

# 双列机车地铁杂散电流建模分析\*

黄元亮<sup>1, \*\*</sup> 邓翔<sup>2</sup>

(1. 暨南大学电气自动化研究所, 珠海 519070;  
2. 珠海派诺科技股份有限公司, 珠海 519080)

**摘要:**分析双边取流和单列列车运行状态下的杂散电流。在双边取流的情况下, 建模分析两列列车在同一区间内运行时地铁牵引供电产生的杂散电流, 并获得了该模型在特殊参数情况下的解。

**关键词:**地铁; 杂散电流; 牵引供电; 建模

中图分类号: U284 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.1006-6055.2014.04.004

## Stray Current Modeling of Subway for Two Trains\*

HUANG Yuanliang<sup>1, \*\*</sup> DENG Xiang<sup>2</sup>

(1. Electric Automatization Institute, Jinan University, Zhuhai 519070;  
2. Zhuhai Pilot Technology Co., Ltd, Zhuhai 519080)

**Abstract:** Stray current on a train operation and its traction power coming from two traction power substations are analyzed. A new stray current model is built for the situation that the stray current is produced by the traction power of two trains which operate at the same time in a power supply interval and receive power from two adjacent traction power substations. The solution of the model is obtained for some special parameters.

**Key words:** subway; stray current; traction power supply; modeling

### 1 引言

地铁行轨是地铁牵引供电的一个重要部分, 虽然与大地没有直接接触, 却作为回流装置与大地间存在泄漏电流, 这种随机的泄漏电流通过大地回到地铁牵引变电所, 在这个过程中对沿途的地下金属管线造成严重的腐蚀, 同时对地铁信号系统产生一定的影响。

国内外不少学者对地铁杂散电流的分布进行了深入的研究, 得出了一系列好的结果, 对地铁进行及时排流提供了好的理论支持, 减少了地铁杂散电流对地下管线和沿途建筑物的破坏, 有效提高了地铁系统相关建筑的可靠性和使用寿命。

本文将在双边供电模式下, 对两辆机车运行状态的杂散电流分布进行建模, 并对特殊参数下的模型进行求解。

### 2 杂散电流分布的建模

实际运行时整个地铁线路由多个变电所为地铁

里的列车供电, 对每个供电区间进行双边供电。我们考虑在两牵引供电所 (Traction Power Substations, TPS) 之间, 没有排流网, 运行着两辆列车的情况下, 行轨产生的杂散电流。如图 1 所示, 两辆列车分别在  $x, y$  处 ( $0 < x < y < L$ ), 为了简化分析过程, 根据定时发车的实情, 可设  $y - x = C$  为常数。其中  $L$  为两牵引变电所间的距离, 取值为  $4 \sim 6$  km;  $R$  为第三轨电阻, 单位为  $\Omega/\text{km}$ ;  $R_r$  为钢轨纵向电阻, 单位为  $\Omega/\text{km}$ ;  $R_g$  为走行轨对地电阻, 单位为  $\Omega/\text{km}$ ;  $R_d$  为大地纵向电阻, 单位为  $\Omega/\text{km}$ ;  $I_1, I_2$  为两牵引变电所电流输出, 单位为 A;  $I_x, I_y$  为负载电流, 单位为 A;  $I_{r1} \sim I_{r3}$  为走行轨回流电流, 单位为 A;  $I_{d1} \sim I_{d3}$  为大地杂散电流, 单位为 A。记第三轨与走行轨间的电压为  $U_1$ , 单位为 V, 走行轨间与大地间的电压为  $U_2$ , 单位

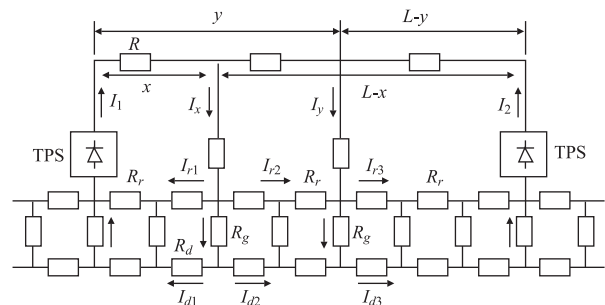


图 1 双列双边供电等值电路

Figure 1 Equivalent circuit figure of two-side feeding for two trains

2014-01-26 收稿, 2014-03-24 接受

\* 广东省、珠海市产学研项目 (2012B0910 00138, 2012D0501990003, 2013D0501990002) 资助

\*\* 通讯作者, E-mail: tyoll@jnu.edu.cn; Tel: 15818958088

为V。根据牵引供电运行的对称性,有:

$$I_{r3}(L-x) = -I_{r1}(x)$$

$$I_{d3}(L-x) = -I_{d1}(x)$$

由 Ade Ogunsola 的文献<sup>[1]</sup>中知,单辆列车从相邻两站的取流为:当  $0 \leq z < x$  时,

$$I_1(z) = \frac{R_r}{R_r + R_g} \times \frac{L-x}{L} I \left[ \tan\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \sin(\gamma z) - \cos(\gamma z) + 1 \right] \quad (1)$$

当  $x \leq z < L$  时,

$$I_2(z) = \frac{R_r}{R_r + R_g} \times \frac{x}{L} I \times \left[ \frac{\sin\gamma(x-z) + \sin\gamma(z-L)}{\sin\gamma(x-L)} \right] \quad (2)$$

其中,  $\gamma = \sqrt{(R_r + R_d)/R_g}$ 。其仿真结果显示,当  $z$  在  $x$  附近取值时,  $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$  的值近似地与授流点到两牵引供电所的距离成反比。为了简化计算,我们直接引用这个结果,即:

$$I_1(x)/I_2(x) = (L-x)/x$$

$$I_1(x) = I \times (L-x)/L, I_2(x) = I \times x/L$$

由此可得两列车的授流比例为

$$I_1(x) = I_x \times (L-x)/L + I_y \times (L-x-C)/L \quad (3)$$

$$I_2(x) = I_x \times x/L + I_y \times (x+C)/L \quad (4)$$

由于  $I_x$ 、 $I_y$  是已知量,在以下的推导过程中,将  $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$  作为已知量处理,同时作为常数其大小对推导过程没有影响,不妨设  $I_x = I_y = I_0$ 。

由于  $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$  的方向相反,在两列车中间,部分电流被抵消,当  $(L-x-C) > x$ , 即  $0 \leq x < (L-C)/2$  时,中间电流  $I_3(x)$  流向为从左向右,大小为:

$$I_3(x) = I_y \times (L-x-C)/L - I_x \times x/L = I \times (L-2x-C)/L \quad (5)$$

$$I_1(x) = I + I_3(x) = I \times (2L-2x-C)/L \quad (6)$$

$$I_2(x) = I - I_3(x) = I \times (2x+C)/L \quad (7)$$

当  $(L-C) > x > (L-C)/2$  时,中间电流从右流向左,大小为:

$$I_3(x) = I_x \times x/L - I_y \times (L-x-C)/L = I \times (2x+C-L)/L \quad (8)$$

$$I_1(x) = I - I_3(x) = I \times (2L-2x-C)/L \quad (9)$$

$$I_2(x) = I + I_3(x) = I \times (2x+C)/L \quad (10)$$

对于  $0 < x < C$  和  $L-C < x < L$  时,属于单列授流,在文献<sup>[2]</sup>中已得出杂散电流的相关结果为:

$$U_r(z) = \frac{I(L-x)R_r}{\gamma L} \left[ \sinh(\gamma z) - \tanh(\gamma x/2) \cosh(\gamma z) \right], 0 \leq z \leq x$$

$$\frac{IR_r x \cosh(\gamma z - \gamma L) - \cosh(\gamma z - \gamma L)}{\gamma L \sinh(\gamma x - \gamma L)}, x \leq z \leq L \quad (11)$$

$$I_r(z) = \frac{I(L-x)R_r}{L(R_r + R_d)} \left[ 1 + \sinh(\gamma z) \times \tanh(\gamma x/2) - \cosh(\gamma z) \right], 0 \leq z \leq x$$

$$\frac{Ix}{L} \{ [R_r/(R_r + R_d)] - [R_r(\sinh(\gamma x - \gamma z) - \sinh(\gamma L - \gamma z))]/[(R_r + R_d)\sinh(\gamma x - \gamma L)] \}, x \leq z \leq L \quad (12)$$

对于双列授流情况,可以看出两种情况的对称性,只是方向相反,因此我们就第一种情况进行杂散电流分析。

当  $0 \leq x < (L-C)/2$  时,根据基尔霍夫电流定律( $\Sigma I = 0$ ),由图2可知:

$$I_x(x) = I_{r1}(x) + I_{r2}(x) + I_{d1}(x) + I_{d2}(x) \quad (13)$$

$$I_{r1}(x) = (I_{r1}(x) - dI_{r1}(x)) + U_2(x) \times dx/R_g \quad (14)$$

$$I_{r2}(x) = (I_{r2}(x) - dI_{r2}(x)) + U_2(x+C) \times dx/R_g \quad (15)$$

根据基尔霍夫电压定律( $\Sigma U = 0$ ),由图3可得:

$$U_1 = (I_1 \times R + I_{r1} \times R_r) dx + U_1 - dU_1 \quad (16)$$

$$U_2(x) = (I_{d1} \times R_d - I_{r1} \times R_r) dx + U_2 + dU_2 \quad (17)$$

$$U_2(x+C) = U_2(x+C) - dU_2(x) + dx \times I_{r2}(x) \times R_r - dx \times I_{d2}(x) \times R_d \quad (18)$$

整理得到地铁杂散电流微分模型:

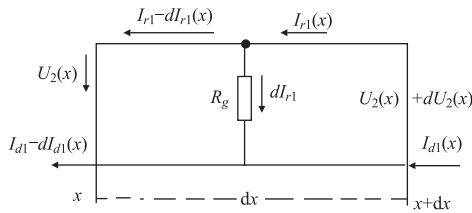
$$dU_1(x) = (I_1(x) \times R + I_{r1}(x) \times R_r) dx \quad (19)$$

$$dU_2(x) = (I_{r1}(x) \times R_r - I_{d1}(x) \times R_d) dx \quad (20)$$

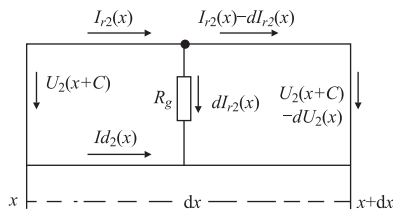
$$dU_2(x) = (I_{r2}(x) \times R_r - I_{d2}(x) \times R_d) \times dx \quad (21)$$

$$dI_{r1}(x) = U_2(x) \times dx/R_g \quad (22)$$

$$dI_{r2}(x) = [U_2(x) + C \times I_{d2}(x) \times R_d - I_{r2}(x) \times R_r \times C] \times dx/R_g \quad (23)$$



(a)  $I_{r1}(x)$ 和 $I_{d1}(x)$ 节点图



(b)  $I_{r2}(x)$ 和 $I_{d2}(x)$ 节点图

图2 电流节点图

Figure 2 Node figure of current

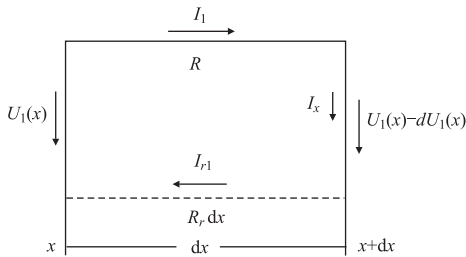


图3 电压节点图

Figure 3 Node figure of voltage

### 3 杂散电流模型求解

众所周知,带参数的微分方程组的解析解一般不容易由 MATLAB 进行求解,下面我们逐步进行微分方程组的化简。

由式(20)、(21)消去  $I_{d1}(x)$ 、 $I_{d2}(x)$  得到微分方程组:

$$\begin{aligned} dU_1(x) &= (I_1(x) \times R + I_{r1} \times R_r) dx \\ dU_2(x) &= [ (I_{r1}(x) \times (3R_r - R_d)/2 - I \times R_r/2 \\ &\quad - I_{r2} \times (R_r + R_d)/2 ] dx \\ dI_{r1}(x) &= U_2(x) \times dx/R_g \\ dI_{r2}(x) &= [ U_2(x) + I_{r1}(x) \times C(R_r + R_d)/2 - \\ &\quad I_{r2}(x) \times C(3R_r - R_d)/2 + I \times C \times \\ &\quad R_d/2 ] \times dx/R_g \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0.62828e^{-0.05826x} & -0.35213e^{0.07735x} & -0.16195e^{0.02641x} \\ -0.71930e^{-0.05826x} & -0.30366e^{0.07735x} & -0.40894e^{0.02641x} \\ -0.29643e^{-0.05826x} & -0.88532e^{0.7735x} & 0.89808e^{0.02641x} \end{pmatrix} \quad (27)$$

写成矩阵形式有:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} U_1(x) \\ \frac{d}{dx} U_2(x) \\ I_{r1}(x) \\ I_{r2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & (3R_r - R_d)/2 & (R_r + R_d)/2 \\ 0 & 1/R_g & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_g & C(R_r + R_d)/2 & C(3R_r - R_d)/2 \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} U_1(x) & I_1(x)R \\ U_2(x) & -IR_r/2 \\ I_{r1}(x) & 0 \\ I_{r2}(x) & CIR_d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

注意到方程组的第一个方程  $U_1(x)$  只与  $I_{r1}(x)$  有关,方程组可减化成:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} U_2(x) \\ \frac{d}{dx} I_{r1}(x) \\ I_{r2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (3R_r - R_d)/2 & (R_r + R_d)/2 \\ 1/R_g & 0 & 0 \\ 1/R_g & C(R_r + R_d)/2 & C(3R_r - R_d)/2 \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} U_2(x) & -IR_r/2 \\ I_{r1}(x) & 0 \\ I_{r2}(x) & CIR_d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

虽然式(25)已只是一个三元一次微分方程组,但其解析解仍非常复杂,没有多大的实用价值。因此可以根据工程实际进行数值计算。根据工程实际的一些经验,取比较典型的参数如下:供电区间为  $L = 4$  km,行车间距为  $C = 1$  km 机车电流为  $I = 1000$  A,轨道纵向电阻率为  $R = R_r = 0.03 \Omega/\text{km}$ ,大地纵向电阻率为  $R_d = 0.001 \Omega/\text{km}$ 。轨道对大地过渡电阻率为  $R_g = 15 \Omega/\text{km}$ ,则式(25)变成:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} U_2(x) \\ \frac{d}{dx} I_{r1}(x) \\ I_{r2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.0445 & 0.0155 \\ 0.0667 & 0 & 0 \\ 0.0667 & 0.0155 & 0.0455 \end{pmatrix} \times \\ & \begin{pmatrix} U_2(x) & -15 \\ I_{r1}(x) & 0 \\ I_{r2}(x) & 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26) \end{aligned}$$

其对应齐次微分方程组的基解矩阵为:

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0.83795 & -0.60674 & -0.12518 \\ -1.0128 & -0.68149 & -0.49295 \\ -0.72184 & -0.87208 & 0.58622 \end{pmatrix} \quad (28)$$

在边界条件： $U_1(0) = U = 1500V, U_2(0) = U_r(C), I_{r1}(0) = I + I \times (L - C)/L, I_{r2}(0) = -I \times (L - C)/L [U_r(1) = 11.2479V]$ 下，可得微分方程组的解：

$$\begin{aligned} U_2(x) &= 11.2479 - 15 \\ I_{r1}(x) &= \Phi(x)\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 1.75I \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \int_0^x \Phi(x-s)\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} ds \\ I_{r2}(x) &= -0.75I + 0.5 \\ &= 0.77942e^{-0.05826x} + 0.403059e^{0.07735x} + 0.567520e^{0.02641x} \times 1000 + \\ &0.32122e^{-0.05826x} + 1.174965e^{0.07735x} - 1.246195e^{0.02641x} \\ &\quad - 7.9363e^{-0.5826(x-s)} - 5.2627e^{0.07735(x-s)} - 1.8010e^{0.2641(x-s)} \\ &\int_0^x 9.0861e^{-0.5826(x-s)} - 4.5384e^{0.07735(x-s)} - 4.5477e^{0.2641(x-s)} ds \\ &\quad 3.7444e^{-0.5826(x-s)} - 13.2315e^{0.07735(x-s)} + 9.9052e^{0.2641(x-s)} \end{aligned} \quad (29)$$

即

$$\begin{aligned} U_2(x) &= -465.9720e^{-0.05826x} + 225.7368e^{0.07735x} + 251.4780e^{0.02641x} + 0.0065 \\ I_{r1}(x) &= 533.4323e^{-0.05826x} + 194.6631e^{0.07735x} + 635.0235e^{0.02641x} + 386.8284 \\ I_{r2}(x) &= 219.8443e^{-0.05826x} + 567.4848e^{0.07735x} - 1397.6090e^{0.02641x} + 139.725 \end{aligned} \quad (30)$$

进而有

$$\begin{aligned} U_1(x) &= -27.4682e^{-0.05826x} + 7.55e^{0.07735x} + \\ &72.1344e^{0.02641x} - 7.5x^2 + 64.1049x - \\ &52.2162 + U \quad (31) \\ I_{d1}(x) &= (11.6045 - 11.1445e^{-0.05826x} - \\ &11.6208e^{0.07734x} + 12.4092e^{0.02641x}) / \\ &R_d \quad (32) \\ I_{d2}(x) &= (4.1918 - 20.5522e^{-0.05826x} - \\ &0.4362e^{0.07734x} - 48.5698e^{0.02641x}) / R_d \quad (33) \end{aligned}$$

据此，我们获得了一种特殊情况下的杂散电流的分布特征。对于不同的参数值，我们可以通过类似方法进行分析。

### 4 结束语

杂散电流电路元件模型随着考虑因素的增加，假设条件逐渐增多，模型愈发复杂化。本文对于双向授流和两列机车运行状态下，杂散电流的分布进行了研究，通过建立系统的一般模型，并对特殊参数进行求解，获得了其特解。当参数不同时，其分布函数也将随着变化，同时机车数增加时，模型的求解将变得更加复杂，特别系统的一般模型是一个高阶微分方程，或者是一个非线性微分方程，其求解是一个非常复杂的难题，有待于进一步进行研究。

随着地铁牵引供电电压等级的提升和供电臂的

延伸，一个供电期间内出现多列机车的情况将越来越普遍，对其进行分析是地铁安全可靠运行的一个重要课题，杂散电流对隧道和附近建筑的影响越来越受到相关部门的重视，采用科学的方法减少杂散电流对建筑物的危害，也是地铁长期发展必须解决的一个难题。

### 参考文献

[1] ADE O, ANDREQ M, LEONARDO S. Estimation of Stray Current From a DC - Electrified Railway and Impressed Potential on a Buried Pipe [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2012, 27 (4) : 2238-2246.

[2] 闫明富, 李夏青, 王奎鹏. 地铁钢轨电位和杂散电流分布研究及仿真[J]. 北京石油化工学院学报, 2013, 21(1) : 37-41.

[3] 李永刚, 李锦萍, 袁慧梅. 地铁杂散电流模拟实时监测系统[J]. 中国铁道科学, 2005, 26(5) : 119-122.

[4] 杨立新, 邸荣光, 刘仕兵. 轨道交通杂散电流腐蚀的监测及防护研究[J]. 铁道工程学报, 2006, 19(1) : 19-22.

[5] ZAKOWSKI K, DAROWICKI K. Methods of Evaluation of the Corrosion Hazard Caused by Stray Currents to Metal Structures Containing Aggressive Media [J]. Journal of Environmental Studies 2000, 9(4) : 237-241.

[6] 周晓军, 高波. 地铁杂流对钢筋混凝土中钢筋腐蚀的实验研究[J]. 铁道学报, 1999, 21(5) : 99-105.

### 作者简介

黄元亮(1963-),男,博士,教授,主要研究方向:建模与仿真、人工智能;  
邓翔(1975-),男,高级工程师,主要研究方向:电能质量、杂散电流分析。