $\mathcal{H}$ 的点集划分成两个部分 A_1 和 A_2 , 使得对于任意 $E \in \mathcal{H}$, 都有 $|E \cap A_1| = |E \cap A_2| = 2$, 不妨设 $A_1 = [s]$, $A_2 = [s+1, n]$. 对于 $x \in \Delta_{n-1}$, 令 $\sum_{i=1}^s x_i = a$, 则 $\sum_{i=s+1}^n x_i = 1 - a$. 根据 Maclaurin 不等式, 有

$$p_{\mathcal{H}}(x) = \left(\sum_{\{i,j\} \subseteq [s]} x_i x_j \right) \left(\sum_{\{k,\ell\} \subseteq [s+1,n]} x_k x_\ell \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \binom{s}{2} \left(\frac{a}{s}\right)^2 \binom{n-s}{2} \left(\frac{1-a}{n-s}\right)^2 \\
&< \frac{1}{4} a^2 (1-a)^2 \\
&\leq \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.3 对于图 $\mathcal{G}_8^2$, 有 $\lambda(\mathcal{G}_8^2) = 1/64$.

证明 对于 $x \in \Delta_7$, 令 $x_{2i-1} + x_{2i} = a_i$, 其中 $i \in [4]$. 我们有

$$\begin{aligned}
p_{\mathcal{G}_8^2}(x) &= \sum_{\{i,j,k,\ell\} \subset [8]} x_i x_j x_k x_\ell \\
&\quad - (x_1 x_2 x_3 x_4 + x_5 x_6 x_7 x_8 + x_1 x_2 x_5 x_6 + x_3 x_4 x_7 x_8 + x_1 x_2 x_7 x_8 + x_3 x_4 x_5 x_6) \\
&= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8) + \sum_{i=1}^4 \left(x_{2i-1} x_{2i} \sum_{\{j,k\} \subset [4] \setminus \{i\}} a_j a_k \right) \\
&\leq a_1 a_2 a_3 a_4 + \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{4} (x_{2i-1} + x_{2i})^2 \sum_{\{j,k\} \subset [4] \setminus \{i\}} a_j a_k \right) \tag{3.1a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 a_2 a_3 a_4 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left(a_i^2 \sum_{\{j,k\} \subset [4] \setminus \{i\}} a_j a_k \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_i (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4) \\
&= \frac{1}{4} (a_1 a_2 (a_3 + a_4) + a_3 a_4 (a_1 + a_2)) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} (a_1 + a_2)^2 (a_3 + a_4) + \frac{1}{4} (a_3 + a_4)^2 (a_1 + a_2) \right) \tag{3.1b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} (a_1 + a_2)(a_3 + a_4) \\
&\leq \frac{1}{64} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \tag{3.1c} \\
&= \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

不等式 (3.1a)–(3.1c) 均来自于基本不等式, 此外, 等号成立当且仅当对于 $i \in [8]$, 有 $x_i = 1/8$. □

为了更简洁地证明定理 1.2(1), 还需要以下定义和结果. 设 F 和 $\mathcal{H}$ 均为 r -图, 如果不存在从 F 到 $\mathcal{H}$ 的同态映射, 则称 $\mathcal{H}$ 不含 F 的同态. 换言之, $\mathcal{H}$ 不含 F 的同态当且仅当 $\mathcal{H}$ 的任意膨胀都不含 F . 不难看出, 如果 r -图 F 是 2-覆盖的, 则 $\mathcal{H}$ 不含 F 等价于 $\mathcal{H}$ 不含 F 的同态. 设 $\mathcal{F}$ 为非空有限 r -图族, 如果对于任意 $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ 都不含 F 的同态, 则称 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{F}$ 的同态.

定义 3.1 (膨胀不变性) 设 $\mathcal{F}$ 是有限 r -图族, 如果不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图都不含 $\mathcal{F}$ 的同态, 则称 $\mathcal{F}$ 是膨胀不变的.

作为文献 [22, 引理 15] 的特例, 有如下引理:

引理 3.4 4-图族 $\mathcal{M} = \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^1) \cap \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^2)$ 是膨胀不变的.

当计算膨胀不变的超图族的 Turán 数时, 只需要考虑具有等价关系的超图的边数, 下面详细说明. 给定 r -图 $\mathcal{H}$ 中的 u 和 v 两点, 若 $\{u, v\}$ 不包含在 $\mathcal{H}$ 的任何一条边中且 $L_{\mathcal{H}}(u) = L_{\mathcal{H}}(v)$, 则称 u 和 v

是等价的; 反之, 则称 u 和 v 是不等价的. $\mathcal{H}$ 的一个等价类是顶点两两等价的极大顶点子集. 如果对于 $\mathcal{H}$ 中任意不等价的点 u 和 v , 总是存在 $\mathcal{H}$ 中的一条边包含这两个点, 则称 $\mathcal{H}$ 是对称的. Liu 等^[20]总结了 Zykov^[33]的对称性方法, 得到了一个解决此类 Turán 问题的统一性方法.

定理 3.1^[20] 设 $\mathcal{F}$ 是膨胀不变的 r -图族, 若 $\mathfrak{H}$ 是所有对称的不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图构成的超图族, 则对于任意正整数 n , 都有 $\text{ex}(n, \mathcal{F}) = \mathfrak{h}(n)$, 其中 $\mathfrak{h}(n) = \max\{|\mathcal{H}|: \mathcal{H} \in \mathfrak{H} \text{ 且 } v(\mathcal{H}) = n\}$.

下面证明定理 1.2(1).

定理 3.2 给定 $\mathcal{M} = \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^1) \cap \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^2)$, 则存在正整数 N_0 , 使得对于任意正整数 $n > N_0$ 都有 $\text{ex}(n, \mathcal{M}) \leq n^4/64$, 其中等号成立当且仅当 $8 \mid n$.

证明 选择 N_0 使其满足定理 2.2 的条件, 令 $\mathfrak{H}$ 为所有对称不含 $\mathcal{M}$ 的 r -图构成的超图族, 令

$$\mathfrak{h}(n) = \max\{|\mathcal{H}|: \mathcal{H} \in \mathfrak{H} \text{ 且 } v(\mathcal{H}) = n\}.$$

根据定理 3.1 和引理 3.4, 只需证明 $\mathfrak{h}(n) \leq n^4/64$ 并且等号成立当且仅当 $8 \mid n$.

对于任意 $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$, 从 $\mathcal{H}$ 的每一个等价类中选择一个顶点, 构成顶点子集 T , 用 $\mathcal{T}$ 表示导出子图 $\mathcal{H}[T]$, 显然, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{T}$ 的膨胀. 为证明 $|\mathcal{H}| \leq n^4/64$, 下面根据 T 的大小分两种情形进行讨论.

情形 1 $|T| \leq 8$.

根据引理 3.1, 只需证明 $\lambda(\mathcal{T}) \leq 1/64$. 因为 $\mathcal{H}$ 不包含 $\mathcal{M}$, 所以存在某个正整数 m , 使得 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^1$ 或者 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^2$. 若 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^1$, 则根据引理 3.2 有 $\lambda(\mathcal{T}) \leq \lambda(\mathcal{G}_m^1) < 1/64$. 若 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^2$, 由于 $\mathcal{T}$ 是 2-覆盖的, 因此 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_8^2$, 则根据引理 3.3, 有 $\lambda(\mathcal{T}) \leq \lambda(\mathcal{G}_8^2) = 1/64$, 并且等号成立当且仅当 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ 的一个拷贝.

情形 2 $|T| \geq 9$.

若 $|\mathcal{H}| \geq n^4/64$, 则根据定理 2.2, 图 $\mathcal{H}$ 包含 $\mathcal{F}_7$ 的一个拷贝, 设其点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, 边集为 $\{v_1v_2v_3v_4, v_1v_2v_3v_5, v_1v_2v_3v_6, v_4v_5v_6v_7\}$. 因为在 $\mathcal{F}_7$ 中 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 中任意两个点都包含在 $\mathcal{F}_7$ 的一条边中, 所以可以选择 T 使得对于任意 $i \in [6]$, 有 $v_i \in T$. 由于 $|T| \geq 9$ 并且 $\mathcal{T}$ 是 2-覆盖的, 所以对于任意 $S \subseteq T$ 且 $|S| = 9$, $\mathcal{H}$ 中存在以 S 为核的 $\mathcal{K}_9^4$ 中一个图的拷贝 F_S . 特别地可以选择 S 使得 $\{v_1, \dots, v_6\} \subseteq S$. 同时, 如果在 F_S 中包含 $\{v_4, v_5\}$ 的边 e 不是 $v_4v_5v_6v_7$, 此时用 $v_4v_5v_6v_7$ 代替 e , 仍称替换后的 4-图为 F_S , 则 $\mathcal{F}_7 \subseteq F_S$. 这意味着 $F_S \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 证毕. $\square$

4 $\mathcal{M}$ 的稳定性

本节利用 Liu 等^[20]发展的点可扩方法来证明定理 1.2(2).

4.1 预备知识

本小节介绍证明中所需要的定义和简单引理.

定义 4.1 (对称稳定性) 设 $\mathcal{F}$ 为 r -图族, $\mathfrak{H}$ 是不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图族, 如果存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 N_0 使得对于任意 $n > N_0$, 都有每一个 n 个顶点最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (\pi(\mathcal{F})/(r-1)! - \epsilon)n^{r-1}$ 并且不含 $\mathcal{F}$ 的对称的 r -图总是 $\mathfrak{H}$ 中某个超图的子图, 则称 $\mathcal{F}$ 对于 $\mathfrak{H}$ 是对称稳定的.

定义 4.2 (点可扩性) 设 $\mathcal{F}$ 为 r -图族, $\mathfrak{H}$ 是不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图族, 如果存在 $\zeta > 0$ 和正整数 N_0 , 使得对于任意 $n > N_0$ 和每一个 n 个顶点最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (\pi(\mathcal{F})/(r-1)! - \zeta)n^{r-1}$ 且不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图 $\mathcal{H}$, 都满足: 若 $\mathcal{H}$ 中存在一点 v 使得 $\mathcal{H} - v$ 是 $\mathfrak{H}$ 中某个超图的子图, 则 $\mathcal{H}$ 也是 $\mathfrak{H}$ 中某个超图的子图, 则称 $\mathcal{F}$ 对于 $\mathfrak{H}$ 是点可扩的.

Liu 等^[20]提出了证明超图的度稳定性的一般性方法, 即将度稳定性的证明化简为检验超图是否具有点可扩性.

定理 4.1^[20] 设 $\mathcal{F}$ 为膨胀不变的非退化 r -图族, $\mathfrak{H}$ 是不含 $\mathcal{F}$ 且对子图封闭的 r -图族, 若 $\mathcal{F}$ 对于 $\mathfrak{H}$ 是对称稳定的和点可扩的, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和正整数 N_0 使得对于任意 $n > N_0$ 都有以下结论成立: 设 $\mathcal{H}$ 是 n 个顶点且不含 $\mathcal{F}$ 的 r -图, 如果 $\delta(\mathcal{H}) \geq (\pi(\mathcal{F})/(r-1)! - \varepsilon)n^{r-1}$, 则 $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$, 即图族 $\mathcal{F}$ 是度稳定于 $\mathfrak{H}$ 的.

本节令 $\mathfrak{H} = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ 是偶二部 4-图或者 } \mathcal{G}_8^2 \text{-可染的}\}$. 下面证明超图族 $\mathcal{M}$ 是对称稳定于 $\mathfrak{H}$ 的.

引理 4.1 存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 N_0 , 使得对于任意 $n > N_0$ 都有每个 n 个顶点最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \epsilon)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的对称的 4-图 $\mathcal{H}$ 都属于 $\mathfrak{H}$.

证明 选择适当的 ϵ 和充分大的 N_0 以满足定理 2.1 的条件, 对于任意 $n > N_0$, 设 $\mathcal{H}$ 是一个 n 个顶点、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \epsilon)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的对称的 4-图. 在 $\mathcal{H}$ 的每一个等价类中选择一个顶点, 构成顶点集 T , 用 $\mathcal{T}$ 表示 $\mathcal{H}[T]$, 则 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个膨胀. 设 $|T| \leq 8$, 因为 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$, 所以 $\mathcal{T} \notin \mathcal{M}$, 所以存在某个正整数 m , 使得 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^1$ 或者 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}_m^2$, 因此 $\mathcal{H}$ 属于 $\mathfrak{H}$. 下面假设 $|T| \geq 9$, 如果 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{F}_7$, 则由定理 2.1 可知, $\mathcal{H}$ 是一个偶二部 4-图, 因此 $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$. 如果 $\mathcal{F}_7 \subseteq \mathcal{H}$, 类似定理 3.2 证明中情形 2 的讨论, $\mathcal{H}$ 中存在一个包含 $\mathcal{F}_7$ 的 $\mathcal{K}_9^4$ 中的超图, 而此超图属于 $\mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 证毕. $\square$

4.2 偶二部 4-图

本小节的主要目标是证明如下引理:

引理 4.2 存在 $\zeta > 0$ 和正整数 N_0 使得对于任意 $n > N_0$, 以下结论成立: 设 $\mathcal{H}$ 是一个顶点数为 n 、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \zeta)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图, 如果 $\mathcal{H}$ 中存在一点 v 使得 $\mathcal{H}' := \mathcal{H} - v$ 是偶二部 4-图, 则 $\mathcal{H}$ 也是偶二部 4-图.

证明 设 $\epsilon > 0$ 为充分小的正数, N_0 为充分大的正整数. 令 $\zeta = \min\{\gamma, \epsilon/2\}$, 其中 γ 为定理 2.1 中的常数. $\mathcal{H}$ 是一个顶点数为 n 、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \zeta)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图, 假设 $\mathcal{H}$ 中存在一点 $v \in V(\mathcal{H})$ 使得 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - v$ 是偶二部 4-图. 不妨设 $V(\mathcal{H}') = A_1 \cup A_2$, 并且对于任意 $E \in \mathcal{H}'$ 都有 $|E \cap A_1| = |E \cap A_2| = 2$, 从而有

$$\delta(\mathcal{H}') \geq \delta(\mathcal{H}) - n^2 \geq \left(\frac{1}{16} - \epsilon\right)n^3, \quad (4.1)$$

且

$$|\mathcal{H}'| \geq \frac{(n-1)\delta(\mathcal{H}')}{4} \geq \frac{(n-1)(\delta(\mathcal{H}) - n^2)}{4} \geq \left(\frac{1}{64} - \epsilon\right)n^4. \quad (4.2)$$

断言 4.1 对于 $i = 1, 2$, 有 $||A_i| - n/2| \leq 4\epsilon^{1/2}n$.

证明 因为 $\mathcal{H}'$ 是偶二部 4-图, 所以

$$|\mathcal{H}'| \leq \binom{|A_1|}{2} \binom{n-|A_1|}{2} \leq \frac{1}{4}|A_1|^2(n-|A_1|)^2 \leq \frac{1}{16}n^2|A_1|(n-|A_1|). \quad (4.3)$$

将上式与 (4.2) 相结合, 可以得到 $(1/64 - \epsilon)n^4 \leq 1/16n^2|A_1|(n-|A_1|)$. 化简, 则有 $(|A_1| - n/2)^2 \leq 16\epsilon n^2$, 即 $||A_1| - n/2| \leq 4\epsilon^{1/2}n$. 同理, 可以得到

$$\left||A_2| - \frac{n}{2}\right| \leq 4\epsilon^{1/2}n.$$

$\square$

断言 4.2 对于任意 $w \in V(\mathcal{H}')$, 都有

$$|N_{\mathcal{H}}(w) \cap A_2| \geq |A_2| - 20\epsilon^{1/2}n.$$

证明 只需要证明 $|N_{\mathcal{H}'}(w) \cap A_2| \geq |A_2| - 20\epsilon^{1/2}n$. 令 $W_1 = N_{\mathcal{H}'}(w) \cap A_1, W_2 = N_{\mathcal{H}'}(w) \cap A_2$. 若 $w \in A_1$, 则由断言 4.1 可知,

$$d_{\mathcal{H}'}(w) \leq |W_1| \binom{|W_2|}{2} \leq \frac{1}{2}|A_1||W_2|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 4\epsilon^{1/2}n \right) |W_2|^2.$$

又由 (4.1) 可知, $d_{\mathcal{H}'}(w) \geq \delta(\mathcal{H}') \geq (1/16 - \epsilon)n^3$. 因此,

$$|W_2|^2 \geq \frac{1/8 - 2\epsilon}{1/2 + 4\epsilon^{1/2}} n^2 = \frac{(1/2 + 4\epsilon^{1/2})(1/4 - 2\epsilon^{1/2}) + 6\epsilon}{1/2 + 4\epsilon^{1/2}} n^2 \geq \left(\frac{1}{4} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^2 \geq \left(\frac{1}{2} - 4\epsilon^{1/2} \right)^2 n^2.$$

进而有 $|W_2| \geq n/2 - 4\epsilon^{1/2}n$.

同理, 若 $w \in A_2$, 则由断言 4.1 可知,

$$d_{\mathcal{H}'}(w) \leq \binom{|W_1|}{2} |W_2| \leq \frac{1}{2}|A_1|^2 |W_2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 4\epsilon^{1/2}n \right)^2 |W_2|.$$

又因为 $d_{\mathcal{H}'}(w) \geq (1/16 - \epsilon)n^3$, 所以,

$$|W_2| \geq \frac{1/8 - 2\epsilon}{(1/2 + 4\epsilon^{1/2})^2} n \geq \frac{1/8 - 2\epsilon}{1/4 + 8\epsilon^{1/2}} n = \frac{(1/4 + 8\epsilon^{1/2})(1/2 - 16\epsilon^{1/2}) + 126\epsilon}{1/4 + 8\epsilon^{1/2}} n \geq \frac{n}{2} - 16\epsilon^{1/2}n.$$

因此, 对于任意 $w \in V(\mathcal{H}')$, 都有 $|W_2| \geq \frac{n}{2} - 16\epsilon^{1/2}n \geq |A_2| - 20\epsilon^{1/2}n$. □

考虑点 v 的邻居, 有如下断言.

断言 4.3 对于 $i = 1, 2$, 都有

$$|N_{\mathcal{H}}(v) \cap A_i| \geq \frac{n}{6} - 5\epsilon^{1/2}n.$$

证明 显然, 根据

$$\frac{1}{6}|N_{\mathcal{H}}(v)|^3 \geq \binom{|N_{\mathcal{H}}(v)|}{3} \geq d_{\mathcal{H}}(v) \geq \delta(\mathcal{H}) \geq \left(\frac{1}{16} - \frac{\epsilon}{2} \right) n^3,$$

有

$$|N_{\mathcal{H}}(v)|^3 \geq \left(\frac{3}{8} - 3\epsilon \right) n^3 \geq \left(\frac{2}{3} - \epsilon^{1/2} \right)^3 n^3.$$

因此, $|N_{\mathcal{H}}(v)| \geq (2/3 - \epsilon^{1/2})n$. 再结合断言 4.1, 则有

$$|N_{\mathcal{H}}(v) \cap A_i| \geq \frac{2n}{3} - \epsilon^{1/2}n - \left(\frac{n}{2} + 4\epsilon^{1/2}n \right) = \frac{n}{6} - 5\epsilon^{1/2}n.$$

证毕. □

若 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{F}_7$, 则由定理 2.1 可知 $\mathcal{H}$ 是偶二部 4 图. 下设存在子集 $S \subseteq V(\mathcal{H})$, 使得 $\mathcal{H}[S]$ 包含 $\mathcal{F}_7$ 的一个拷贝, 因为 $\mathcal{H}'$ 不含 $\mathcal{F}_7$, 所以 $v \in S$, 不妨设 $S = \{v, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. 定义

$$A'_2 = A_2 \cap N_{\mathcal{H}}(v) \cap \left(\bigcap_{i \in [6]} N_{\mathcal{H}}(w_i) \right).$$

根据断言 4.2 和 4.3, 可得

$$|A'_2| \geq \frac{n}{6} - 5\epsilon^{1/2}n - 6 \times 20\epsilon^{1/2}n = \frac{n}{6} - 125\epsilon^{1/2}n.$$

根据 $\mathcal{F}_7$ 的构造, 可知存在 $S' \subseteq S$, $|S'| = 6$ 且使得 S' 中的任何两个点都被 $\mathcal{H}$ 的一条边覆盖. 此时, 可以在 A'_2 中选择一点 w_7 使得 $\mathcal{H}$ 中存在以 $S' \cup \{w_7\}$ 为核的同构于 $\mathcal{K}_7^4$ 中某个元素的 4-图 F_1 , 同时 $\mathcal{F}_7 \subseteq F_1$. 重复此过程两次, 便可以在 $\mathcal{H}$ 中找到子图 $F_3 \in \mathcal{K}_9^4$ 且使得 $\mathcal{F}_7 \subseteq F_3$, 从而有 $F_3 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 相矛盾. 引理 4.2 证毕. $\square$

4.3 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的 4 图

本小节考虑 $\mathcal{H}' := \mathcal{H} - v$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的情形. 通过简单的分析, 易知 $\mathcal{F}_7 \subseteq \mathcal{G}_8^2$. 在证明中, 我们将用到如下引理:

引理 4.3 ^[16, 23] 给定实数 $\eta \in (0, 1)$ 和正整数 $r \geq 3$, $s \geq 0$, $m \geq t \geq 1$, $\mathcal{H}$ 是一个 n 个顶点的 r -图, 并且其点集可以划分为 $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{i \in [m]} V_i$. 设 $\mathcal{G}$ 是一个点集为 $[m]$ 的 r -图, $\widehat{\mathcal{G}}$ 是 $\mathcal{G}$ 中点分别以 $V_1, \dots, V_m$ 替换后所形成的 $\mathcal{G}$ 的膨胀, 即 $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}[V_1, \dots, V_m]$. 设 $T \subseteq [m]$ 且 $|T| = t$, $S \subseteq V(\mathcal{H})$ 且 $|S| = s$. 若集合 T 和 S 满足以下 3 点性质:

- (1) 对所有 $j \in T$, 都有 $|V_j| \geq (s+1)t\eta^{1/r}n$;
- (2) 对所有 $\{j_1, \dots, j_r\} \in \binom{T}{r}$, 都有 $|\mathcal{H}[V_{j_1}, \dots, V_{j_r}]| \geq |\widehat{\mathcal{G}}[V_{j_1}, \dots, V_{j_r}]| - \eta n^r$;
- (3) 对所有 $v \in S$ 和 $\{j_1, \dots, j_{r-1}\} \in \binom{T}{r-1}$, 都有

$$|L_{\mathcal{H}}(v)[V_{j_1}, \dots, V_{j_{r-1}}]| \geq |L_{\widehat{\mathcal{G}}}(v)[V_{j_1}, \dots, V_{j_{r-1}}]| - \eta n^{r-1},$$

则对 $j \in [T]$, 存在 $u_j \in V_j$ 使得集合 $U = \{u_j : j \in T\}$ 满足 $\widehat{\mathcal{G}}[U] \subseteq \mathcal{H}[U]$, 并且对所有 $v \in S$, 都有 $L_{\widehat{\mathcal{G}}}(v)[U] \subseteq L_{\mathcal{H}}(v)[U]$. 特别地, 当 $\mathcal{H} \subseteq \widehat{\mathcal{G}}$ 时, $\widehat{\mathcal{G}}[U] = \mathcal{H}[U]$, 并且对所有 $v \in S$, 都有

$$L_{\widehat{\mathcal{G}}}(v)[U] = L_{\mathcal{H}}(v)[U].$$

本小节主要证明如下引理:

引理 4.4 存在 $\zeta > 0$ 和正整数 N_0 使得对于任意 $n > N_0$, 以下结论成立: 设 $\mathcal{H}$ 是一个顶点数为 n 、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \zeta)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图, 如果 $\mathcal{H}$ 中存在一点 v 使得 $\mathcal{H}' := \mathcal{H} - v$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的, 则 $\mathcal{H}$ 也是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的.

证明 令 $\zeta = \epsilon/2 > 0$ 充分小, 正整数 N_0 充分大, 对 $n > N_0$, 令 $\mathcal{H}$ 是一个顶点数为 n 、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \zeta)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图, 假设存在点 v 使得 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - v$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的. 显然,

$$\delta(\mathcal{H}') \geq \delta(\mathcal{H}) - n^2 \geq \left(\frac{1}{16} - \epsilon\right)n^3. \quad (4.4)$$

因为 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的, 所以可设 $\mathcal{H}'$ 对应的点集划分为 $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_8\}$, 使得 $\mathcal{H}'$ 的每条边交 V_i ($i \in [8]$) 于至多一个点, 并且对于 $1 \leq i < j \leq 4$ 不存在 $V_{2i-1}V_{2i}V_{2j-1}V_{2j}$ 类型的边. 令 $\widehat{\mathcal{G}}_8^2$ 表示由 $\mathcal{G}_8^2$ 每个点分别以 $|V_1|, \dots, |V_8|$ 的大小进行膨胀所形成的图, 即 $\widehat{\mathcal{G}}_8^2 = \mathcal{G}_8^2[V_1, \dots, V_8]$. 称 $\widehat{\mathcal{G}}_8^2 \setminus \mathcal{H}'$ 中的边为 $\mathcal{H}'$ 缺失的边, 对于 $u \in V(\mathcal{H}')$, $L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u) \setminus L_{\mathcal{H}'}(u)$ 中的边为 $L_{\mathcal{H}'}(u)$ 缺失的边.

断言 4.4 对于所有 $i \in [8]$, 都有 $||V_i| - n/8| \leq 7\epsilon^{1/2}n$.

证明 下面利用 Lagrange 函数和引理 3.3 证明此断言. 对于所有 $i \in [8]$, 令 $x_i = |V_i|/(n-1)$, $x = (x_1, \dots, x_8)$. 由 (4.4) 可得

$$|\mathcal{H}'| \geq \frac{(n-1)\delta(\mathcal{H}')}{4} \geq \left(\frac{1}{64} - \epsilon\right)(n-1)n^3. \quad (4.5)$$

另外,

$$|\mathcal{H}'| \leq |\hat{\mathcal{G}}_8^2| = \sum_{E \in \mathcal{G}_8^2} \prod_{i \in E} |V_i| = p_{\mathcal{G}_8^2}(x)(n-1)^4. \quad (4.6)$$

结合 (4.5) 和 (4.6), 有

$$p_{\mathcal{G}_8^2}(x) \geq \frac{1}{64} - \epsilon. \quad (4.7)$$

对于 $i \in [4]$, 令 $x_{2i-1} + x_{2i} = a_i$. 回顾引理 3.3 的证明, 结合 (3.1c) 和 (4.7) 可得

$$\frac{1}{64}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - \frac{1}{16}(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) \leq \epsilon,$$

即 $((a_1 + a_2) - (a_3 + a_4))^2 \leq 64\epsilon$. 因此, $|(a_1 + a_2) - (a_3 + a_4)| \leq 8\epsilon^{1/2}$. 又因为 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$, 根据三角不等式, 有

$$2\left|a_1 + a_2 - \frac{1}{2}\right| \leq |(a_1 + a_2) - (a_3 + a_4)| + |a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1| \leq 8\epsilon^{1/2},$$

即 $|a_1 + a_2 - 1/2| \leq 4\epsilon^{1/2}$. 同理可得 $1/2 - 4\epsilon^{1/2} \leq a_3 + a_4 \leq 1/2 + 4\epsilon^{1/2}$.

同理, 根据引理 3.3 证明中的 (3.1b) 和 (4.7), 有

$$\frac{1}{16}(a_1 + a_2)^2(a_3 + a_4) - \frac{1}{4}a_1a_2(a_3 + a_4) \leq \epsilon.$$

因此,

$$(a_1 - a_2)^2 \leq \frac{16\epsilon}{a_3 + a_4} \leq \frac{16\epsilon}{1/3} \leq 49\epsilon,$$

即 $|a_1 - a_2| \leq 7\epsilon^{1/2}$. 再结合三角不等式, 从而有

$$2\left|a_1 - \frac{1}{4}\right| \leq |a_1 - a_2| + \left|a_1 + a_2 - \frac{1}{2}\right| \leq 12\epsilon^{1/2},$$

即 $|a_1 - 1/4| \leq 6\epsilon^{1/2}$. 同理可得, 对于任意 $i \in [4]$, 都有 $1/4 - 6\epsilon^{1/2} \leq a_i \leq 1/4 + 6\epsilon^{1/2}$.

更进一步地, 由引理 3.3 证明中的 (3.1a) 和 (4.7), 有

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2(a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4) - x_1x_2(a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4) \leq \epsilon,$$

进而有

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq \frac{4\epsilon}{a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4} \leq \frac{4\epsilon}{3/25} \leq 36\epsilon.$$

所以, $|x_1 - x_2| \leq 6\epsilon^{1/2}$. 根据三角不等式, 有

$$2\left|x_1 - \frac{1}{8}\right| \leq |x_1 - x_2| + \left|x_1 + x_2 - \frac{1}{4}\right| \leq 12\epsilon^{1/2}.$$

可以得到 $1/8 - 6\epsilon^{1/2} \leq x_1 \leq 1/8 + 6\epsilon^{1/2}$. 又因为 $|V_1| = x_1(n-1)$, 故有

$$\frac{n}{8} - 7\epsilon^{1/2}n \leq \frac{n-1}{8} - 6\epsilon^{1/2}(n-1) \leq |V_1| \leq \frac{n-1}{8} + 6\epsilon^{1/2}(n-1) \leq \frac{n}{8} + 6\epsilon^{1/2}n.$$

同理, 可以得到对于任意 $i \in [8]$, 都有 $|V_i| - n/8 \leq 7\epsilon^{1/2}n$. 证毕. $\square$

断言 4.5 对于任意 $u \in V(\mathcal{H}')$, $L_{\mathcal{H}'}(u)$ 缺失的边至多为 $100\epsilon^{1/2}n^3$ 条.

证明 先计算 $\Delta(\widehat{\mathcal{G}}_8^2)$. 对于任意 $v \in V(\widehat{\mathcal{G}}_8^2)$, 都有

$$d_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(v) \leq \left(\binom{7}{3} - 3 \right) \left(\frac{n}{8} + 7\epsilon^{1/2}n \right)^3 \leq \left(\frac{1}{16} + 50\epsilon^{1/2} \right) n^3.$$

因此, $\Delta(\mathcal{H}') \leq \Delta(\widehat{\mathcal{G}}_8^2) \leq (1/16 + 50\epsilon^{1/2})n^3$. 所以对于 $u \in V(\mathcal{H}')$, $L_{\mathcal{H}'}(u)$ 缺失的边至多为

$$\Delta(\widehat{\mathcal{G}}_8^2) - \delta(\mathcal{H}') \leq 50\epsilon^{1/2}n^3 + \epsilon n^3 \leq 100\epsilon^{1/2}n^3.$$

证毕. $\square$

断言 4.6 对于所有 $i \in [8]$ 和任意 $u \in V(\mathcal{H}') \setminus V_i$, 都有 $|V_i \setminus N_{\mathcal{H}}(u)| \leq 10000\epsilon^{1/2}n$.

证明 假设存在 $i \in [8]$ 和 $u \in V(\mathcal{H}') \setminus V_i$ 使得 $|V_i \setminus N_{\mathcal{H}}(u)| > 10000\epsilon^{1/2}n$. 则 $L_{\mathcal{H}'}(u)$ 缺失的边大于

$$10000\epsilon^{1/2}n \times \left(\frac{n}{8} - 7\epsilon^{1/2}n \right)^2 \geq 100\epsilon^{1/2}n^3,$$

与断言 4.5 矛盾, 证毕. $\square$

接下来证明图 $\mathcal{H}$ 的每条边交每个 V_i 于至多一个点. 我们有如下断言.

断言 4.7 对于所有 $E \in \mathcal{H}$ 和 $i \in [8]$, 都有 $|E \cap V_i| \leq 1$.

证明 由于 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的, 只需要证明对于任意 $\mathcal{H}$ 中包含点 v 的边 E , 都有 $|E \cap V_i| \leq 1$, 由对称性可知只需要证明 $|E \cap V_1| \leq 1$. 若不成立, 则存在两个不同的点 $u_1, u'_1 \in V_1$, 使得 $v, u_1, u'_1 \in E$, 设边 $E = vu_1u'_1w$. 根据断言 4.4 和 4.6, 对于 $i \in [2, 8]$, $V'_i = V_i \cap N_{\mathcal{H}}(u_1) \cap N_{\mathcal{H}}(u'_1)$ 的大小至少为 $n/16$. 使用引理 4.3, 令 $T = [2, 8]$, $S = \{u_1, u'_1\}$, $\eta = 100\epsilon^{1/4}$, 则对于 $j \in [2, 8]$, 存在 $u_j \in V'_j$, 使得 $\mathcal{H}[U \cup \{u_1\}] \cong \mathcal{H}[U \cup \{u'_1\}] \cong \mathcal{G}_8^2$, 其中 $U = \{u_2, \dots, u_8\}$. 从而得到 $F_1 = \mathcal{H}[U \cup \{u_1, u'_1, v, w\}] \in \mathcal{K}_9^4$, 其中核为 $U \cup \{u_1, u'_1\}$. 另外, 由于 F_1 中包含 $\mathcal{G}_8^2$, 所以 F_1 不包含在偶二部 4-图中. 所以, $F_1 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 证毕. $\square$

断言 4.8 不存在两个不同的 $i, j \in [8]$ 使得

$$\max\{|N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_i|, |N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_j|\} \leq \frac{n}{24}.$$

证明 对于 $i \in [8]$, 令 $V'_i = N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_i$. 由断言 4.7 可知, $L_{\mathcal{H}}(v)$ 是一个 8-部 3-图, 并且其点集划分为 $\mathcal{P}' = \{V'_1, \dots, V'_8\}$. 若存在两个不同的 $i, j \in [8]$ 使得 $\max\{|N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_i|, |N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_j|\} \leq n/24$, 则由断言 4.4 可知

$$\begin{aligned} |L_{\mathcal{H}}(v)| &\leq \binom{6}{3} \left(\frac{n}{8} + 7\epsilon^{1/2}n \right)^3 + 2 \times \binom{6}{2} \times \frac{n}{24} \times \left(\frac{n}{8} + 7\epsilon^{1/2}n \right)^2 + 6 \times \left(\frac{n}{24} \right)^2 \times \left(\frac{n}{8} + 7\epsilon^{1/2}n \right) \\ &\leq \frac{23}{384}n^3 + 10000\epsilon^{1/2}n^3 \\ &< \left(\frac{1}{16} - \epsilon \right) n^3, \end{aligned}$$

显然与 $\mathcal{H}$ 的最小度假设矛盾. 证毕. $\square$

断言 4.9 不存在 $i \in [8]$ 使得 $N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_i \neq \emptyset$ 并且对所有 $j \in [8] \setminus \{i\}$, 都有

$$|N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_j| \geq \frac{n}{24}.$$

证明 反证法. 根据对称性, 不妨设 $u_1 \in N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_1$ 并且对于 $j \in [2, 8]$, 有

$$|N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_j| \geq \frac{n}{24}.$$

对于 $j \in [2, 8]$, 令 $V'_j = V_j \cap N_{\mathcal{H}}(v) \cap N_{\mathcal{H}}(u_1)$. 根据断言 4.6, 有

$$|V'_j| \geq \frac{n}{24} - 10000\epsilon^{1/2}n > \frac{n}{30}.$$

应用引理 4.3, 令 $T = [2, 8]$, $S = \{u_1\}$, $\eta = 100\epsilon^{1/4}$, 则对于 $j \in [2, 8]$, 可以得到由 $u_j \in V'_j$ 构成的点集 $U = \{u_j : j \in [2, 8]\}$, 使得 $\mathcal{H}[U \cup \{u_1\}] \cong \mathcal{G}_8^2$. 对于 $j \in [8]$, 令 e_j 表示 $\mathcal{H}$ 中包含 $\{v, u_j\}$ 的边. 从而, 得到 $F_2 = \mathcal{H}[U \cup \{u_1\}] \cup \{e_j : j \in [8]\} \in \mathcal{K}_8^4$, 其核为 $U \cup \{u_1, v\}$. 另外, 由于 F_2 中包含 $\mathcal{G}_8^2$, 所以 F_2 不包含在偶二部 4- 图中, 从而有 $F_2 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. $\square$

根据断言 4.8 和 4.9 可知, 存在 V_i 使得 $N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_i = \emptyset$, 不妨设 $N_{\mathcal{H}}(v) \cap V_1 = \emptyset$. 因为 $\widehat{\mathcal{G}}_8^2$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ 的膨胀, 所以对于 $x, y \in V_i$, 有

$$L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(x) = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(y).$$

从 V_1 中任选一点 u , 令 $B_v = L_{\mathcal{H}}(v) \setminus L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u)$, 并称它为 $L_{\mathcal{H}}(v)$ 中的坏边集. 令 $M_v = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u) \setminus L_{\mathcal{H}}(v)$, 并称它为 $L_{\mathcal{H}}(v)$ 缺失的边集. 我们的目标是证明 $B_v = \emptyset$. 首先, 证明 $|B_v|$ 是非常小的.

断言 4.10 $|B_v| < 300\epsilon^{1/12}n^3$.

证明 假设 $|B_v| \geq 300\epsilon^{1/12}n^3$. 由断言 4.7 和 $\mathcal{G}_8^2$ 的构造可知, B_v 的每条边 E 满足 $|E \cap V_2| = 1$, 并且有 $|E \cap V_3| = |E \cap V_4| = 1$, 或者 $|E \cap V_5| = |E \cap V_6| = 1$, 或者 $|E \cap V_7| = |E \cap V_8| = 1$. 根据鸽笼原理, 不妨设 B_v 中 $V_2V_3V_4$ 类型的边至少为 $|B_v|/3$. 则 V_2 和 V_3 中存在两点 u_2 和 u'_3 , 使得 V_4 中与 $\{u_2, u'_3\}$ 组成 B_v 中的边的点的个数至少为

$$\frac{|B_v|/3}{|V_2||V_3|} > \frac{100\epsilon^{1/12}n^3}{(n/6)^2} > 1000\epsilon^{1/12}n.$$

令 $V'_4 = \{x \in V_4 : xu_2u'_3 \in B_v\}$, $V'_1 = V_1 \cap N_{\mathcal{H}}(u_2)$, $V'_3 = V_3 \cap N_{\mathcal{H}}(v) \cap N_{\mathcal{H}}(u_2)$, 则根据断言 4.6 和 4.8 有 $|V'_3| > n/24 - 10000\epsilon^{1/2}n > n/30$. 对于 $j \in [5, 8]$, 令 $V'_j = V_j \cap N_{\mathcal{H}}(v) \cap N_{\mathcal{H}}(u'_3) \cap N_{\mathcal{H}}(u_2)$, 则由断言 4.6 和 4.8, 可以得到

$$|V'_j| \geq \frac{n}{24} - 2 \times 10000\epsilon^{1/2}n > \frac{n}{30}.$$

应用引理 4.3, 令 $T = [8] \setminus \{2\}$, $S = \{u_2\}$, $\eta = 100\epsilon^{1/4}$, 则对于 $j \in [8] \setminus \{2\}$, 可以得到由 $u_j \in V'_j$ 组成点集 $U = \{u_j : j \in [8] \setminus \{2\}\}$, 使得 $\mathcal{H}[U \cup \{u_2\}] \cong \mathcal{G}_8^2$. 注意此时 u_3 和 u'_3 可能为同一个点. 对于 $i \in \{3, 5, 6, 7, 8\}$, 令 e_i 表示 $\mathcal{H}$ 中同时包含点 v 和 u_i 的边. 对于 $j \in [5, 8]$, 令 f_j 表示 $\mathcal{H}$ 中同时包含点 u'_3 和 u_j 的边. 令 $F_3 = \mathcal{H}[U \cup \{u_2\}] \cup \{vu_2u'_3u_4\} \cup \{e_i : i \in \{3, 5, 6, 7, 8\}\} \cup \{f_j : j \in [5, 8]\}$. 因为 F_3 不包含在偶二部 4- 图中, 所以 F_3 一定是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的; 否则, $F_3 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 因此存在同态映射 $\psi : V(F_3) \rightarrow V(\mathcal{G}_8^2)$, 使得对于所有 $e \in F_3$ 都有 $\psi(e) \in \mathcal{G}_8^2$. 因为 $\{u_1, \dots, u_8\}$ 和 $\{v, u_2, \dots, u_8\}$ 在 F_3 中是 2- 覆盖的, 所以 ψ 在 $\{u_1, \dots, u_8\}$ 和 $\{v, u_2, \dots, u_8\}$ 上是单射, 并且 $\psi(v) = \psi(u_1)$. 又因为 $\{v, u_2, \dots, u_8\}$ 和 $\{v, u_2, u'_3, u_4, \dots, u_8\}$ 在 F_3 中也是 2- 覆盖的, 所以 ψ 在

$\{v, u_2, \dots, u_8\}$ 和 $\{v, u_2, u'_3, u_4, \dots, u_8\}$ 上也是单射, 并且 $\psi(u_3) = \psi(u'_3)$. 由于 $L_{F_3}(u_1)[\{u_2, \dots, u_8\}]$ 有 32 条边, 而 $u_1 u_2 u_3 u_4, u_1 u_2 u'_3 u_4 \notin \mathcal{H}$, 所以 $\psi(v)$ 在 $\mathcal{G}_8^2$ 中的度至少为 $32 + 1 = 33$, 这与 $\mathcal{G}_8^2$ 的最大度为 32 相矛盾. 证毕. $\square$

下面说明 $|M_v|$ 也是非常小的, 从 V_1 中任选一点 u , 由断言 4.10 可知

$$\begin{aligned} |M_v| &= |L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u) \setminus L_{\mathcal{H}}(v)| \\ &= |L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u)| - |L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u) \cap L_{\mathcal{H}}(v)| \\ &= |L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u)| - (|L_{\mathcal{H}}(v)| - |B_v|) \\ &\leq 32 \times \left(\frac{n}{8} + 7\epsilon^{1/2}n\right)^3 - \left(\frac{1}{16} - \epsilon\right)n^3 + 300\epsilon^{1/12}n^3 \\ &< 500\epsilon^{1/12}n^3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

断言 4.11 $B_v = \emptyset$.

证明 如果 $B_v \neq \emptyset$, 则根据对称性, 不妨设存在 $u_2 \in V_2, u_3 \in V_3, u_4 \in V_4$ 使得 $u_2 u_3 u_4 \in B_v$. 对于 $j \in [4]$, 令 $V'_j = V_j$. 对于 $j \in [5, 8]$, 令 $V'_j = V_j \cap N_{\mathcal{H}}(v) \cap N_{\mathcal{H}}(u_2) \cap N_{\mathcal{H}}(u_3) \cap N_{\mathcal{H}}(u_4)$. 根据断言 4.4、4.6 和 (4.8), 有 $|V'_j| \geq |V_j|/2 > n/20$. 应用引理 4.3, 令 $T = [8]$, $S = \{v, u_2, u_3, u_4\}$, $\eta = 500\epsilon^{1/36}$, 则对于 $j \in [8]$, 可以得到 $w_j \in V'_j$, 使得

- (1) $\mathcal{H}[\{w_1, \dots, w_8\}] \cong \mathcal{G}_8^2$,
- (2) $L_{\mathcal{H}}(v)[\{w_2, \dots, w_8\}] = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(w_1)[\{w_2, \dots, w_8\}]$,
- (3) $L_{\mathcal{H}}(u_2)[\{w_1, w_3, \dots, w_8\}] = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(w_2)[\{w_1, w_3, \dots, w_8\}]$,
- (4) $L_{\mathcal{H}}(u_3)[\{w_1, w_2, w_4, \dots, w_8\}] = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(w_3)[\{w_1, w_2, w_4, \dots, w_8\}]$,
- (5) $L_{\mathcal{H}}(u_4)[\{w_1, w_2, w_3, w_5, \dots, w_8\}] = L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(w_4)[\{w_1, w_2, w_3, w_5, \dots, w_8\}]$.

不难看出, $\mathcal{H}[\{v, u_2, u_3, u_4, w_5, \dots, w_8\}] \in \mathcal{K}_8^4$, 其中核为 $\{v, u_2, u_3, u_4, w_5, \dots, w_8\}$. 令 $F_4 = \mathcal{H}[\{v, u_2, u_3, u_4, w_1, w_2, \dots, w_8\}]$, 因为 F_4 不包含在偶二部 4-图中, 所以 F_4 一定是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的; 否则, $F_4 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 因此存在同态映射 $\psi: V(F_4) \rightarrow V(\mathcal{G}_8^2)$, 使得对于所有 $e \in F_4$ 都有 $\psi(e) \in \mathcal{G}_8^2$. 因为 $\{w_1, w_2, \dots, w_8\}$ 和 $\{v, u_2, u_3, u_4, w_5, \dots, w_8\}$ 在 F_4 中是 2-覆盖的, 所以 ψ 在 $\{w_1, w_2, \dots, w_8\}$ 和 $\{v, u_2, u_3, u_4, w_5, \dots, w_8\}$ 上都是单射. 根据上述第 (2) 点, 点 v 和 $w_2, \dots, w_8$ 在 F_4 中都有边, 所以 $\psi(v)$ 和 $\psi(w_2), \dots, \psi(w_8)$ 都不相同, 这意味着 $\psi(v) = \psi(w_1)$. 同理, 对于 $i = 2, 3, 4$, 有 $\psi(u_i) = \psi(w_i)$. 由于 $L_{F_4}(w_1)[\{w_2, \dots, w_8\}]$ 有 32 条边, 而 $u_2 u_3 u_4 \in L_{F_4}(v) \setminus L_{F_4}(w_1)$, 所以 $\psi(v)$ 在 $\mathcal{G}_8^2$ 中的度至少为 $32 + 1 = 33$, 这与 $\mathcal{G}_8^2$ 的最大度为 32 相矛盾. 证毕. $\square$

最后, 设

$$V_j^* = \begin{cases} V_1 \cup \{v\}, & j = 1, \\ V_j, & j \in [2, 8], \end{cases}$$

则 $\mathcal{P}^* = \{V_1^*, \dots, V_8^*\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的点集划分, 根据断言 4.11, $L_{\mathcal{H}}(v) \subseteq L_{\widehat{\mathcal{G}}_8^2}(u)$, 其中 $u \in V_1$. 因此, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的, 引理 4.4 证毕. $\square$

4.4 定理 1.2(2) 的证明

令 $\epsilon > 0$ 充分小, N_0 为充分大的正整数. 对于任意 $n > N_0$, 令 $\mathcal{H}$ 是一个顶点数为 n 、最小度 $\delta(\mathcal{H}) \geq (1/16 - \zeta)n^3$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图. 由引理 3.4 可知 $\mathcal{M}$ 是膨胀不变的. 根据定理 4.1 和引理 4.1,

只需要证明 $\mathcal{M}$ 对于 $\mathfrak{H}$ 是点可扩的. 若存在 $\mathcal{H}$ 中的一点 v 使得 $\mathcal{H} - v$ 是偶二部 4- 图, 则由引理 4.2 可知 $\mathcal{H}$ 也是偶二部 4- 图. 若存在 $\mathcal{H}$ 中的一点 v 使得 $\mathcal{H} - v$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的, 则由引理 4.4 可知 $\mathcal{H}$ 也是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的. 证毕.

5 $\mathcal{M}$ 的可行域

本节考虑超图族 $\mathcal{M} = \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^1) \cap \mathcal{F}_{81}(\mathcal{G}_n^2)$ 的可行域 $\Omega(\mathcal{M})$, 并证明定理 1.3. 首先, 根据定理 1.2, 有以下 $\mathcal{M}$ 点稳定性的推论.

推论 5.1 存在 $\epsilon > 0$ 和正整数 N_0 , 使得对于所有的正整数 $n > N_0$ 有以下结论成立: 若 $\mathcal{H}$ 是 n 个顶点、边数为 $|\mathcal{H}| \geq (1/64 - \epsilon)n^4$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4- 图, 则存在一个大小不超过 $\epsilon^{1/2}n$ 的点集 $Z_\epsilon \subseteq V(\mathcal{H})$, 使得 $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - Z_\epsilon$ 或者是偶二部 4- 图或者是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的, 并且 $\delta(\tilde{\mathcal{H}}) \geq (1/16 - 3\epsilon^{1/2})n^3$, $|\tilde{\mathcal{H}}| \geq (1/64 - 2\epsilon^{1/2})n^4$.

证明 令 $\epsilon > 0$ 充分小, 正整数 N_0 充分大, $n > N_0$. 设 $\mathcal{H}$ 是 n 个顶点、边数为 $|\mathcal{H}| \geq (1/64 - \epsilon)n^4$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4- 图. 令

$$Z_\epsilon = \left\{ u \in V(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(u) \leq \left(\frac{1}{16} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^3 \right\}. \quad (5.1)$$

首先证明 $|Z_\epsilon| \leq \epsilon^{1/2}n$, 否则, 取 Z_ϵ 的子集 X 使得 $\epsilon^{1/2}n \leq |X| \leq 2\epsilon^{1/2}n$. 根据 (5.1) 中 Z_ϵ 的定义, 有

$$\begin{aligned} |\mathcal{H} - X| &\geq \left(\frac{1}{64} - \epsilon \right) n^4 - |X| \left(\frac{1}{16} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^3 \\ &\geq \left(\frac{1}{64} - \epsilon \right) n^4 - |X| \left(\frac{1}{16} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^3 - \frac{n^2}{2} (|X| - \epsilon^{1/2}n) (2\epsilon^{1/2}n - |X|) \\ &= \frac{1}{64} (n - |X|)^4 + \frac{1}{2} \epsilon^{1/2} |X| n^3 + \frac{13}{32} |X|^2 n^2 + \frac{1}{64} (4n - |X|) |X|^3 \\ &> \frac{1}{64} (n - |X|)^4. \end{aligned}$$

而根据定理 1.2(1), 可得 $|\mathcal{H} - X| \leq (n - |X|)^4/64$, 矛盾.

对于任意 $u \in V(\tilde{\mathcal{H}})$, 都有

$$d_{\tilde{\mathcal{H}}}(u) \geq d_{\mathcal{H}}(u) - |Z|n^2 \geq \left(\frac{1}{16} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^3 - \epsilon^{1/2}n^3 = \left(\frac{1}{16} - 3\epsilon^{1/2} \right) n^3.$$

同理,

$$|\tilde{\mathcal{H}}| \geq |\mathcal{H}| - |X|n^3 \geq \left(\frac{1}{64} - \epsilon \right) n^4 - \epsilon^{1/2}n^4 > \left(\frac{1}{64} - 2\epsilon^{1/2} \right) n^4.$$

因为 $\delta(\tilde{\mathcal{H}}) \geq (1/16 - 3\epsilon^{1/2})n^3$, 所以根据定理 1.2(2), $\tilde{\mathcal{H}}$ 或者是偶二部 4- 图或者是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的. $\square$

下面利用推论 5.1 证明如下引理.

引理 5.1 令 $\epsilon > 0$ 充分小, 正整数 N_0 充分大, $n > N_0$, 设 $\mathcal{H}$ 是一个 n 个顶点、边数为 $|\mathcal{H}| \geq (1/64 - \epsilon)n^4$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4- 图, 则

$$\left| |\partial\mathcal{H}| - \frac{7}{64}n^3 \right| \leq 100\epsilon^{1/4}n^3 \quad \text{或者} \quad \left| |\partial\mathcal{H}| - \frac{1}{8}n^3 \right| \leq 100\epsilon^{1/4}n^3.$$

证明 设 $\mathcal{H}$ 是 n 个顶点、边数为 $|\mathcal{H}| \geq (1/64 - \epsilon)n^4$ 且不含 $\mathcal{M}$ 的 4-图, 则由推论 5.1 可知, $\mathcal{H}$ 存在一个大小不超过 $\epsilon^{1/2}n$ 的点集 $Z_\epsilon \subseteq V(\mathcal{H})$, 使得 $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - Z_\epsilon$ 或者是偶二部 4-图或者是 $\mathcal{G}_8^2$ -可染的, 并且 $\delta(\tilde{\mathcal{H}}) \geq (1/16 - 3\epsilon^{1/2})n^3$, $|\tilde{\mathcal{H}}| \geq (1/64 - 2\epsilon^{1/2})n^4$. 令 $\tilde{n} = |V(\tilde{\mathcal{H}})|$, 则

$$\tilde{n} = n - |Z_\epsilon| \geq n - \epsilon^{1/2}n.$$

考虑 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是偶二部 4-图的情形. 设其点集可以划分为 A_1 和 A_2 , 使得对于任意 $E \in \tilde{\mathcal{H}}$ 都有 $|E \cap A_1| = |E \cap A_2| = 2$. 类似断言 4.1 的证明, 对于 $i = 1, 2$, 都有

$$\frac{n}{2} - 6\epsilon^{1/4}n \leq |A_i| \leq \frac{n}{2} + 6\epsilon^{1/4}n. \quad (5.2)$$

首先证明 $|\partial\mathcal{H}|$ 的下界, 在 $\partial\tilde{\mathcal{H}}$ 中有两类边, 一类交 A_1 于两个点, 交 A_2 于一个点, 设这类边有 a 条; 另一类交 A_1 于一个点, 交 A_2 于两个点, 设这类边有 b 条. 因为 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是偶二部 4-图, 所以

$$a|A_2| \geq \sum_{v \in A_2} d_{\tilde{\mathcal{H}}}(v) = 2|\tilde{\mathcal{H}}|, \quad b|A_1| \geq \sum_{v \in A_1} d_{\tilde{\mathcal{H}}}(v) = 2|\tilde{\mathcal{H}}|.$$

因此

$$\begin{aligned} |\partial\mathcal{H}| &\geq |\partial\tilde{\mathcal{H}}| = a + b \geq \frac{2|\tilde{\mathcal{H}}|}{|A_2|} + \frac{2|\tilde{\mathcal{H}}|}{|A_1|} \\ &\geq \frac{2(1/64 - 2\epsilon^{1/2})n^4}{n/2 + 6\epsilon^{1/4}n} + \frac{2(1/64 - 2\epsilon^{1/2})n^4}{n/2 + 6\epsilon^{1/4}n} \\ &\geq \frac{1}{8}n^3 - 100\epsilon^{1/4}n^3. \end{aligned}$$

下面证明 $|\partial\mathcal{H}|$ 的上界. 对于任意 $v \in Z_\epsilon$, 设存在边 $u_1u_2u_3 \in L_{\mathcal{H}}(v)[A_1]$, 由于

$$\min\{|L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_1)|, |L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_2)|, |L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_3)|\} \geq \left(\frac{1}{16} - 3\epsilon^{1/2}\right)n^3,$$

所以 $L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_1)$ 、 $L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_2)$ 和 $L_{\tilde{\mathcal{H}}}(u_3)$ 至少存在一条公共边 $u_4u_5u_6$, 即存在 $u_4 \in A_1$, $u_5, u_6 \in A_2$, 使得 $u_1u_4u_5u_6, u_2u_4u_5u_6, u_3u_4u_5u_6 \in \tilde{\mathcal{H}}$, 这意味着 $\mathcal{F}_7 \subseteq \mathcal{H}[\{v, u_1, \dots, u_6\}]$. 类似断言 4.2 的证明, 对于任意 $u \in V(\tilde{\mathcal{H}})$, 都有

$$|N_{\mathcal{H}}(u) \cap A_2| \geq |A_2| - 50\epsilon^{1/4}n. \quad (5.3)$$

定义 $A'_2 = A_2 \cap (\bigcap_{i \in [6]} N_{\mathcal{H}}(u_i))$. 根据 (5.2) 和 (5.3), 可得

$$|A'_2| \geq \frac{n}{2} - 6\epsilon^{1/4}n - 6 \times 50\epsilon^{1/4}n > \frac{n}{3}.$$

从 A'_2 中选择一点 u_7 , 对于 $j \in [6]$, 令 e_j 表示 $\mathcal{H}$ 中包含 $\{u_j, u_7\}$ 的边. 从而, 得到 $F_1 = \mathcal{H}[\{v, u_1, u_2, \dots, u_7\}] \cup \{e_j: j \in [6]\} \in \mathcal{K}_7^4$, 其核为 $\{u_1, \dots, u_7\}$, 且使得 $\mathcal{F}_7 \subseteq F_1$. 重复此过程两次, 便可在 $\mathcal{H}$ 中找到 $F_3 \in \mathcal{K}_9^4$ 且 $\mathcal{F}_7 \subseteq F_3$, 从而有 $F_3 \in \mathcal{M}$, 这与 $\mathcal{H}$ 不含 $\mathcal{M}$ 矛盾. 所以 $L_{\mathcal{H}}(v)[A_1] = \emptyset$, 同理可得 $L_{\mathcal{H}}(v)[A_2] = \emptyset$. 因此,

$$|\partial\mathcal{H}| \leq 2 \times \frac{\tilde{n}}{2} \times \binom{\tilde{n}/2}{2} + \binom{\tilde{n}}{2} |Z_\epsilon| + \binom{|Z_\epsilon|}{2} \tilde{n} + \binom{|Z_\epsilon|}{3} \leq \frac{1}{8}n^3 + 100\epsilon^{1/4}n^3.$$

所以, 若 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是偶二部 4- 图, 则

$$\frac{1}{8}n^3 - 100\epsilon^{1/4}n^3 \leq |\partial\tilde{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{8}n^3 + 100\epsilon^{1/4}n^3. \quad (5.4)$$

下面考虑 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的情形. 设 $\tilde{\mathcal{H}}$ 对应的点集划分为 $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_8\}$, 使得 $\tilde{\mathcal{H}}$ 的每条边交 V_i ($i \in [8]$) 于至多一个点, 并且对于 $1 \leq i < j \leq 4$, 不存在 $V_{2i-1}V_{2i}V_{2j-1}V_{2j}$ 类型的边. 类似断言 4.4 的证明, 对于 $i \in [8]$, 都有

$$\frac{n}{8} - 10\epsilon^{1/4}n \leq |V_i| \leq \frac{n}{8} + 10\epsilon^{1/4}n. \quad (5.5)$$

下面证明 $|\partial\mathcal{H}|$ 的下界. 因为 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的, 所以 $\partial\tilde{\mathcal{H}}$ 是 8- 部的 3- 图. 令 $\mathcal{G}$ 表示由图 $\mathcal{G}_8^2$ 每个点分别以 $|V_1|, \dots, |V_8|$ 的大小进行膨胀所形成的图. 由 (5.5), 对于 $\partial\mathcal{G} \setminus \partial\tilde{\mathcal{H}}$ 中的每条边 e , 至少存在 $4(n/8 - 10\epsilon^{1/4}n)$ 条 $\mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{H}}$ 中的边 E 使得 $e \subset E$. 因此,

$$|\partial\mathcal{G} \setminus \partial\tilde{\mathcal{H}}| \leq \frac{4|\mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{H}}|}{4(n/8 - 10\epsilon^{1/4}n)} \leq \frac{2\epsilon^{1/2}n^4}{n/8 - 10\epsilon^{1/4}n} \leq \frac{2\epsilon^{1/2}n^4}{n/10} = 20\epsilon^{1/2}n^3.$$

从而有

$$|\partial\tilde{\mathcal{H}}| \geq |\partial\mathcal{G}| - 20\epsilon^{1/2}n^3 \geq \binom{8}{3} \left(\frac{n}{8} - 10\epsilon^{1/4}n \right)^3 - 20\epsilon^{1/2}n^3 \geq \frac{7}{64}n^3 - 100\epsilon^{1/4}n^3.$$

所以,

$$|\partial\mathcal{H}| \geq |\partial\tilde{\mathcal{H}}| \geq \frac{7}{64}n^3 - 100\epsilon^{1/4}n^3. \quad (5.6)$$

接下来, 给出 $|\partial\mathcal{H}|$ 的上界. 类似断言 4.7 的证明, 对于任意 $v \in Z_\epsilon$, 点 v 的链图 $L_{\mathcal{H}}(v)$ 中的每一条边最多交 V_i ($i \in [8]$) 一个点. 因此,

$$|\partial\mathcal{H}| \leq \binom{8}{3} \left(\frac{\tilde{n}}{8} \right)^3 + \binom{\tilde{n}}{2} |Z_\epsilon| + \binom{|Z_\epsilon|}{2} \tilde{n} + \binom{|Z_\epsilon|}{3} \leq \frac{7}{64}n^3 + 100\epsilon^{1/4}n^3. \quad (5.7)$$

结合 (5.6) 和 (5.7) 可以得到, 若 $\tilde{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}_8^2$ - 可染的, 则

$$\frac{7}{64}n^3 - 100\epsilon^{1/4}n^3 \leq |\partial\mathcal{H}| \leq \frac{7}{64}n^3 + 100\epsilon^{1/4}n^3. \quad (5.8)$$

结合 (5.4) 和 (5.8), 引理 5.1 得证. $\square$

定理 1.3 的证明 设 $g(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 的可行域函数, 由定理 1.2 可知, 对于 $x \in \text{proj}\Omega(\mathcal{M})$, $g(\mathcal{M})(x) \leq 3/8$, 并且 $g(\mathcal{M})(21/32) = g(\mathcal{M})(3/4) = 3/8$. 设 $(\mathcal{H}_k)_{k=1}^\infty$ 是不含 $\mathcal{M}$ 的 4- 图序列, 并且满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(\mathcal{H}_k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\partial\mathcal{H}_k) = x_0, \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\mathcal{H}_k) = \frac{3}{8}.$$

则对于充分小的 $\epsilon > 0$ 和充分大的正整数 N_0 , 存在 k_0 使得对于所有 $k \geq k_0$, 都有

$$v(\mathcal{H}_k) \geq N_0, \quad |\mathcal{H}_k| > \left(\frac{1}{64} - \epsilon \right) (v(\mathcal{H}_k))^4.$$

由引理 5.1 可知, 对于所有 $k \geq k_0$, 都有

$$\frac{21}{32} - 700\epsilon^{1/4} \leq \frac{|\partial\mathcal{H}_k|}{\binom{v(\mathcal{H}_k)}{3}} \leq \frac{21}{32} + 700\epsilon^{1/4}$$

或者

$$\frac{3}{4} - 700\epsilon^{1/4} \leq \frac{|\partial\mathcal{H}_k|}{\binom{v(\mathcal{H}_k)}{3}} \leq \frac{3}{4} + 700\epsilon^{1/4}.$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可以得到 $x_0 = 21/32$ 或 $x_0 = 3/4$. 证毕. $\square$

致谢 感谢刘西之博士带给我们这个课题. 感谢审稿人对稿件的认真阅读以及提出宝贵的建议.

参考文献

- 1 Chen W, Lu C, Yuan L T. A stability theorem for multi-partite graphs. arXiv:2208.13995, 2022
- 2 Chung F, Lu L. An upper bound for the Turán number $t_3(n, 4)$. J Combin Theory Ser A, 1999, 87: 381–389
- 3 Erdős P, Simonovits M. A limit theorem in graph theory. Studia Sci Math Hungar, 1966, 1: 51–57
- 4 Erdős P, Stone A H. On the structure of linear graphs. Bull Amer Math Soc (NS), 1946, 52: 1087–1091
- 5 Fon-Der-Flaas D G. On a method of construction of $(3, 4)$ -graphs. Mat Zametki, 1988, 44: 546–550
- 6 Frankl P, Füredi Z. Extremal problems whose solutions are the blowups of the small Witt-designs. J Combin Theory Ser A, 1989, 52: 129–147
- 7 Füredi Z, Pikhurko O, Simonovits M. 4-books of three pages. J Combin Theory Ser A, 2006, 113: 882–891
- 8 Füredi Z, Simonovits M. Triple systems not containing a Fano configuration. Combin Probab Comput, 2005, 14: 467–484
- 9 Gao J, Lu H, Ma J, et al. On the rainbow matching conjecture for 3-uniform hypergraphs. Sci China Math, 2022, 65: 2423–2440
- 10 Hou J, Li H, Liu X, et al. Hypergraphs with infinitely many extremal constructions. Discrete Anal, 2023, (18): 34pp
- 11 Jiang T, Peng Y, Wu B. Lagrangian densities of some sparse hypergraphs and Turán numbers of their extensions. European J Combin, 2018, 73: 20–36
- 12 Katona G, Nemetz T, Simonovits M. On a graph-problem of Turán in the theory of graphs. Mat Lapok (NS), 1964, 15: 228–238
- 13 Keevash P. Hypergraph Turán problems. Surv Combin, 2011, 392: 83–140
- 14 Keevash P, Sudakov B. The Turán number of the Fano plane. Combinatorica, 2005, 25: 561–574
- 15 Kostochka A V. A class of constructions for Turán’s $(3, 4)$ -problem. Combinatorica, 1982, 2: 187–192
- 16 Liu X. Extremal hypergraph problems. PhD Thesis. Chicago: University of Illinois at Chicago, 2022
- 17 Liu X. Cancellative hypergraphs and Steiner triple systems. J Combin Theory Ser B, 2024, in press
- 18 Liu X, Mubayi D. The feasible region of hypergraphs. J Combin Theory Ser B, 2021, 148: 23–59
- 19 Liu X, Mubayi D. A hypergraph Turán problem with no stability. Combinatorica, 2022, 42: 433–462
- 20 Liu X, Mubayi D, Reiher C. A unified approach to hypergraph stability. J Combin Theory Ser B, 2023, 158: 36–62
- 21 Liu X, Mubayi D, Reiher C. Hypergraphs with many extremal configurations. Israel J Math, 2024, in press
- 22 Liu X, Pikhurko O. Finite hypergraph families with rich extremal Turán constructions via mixing patterns. arXiv:2212.08636, 2022
- 23 Liu X, Song J. Hypergraph anti-Ramsey theorems. arXiv:2310.01186, 2023
- 24 Mantel W. Solution to problem 28, by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W. A. Wythoff. Wiskundige Opgaven, 1907, 10: 60–61
- 25 Mubayi D. Structure and stability of triangle-free set systems. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 275–291
- 26 Mubayi D, Pikhurko O. A new generalization of Mantel’s theorem to k -graphs. J Combin Theory Ser B, 2007, 97: 669–678
- 27 Pikhurko O. An exact Turán result for the generalized triangle. Combinatorica, 2008, 28: 187–208
- 28 Pikhurko O. On possible Turán densities. Israel J Math, 2014, 201: 415–454
- 29 Razborov A A. On 3-hypergraphs with forbidden 4-vertex configurations. SIAM J Discrete Math, 2010, 24: 946–963
- 30 Simonovits M. A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems. In: Theory of Graphs. New York: Academic Press, 1968, 279–319
- 31 Turán P. On an external problem in graph theory. Mat Fiz Lapok, 1941, 48: 436–452
- 32 Zhang Y, Hou J, Li H. A 2-stable family of triple systems. Electron J Combin, 2024, in press
- 33 Zykov A A. On some properties of linear complexes. Mat Sb, 1949, 66: 163–188

A family of 4-uniform hypergraphs with no stability

Yixiao Zhang, Heng Li & Jianfeng Hou

Abstract Unlike graphs, for an integer $r \geq 3$ and many classical families of r -uniform hypergraphs $\mathcal{M}$, there are perhaps more than one $\mathcal{M}$ -free r -uniform hypergraphs with n vertices and the maximum possible number of edges (such hypergraphs are called extremal configurations). Moreover, those extremal configurations are far from each other in edit-distance. Such a phenomenon is called not stable and is a fundamental barrier to determining the Turán number of $\mathcal{M}$. Liu and Mubayi (2022) gave the first example for 3-uniform hypergraphs to be not stable. A simple argument shows that for $r \geq 4$, one can get a family of r -uniform hypergraphs which is not stable through a not stable family of 3-uniform hypergraphs. In this paper, we construct a finite family of 4-uniform hypergraphs $\mathcal{M}$ directly such that two near-extremal $\mathcal{M}$ -free configurations are far from each other in edit-distance. This is the first unstable example that does not depend on 3-uniform hypergraphs. We also prove its Andrásfai-Erdős-Sós type stability theorem: Every $\mathcal{M}$ -free 4-uniform hypergraph whose minimum degree is close to the average degree of extremal configurations is a subgraph of one of these two near-extremal configurations. As a corollary, our main result shows that the boundary of the feasible region of $\mathcal{M}$ has exactly two global maxima.

Keywords hypergraph, Turán number, stability, feasible region

MSC(2020) 05C35, 05C65, 05D05

doi: 10.1360/SSM-2023-0059