



非共形光滑系统的维数理论

献给文兰教授 80 寿辰

曹永罗*, 赵云

苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: ylcao@suda.edu.cn, zhaoyun@suda.edu.cn

收稿日期: 2024-11-19; 接受日期: 2025-03-10; 网络出版日期: 2025-06-27; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005802) 和国家自然科学基金 (批准号: 12271386) 资助项目

摘要 相比于在共形光滑动力系统中已相对完善的维数理论, 如 Bowen 方程和维数的变分原理, 非共形光滑动力系统中的维数理论至今仍缺乏一个令人满意的通用方法. 本文介绍非共形光滑动力系统的维数理论研究的一些新进展, 包括光滑映射的排斥子和双曲集的维数, 以及支持在这些不变集上测度的维数, 特别包括 Bowen 方程、具有最大维数或满维数测度的存在性及维数逼近等.

关键词 拓扑压 测度压 维数 双曲逼近

MSC (2020) 主题分类 37C45, 37C05, 37D35, 37C70, 37D25, 28A80

1 引言

动力系统的维数理论是一个非常活跃的研究领域, 经过三十年左右的发展, 已经成为动力系统理论研究的一个重要的独立分支, 其主要目的是从维数的角度来刻画动力系统的复杂性, 如不变集和不变测度的维数研究. 关于动力系统的维数理论方面的专著, 可参见文献 [64], 这本书包含了这个领域直到 1997 年的研究进展. 对于更新的研究介绍, 可参见文献 [5, 7, 8]. 不同于其他几本专著, 文献 [8] 是介绍双曲流的维数理论的主要研究成果和研究工具. 本文介绍光滑映射的非共形排斥子和双曲集以及支撑在这些不变集上测度的维数的一些研究进展.

1.1 共形系统的维数

共形系统的维数理论已经比较完备, 我们分别简要介绍扩张情形和双曲情形的维数理论的研究进展.

英文引用格式: Cao Y L, Zhao Y. Dimension theory in non-conformal smooth systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–18, doi: [10.1360/SSM-2024-0344](https://doi.org/10.1360/SSM-2024-0344)

1.1.1 共形排斥子的维数

首先考虑排斥子的情形. 设 $f: M \rightarrow M$ 是一个 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的可微映射, $J \subset M$ 是一个 f - 不变的紧集 ($f^{-1}J = J$). 称 f 在 J 上是扩张的或者称 J 是 f 的排斥子, 如果

- (1) 存在 J 的一个开邻域 U , 使得 $J = \{x \in U : f^n(x) \in U, \forall n \geq 0\}$;
- (2) 存在常数 $\beta > 1$ 和 $c > 0$, 使得对任意 $x \in J$ 和任意 $u \in T_x M$, 有

$$\|Df^n(x)u\| \geq c\beta^n \|u\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是由流形 M 上的度量所诱导的范数.

如果对任意 $x \in J$, 有 $Df(x) = a(x)\text{Isom}_x$ (Isom_x 是 $T_x M$ 上的等距算子), 则称光滑映射 $f: M \rightarrow M$ 是共形的. 下面的定理建立了排斥子的 Hausdorff 维数 $\dim_H J$ 、下盒维数 $\underline{\dim}_B J$ 、上盒维数 $\overline{\dim}_B J$ (详细定义见第 2.1 小节) 与势函数 $-\log \|Df(x)\|$ 的拓扑压 (详细定义见第 2.2 小节) 之间的联系.

定理 1.1 设 $f: M \rightarrow M$ 是一个 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的 $C^{1+\alpha}$ 映射, J 是 f 的共形排斥子, 则

$$\dim_H J = \underline{\dim}_B J = \overline{\dim}_B J = s,$$

其中 s 是下述拓扑压方程的唯一实根:

$$P_J(f, -s \log \|Df(x)\|) = 0. \quad (1.1)$$

上述定理中的方程 (1.1) 由 Bowen^[13] 在一个特殊情形引入, 故 (1.1) 通常被称为 Bowen 方程. 但一方面由于 Ruelle^[69] 所发展的热力学机制理论在这里起到了重要作用, 另一方面由于 Ruelle^[70] 在一般的情形证明了 $\dim_H J = s$, 因此也会将 (1.1) 称为 Bowen-Ruelle 方程. 后来, Falconer^[28] 进一步证明了共形排斥子的 Hausdorff 维数、下盒维数和上盒维数都等于 Bowen 方程的唯一根. 事实上, 几乎所有已知的用于估计或计算不变集维数的方程都是 Bowen 方程的特例或适当的推广. 例如, Rugh^[71] 直接从拓扑压和维数的定义出发, 建立了拓扑压零点与维数之间的关系. Chen 和 Xiong^[21] 也建立了符号空间中子位移的测度熵与维数的关系, 同时考虑了拓扑压的零点在估计集合维数时的应用. 更多的热力学机制理论在维数理论方面的交叉研究, 可参见文献 [7]. 设 μ 是函数 $-s \log \|Df(x)\|$ 的平衡态测度, Ruelle^[70] 还证明了

$$\dim_H \mu = \dim_H J, \quad (1.2)$$

其中 $\dim_H \mu$ 表示测度 μ 的 Hausdorff 维数 (详细定义见第 2.1 小节). (1.2) 被视作维数的变分原理, 满足 (1.2) 的测度 μ 被称为具有全维数的测度. 对于 C^1 映射的共形排斥子, Gatzouras 和 Peres^[36] 也证明了上述定理和 (1.2); 特别地, 对于一类非共形乘积映射的排斥子, 他们也证明了 (1.2). Barreira^[3] 用不同的方法证明了上述定理对 C^1 映射的共形排斥子仍然成立, 且该定理对于更一般的连续的弱共形扩张映射也成立 (参见文献 [3, 64]). 对于更多关于 (1.2) 的研究, 可参见文献 [11, 35, 50, 55, 56, 82].

1.1.2 共形双曲集的维数

现在考虑双曲集的情形. 设 J 是一个微分同胚 f 的局部极大双曲集, $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 分别表示点 x 处的稳定子空间和不稳定子空间, 则下面的定理建立了双曲集的维数与拓扑压的联系.

定理 1.2 设 J 是一个 C^1 曲面微分同胚 f 的局部极大双曲集, 且 $\dim E^s(x) = \dim E^u(x) = 1$, $\forall x \in J$, 则

$$\dim_H J = \underline{\dim}_B J = \overline{\dim}_B J = t_s + t_u,$$

其中 t_s 和 t_u 是下述拓扑压方程的唯一实根:

$$P_J(f, t_s \log \|Df(x)|E^s(x)\|) = P_J(f, -t_u \log \|Df(x)|E^u(x)\|) = 0.$$

McCluskey 和 Manning [58] 建立了上述定理中的双曲集的 Hausdorff 维数与拓扑压的联系, 随后 Takens [73] 建立了 C^2 微分同胚的双曲集的盒维数与拓扑压的联系, Palis 和 Viana [62] 将微分同胚的光滑性降到了 C^1 . 上述定理对高维的双曲共形映射也成立, 具体可参见文献 [64]. 进一步地, 对于 C^2 曲面微分同胚 f 的局部极大双曲集 J , Barreira 和 Wolf [10] 利用热力学机制理论, 证明了存在一个支撑在 J 上的遍历测度 μ 使得

$$\dim_H \mu = \sup\{\dim_H \nu : \nu \text{ 是 } J \text{ 上的 } f\text{-不变测度}\}. \quad (1.3)$$

上式被视作 (1.2) 在双曲情形的一个平行结果. 通常称满足 (1.3) 的测度 μ 为具有满维数的测度. 对于高维的双曲共形映射, (1.3) 也成立, 详细证明可参见文献 [5].

综上所述, 共形光滑系统的维数理论已经得到比较完整的解决.

1.2 非共形系统的维数

与上述共形系统的维数理论相比较, 非共形系统的维数理论尚有许多问题有待解决, 如 Bowen 方程、具有全 (最大) 维数的测度的存在性. 对于非共形系统, 有很多不同于共形情形的新现象发生, 例如排斥子的 Hausdorff 维数和盒维数通常不再相等, 可参见 Pollicott 和 Weiss 在文献 [65] 中构造的例子. Chen 和 Pesin [22] 指出, 非共形排斥子的维数研究要困难得多. 造成这些困难的主要原因如下: (1) 空间中不同方向的不同扩张率导致了不同的 Lyapunov 指数; (2) 小球在扩张映射的迭代下变成为更复杂的几何形状, 同时扩张系数的数论性质也对这一演变过程有很大影响, 参见文献 [65] 中的详细介绍.

虽然非共形系统的维数理论的研究变得非常困难, 但仍然有不少有趣的研究结果. Falconer [27] 在某些条件下引入了次可加势函数的拓扑压并得到其相应的变分原理, 进而在文献 [29] 中利用 Bowen 方程的根给出了一类非共形排斥子的维数上界估计. Zhang [85] 考虑了 C^1 光滑映射的迭代 f^n 的拓扑压及其相关压函数的零点的极限, 得到了排斥子的 Hausdorff 维数的上界估计. 在不对次可加势函数加任何条件的情形下, Cao 等 [16] 定义了一般拓扑动力系统的次可加拓扑压, 并证明了其变分原理. 进一步地, 对于 C^1 光滑映射的排斥子, Ban 等 [2] 证明了次可加奇异值势函数拓扑压的零点给出了排斥子的维数上界估计; 特别地, 引入了平均共形排斥子的概念, 并得到了该类排斥子维数的计算公式. 值得指出的是, 该估计与上述 Falconer 和 Zhang 得到的估计是一样的. 最近, Feng 和 Simon [34] 证明了该拓扑压的零点也是 C^1 光滑映射的排斥子的上盒维数的上界. 对于一类保持强不稳定叶层的 C^2 非共形映射的排斥子, Hu [45] 给出了该类排斥子的盒维数的 Bowen 方程.

对于非一致扩张映射, 也有一些相关的维数理论研究. 例如, Gelfert [37] 给出了体积扩张映射不变集的上盒维数的上界估计; Horita 和 Viana [42] 及 Dysman [26] 研究了一类带洞映射的维数理论, 这包含了一些非一致扩张排斥子的例子; Fan 等 [31] 研究了一族渐近非双曲族的最大不变集的维数. 对于更多非一致情形的维数研究, 可参见文献 [41, 43, 74].

综上所述, 相较于共形系统的维数理论, 非共形系统的维数理论尚不完备. 本文综述一些非共形系统的维数理论中的一些最新研究成果, 包括 Bowen 方程和维数的变分原理.

1.3 双曲逼近

双曲逼近在微分动力系统的研究中是一个重要且基本的课题, 它也是研究双曲之外系统的动力学的一个重要工具. 粗略地讲, 对于一个具有正熵的遍历双曲测度 μ , 通常可以找到一系列马蹄 $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$, 使得马蹄上的动力学量, 如熵、压、连续函数的积分等, 可以逼近测度 μ 相应的动力学量. 这类工作可追溯至 Katok [48] 的工作 (也可参见文献 [49]). 对于区间上的分段连续单调的映射, Misiurewicz 和 Szlenk [60] 也得到了相似的结果. 关于此类研究更多的结果, 可参见文献 [1, 18, 24, 38, 39, 63, 66, 79, 81] 及其参考文献. 有关无穷维动力系统中的逼近结果, 可参见文献 [52–54, 57, 88]. 值得指出的是, 对于非一致双曲系统, 即测度 μ 不具有零 Lyapunov 指数的系统, Katok [48] 刻画了马蹄上的拓扑熵能逼近测度 μ 的测度熵. Avila 等 [1] 得到了一个更为精细的逼近结果, 我们陈述如下.

定理 1.3 设 $f: M \rightarrow M$ 是一个 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, μ 是一个双曲遍历测度且 $h_\mu(f) > 0$, 则对每个 $\epsilon > 0$ 及 μ 在 f - 不变测度空间中的每个弱 $*$ 邻域 $\mathcal{V}$, 存在一个紧 f - 不变集 $\Lambda_\epsilon \subset M$ 使得下述结论成立:

- (a) $H(\Lambda_\epsilon, \text{supp}\mu) < \epsilon$, 其中 $\text{supp}\mu$ 表示测度 μ 的支撑集, $H(\cdot, \cdot)$ 表示集合之间的 Hausdorff 距离;
- (b) $|h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_\epsilon}) - h_\mu(f)| < \epsilon$;
- (c) 每个支撑在 Λ_ϵ 上的 f - 不变测度都包含在 $\mathcal{V}$ 中;
- (d) 存在 Λ_ϵ 上的一个连续不变分解 $TM = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_\ell$ ($\ell \leq m_0$), 使得对每个 $x \in \Lambda_\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$, 每个 $1 \leq j \leq \ell$ 及 $u \in E_j(x)$, 存在 $C > 0$ 使得

$$C^{-1} \exp[n(\chi_j(\mu) - \epsilon)] \|u\| \leq \|Df^n(u)\| \leq C \exp[n(\chi_j(\mu) + \epsilon)] \|u\|,$$

其中 $h_\mu(f)$ 和 $h_{\text{top}}(f)$ 分别表示 f 的测度熵和拓扑熵, $\chi_1(\mu) < \chi_2(\mu) < \cdots < \chi_\ell(\mu)$ 是 f 关于测度 μ 的不同的 Lyapunov 指数, 详细定义可参见文献 [75].

对于上述定理的不可逆情形, 可参见文献 [18]. 在上述定理的第二个结论中, 原始定理并没有表明 $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_\epsilon}) \leq h_\mu(f) + \epsilon$. 但只需要稍微修改一下原始证明, 就可以得到马蹄上拓扑熵的上界.

一个自然的问题是, 上述定理中的马蹄所描述的动力学部分有多大? 从动力系统的维数理论来看, 可考虑用维数来估计, 这当然是一个不平凡的问题. 如果 μ 是一个曲面微分同胚的遍历双曲 SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) 测度, Mendoza [59] 证明了马蹄限制在不稳定流形上的 Hausdorff 维数趋近于 1; 对于高维情形, Sánchez-Salas [72] 证明了 μ 可以被支撑在马蹄上的遍历测度逼近, 同时证明了一些关于马蹄维数的结果. 利用文献 [18] 中双曲逼近的思想和方法, Wang 等 [79] 将 Mendoza [59] 的结果推广到高维情形, 即证明了马蹄限制在不稳定流形上的 Hausdorff 维数趋近于不稳定流形的维数. 特别地, 当稳定方向是一维时, 他们证明了马蹄的 Hausdorff 维数趋近于测度 μ 的 Hausdorff 维数. 更进一步的结果, 可参见文献 [77].

本文余下内容的结构如下. 第 2 节介绍一些概念和预备知识, 包括各种维数定义、拓扑压和测度压的定义. 第 3 节介绍非共形光滑动力系统的维数理论的 Bowen 方程的研究进展, 包括拓扑和测度两种情形. 第 4 节介绍光滑动力系统的非共形情形时的维数的变分原理, 包括具有满维数或全维数测度的存在性. 第 5 节介绍光滑动力系统的维数逼近方面的研究成果.

2 预备知识和相关概念

本节考虑一个紧致度量空间 (X, d) 上的连续变换 $f: X \rightarrow X$. 令 $\mathcal{M}_f$ 和 $\mathcal{E}_f$ 分别表示空间 X 上的所有 f -不变 Borel 概率测度组成的空间和所有 f -不变的遍历 Borel 概率测度组成的集合. 令 $C(X)$ 表示空间 X 上所有的连续函数组成的 Banach 空间, 赋予最大范数 $\|\cdot\|_\infty$.

2.1 各种维数的定义

本小节简单回顾维数的各种定义, 更多的详细介绍参见文献 [5, 30, 64, 66].

给定 X 的一个子集合 Z , 对实数 $s \geq 0$, 称

$$\mathcal{H}^s(Z) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i |U_i|^s : Z \subset \bigcup_i U_i, |U_i| \leq \delta \right\}$$

为集合 Z 的 s -维 Hausdorff 测度, 其中 $|\cdot|$ 表示集合的直径. 进而定义集合 Z 的 Hausdorff 维数如下:

$$\dim_H Z := \inf\{s : \mathcal{H}^s(Z) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(Z) = \infty\}.$$

分别称

$$\underline{\dim}_B Z := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \delta)}{-\log \delta} \quad \text{和} \quad \overline{\dim}_B Z := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \delta)}{-\log \delta}$$

为集合 Z 的下盒维数和上盒维数, 其中 $N(Z, \delta)$ 表示覆盖集合 Z 所需半径为 δ 的球的最小个数. 当下盒维数和上盒维数相等时, 即 $\underline{\dim}_B Z = \overline{\dim}_B Z$, 记这个量为 $\dim_B Z$, 称其为集合 Z 的盒维数. 易证上述集合维数满足如下关系:

$$\dim_H Z \leq \underline{\dim}_B Z \leq \overline{\dim}_B Z.$$

给定 X 上的一个 Borel 概率测度 μ , 分别称

$$\begin{aligned} \dim_H \mu &:= \inf\{\dim_H Y : Y \subseteq X, \mu(Y) = 1\}, \\ \underline{\dim}_B \mu &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{\underline{\dim}_B Y : Y \subseteq X, \mu(Y) \geq 1 - \delta\}, \\ \overline{\dim}_B \mu &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{\overline{\dim}_B Y : Y \subseteq X, \mu(Y) \geq 1 - \delta\} \end{aligned}$$

为测度 μ 的 Hausdorff 维数、下盒维数和上盒维数. 结合集合的维数定义可立得

$$\dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu.$$

给定 $x \in X$, 分别称

$$\underline{d}_\mu(x) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \quad \text{和} \quad \overline{d}_\mu(x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$$

为测度 μ 在点 x 处的下、上点维数. 当这两个量相等时, 记这个值为 $d_\mu(x)$, 称其为测度 μ 在点 x 处的点维数. 如果存在实数 d 使得

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = d, \quad \mu\text{-a.e. } x,$$

则 $\dim_H \mu = \underline{\dim}_B \mu = \overline{\dim}_B \mu = d$, 详细证明参见文献 [83].

不变测度的点维数是动力系统的维数理论中一个重要的研究课题. 当流形是二维曲面时, 对于曲面上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚的双曲遍历测度, Young [83] 证明了该测度的点维数可以由该测度的熵和 Lyapunov 指数给出. 对于高维情形的 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚的双曲遍历测度 μ , Ledrappier 和 Young [51] 证明了该测度在稳定方向和不稳定方向的点维数的存在性, 且稳定方向的点维数与不稳定方向的点维数之和是测度 μ 的点维数的上界; 进一步地, Barreira 等 [9] 证明了这个上界就是该双曲遍历测度的点维数.

2.2 拓扑压和测度压

热力学机制理论与维数理论的联系非常紧密, 特别是拓扑压在计算或估计不变集的维数时非常有效. 反之, 动力系统的维数理论的发展也进一步推动了热力学机制理论的研究.

给定空间 X 上的一列连续函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset C(X)$.

(1) 如果对任意 $m, n \in \mathbb{N}$ 有 $\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$, 则称 Φ 是次可加的. 如果 $-\Phi = \{-\varphi_n\}$ 是次可加的, 则称 Φ 是超可加的.

(2) 如果存在常数 $C > 0$ 使得

$$\varphi_m + \varphi_n \circ f^m - C \leq \varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m + C, \quad \forall m, n \geq 1,$$

则称 Φ 是几乎可加的.

(3) 如果对任意 $\xi > 0$, 存在一个连续函数 $\varphi_\xi \in C(X)$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n \varphi_\xi\|_\infty < \xi,$$

其中 $S_n \varphi_\xi := \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_\xi \circ f^j$ 表示 φ_ξ 的 Birkhoff 和, 则称 Φ 是渐近可加的.

(4) 如果对任意 $\xi > 0$, 存在一列次可加连续函数列 $\Phi_\xi = \{\varphi_n^\xi\}_{n \geq 1}$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - \varphi_n^\xi\|_\infty < \xi,$$

则称 Φ 是渐近次可加的.

任一几乎可加连续函数列都是渐近可加的, 详细证明可参见文献 [33, 87]. 特别地, 如果 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ 是渐近可加的, 则存在一个连续函数 $g \in C(X)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\varphi_n - S_n g\| = 0,$$

证明参见文献 [25]. 上述观察表明渐近可加势函数与连续函数在某种意义上是等价的, 因为两者具有相同的拓扑压、平衡态、弱 Gibbs 测度、Lyapunov 指数的水平集 (和不规则集) 及大偏差性质.

给定点 $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$, 令 $d_n(x, y) := \max\{d(f^i x, f^i y) : 0 \leq i < n\}$, $B_n(x, \epsilon) = \{y \in X : d_n(x, y) < \epsilon\}$ 表示球心在点 x 处、半径为 ϵ 的 Bowen 球. 任取 X 的一个子集 $Z \subseteq X$, 其中集合 Z 既可以不紧也可以不是 f -不变的. 给定 $\epsilon > 0$, 如果 $Z \subseteq \bigcup_i B_{n_i}(x_i, \epsilon)$, 则称 $\Gamma = \{B_{n_i}(x_i, \epsilon)\}_i$ 是 Z 的一个覆盖. 给定空间 X 上的一列次可加势函数 $\Psi = \{\psi_n\}_{n \geq 1} \subset C(X)$, $s \in \mathbb{R}$, 令

$$m(Z, \Psi, s, \epsilon) := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\Gamma} \sum_i \exp \left(-s n_i + \sup_{y \in B_{n_i}(x_i, \epsilon)} \psi_{n_i}(y) \right), \quad (2.1)$$

其中下确界在所有满足 $n_i \geq N, \forall i$ 的集合 Z 的覆盖 Γ 上取. 进而取函数 $m(Z, \Psi, s, \epsilon)$ 关于 s 的跳跃点如下:

$$P_Z(f, \Psi, \epsilon) := \inf\{s : m(Z, \Psi, s, \epsilon) = 0\} = \sup\{s : m(Z, \Psi, s, \epsilon) = \infty\}. \quad (2.2)$$

称

$$P_Z(f, \Psi) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} P_Z(f, \Psi, \epsilon) \quad (2.3)$$

是 f 在集合 Z 上关于次可加势函数 Ψ 的拓扑压. 上述定义的合理性, 参见文献 [64] 中的 Carathéodory 维数特征理论. 特别地, 当 $Z = X$ 时, Cao 等 [16] 证明了下述关于次可加拓扑压的变分原理.

定理 2.1 假设 $f : X \rightarrow X$ 是紧度量空间 X 上的一个连续变换, $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ 是空间 X 上的一列次可加势函数, 则有

$$P_X(f, \Phi) = \sup\{h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) : \mu \in \mathcal{M}_f, \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty\},$$

其中 $\mathcal{F}_*(\mu, \Phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \varphi_n d\mu$. 为避免出现 $+\infty + (-\infty)$ 的情形, 这里要求 $\mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty$.

上述次可加拓扑压也可以用分离集、生成集或者开覆盖来等价地定义, 具体可以参见文献 [16]. 如果 Φ 是 X 上的超可加势函数, 尚不清楚用分离集、生成集、开覆盖或 Carathéodory 维数特征理论定义的拓扑压的变分原理是否仍然成立. 因此, 当 Φ 是 X 上的超可加势函数时, 称

$$P_{\text{var}}(f, \Phi) := \sup\{h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi) : \mu \in \mathcal{M}_f\}$$

是 f 关于超可加势函数 Φ 的拓扑压.

注 2.1 (1) 如果存在 μ 使得 $P_X(f, \Phi) = h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi)$, 则称测度 μ 是拓扑压 $P_X(f, \Phi)$ 的一个平衡态.

(2) 如果存在 $\varphi \in C(X)$ 使得 $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$, 则此时 $P_X(f, \Phi)$ 就是经典的单个连续函数的拓扑压, 简记为 $P_X(f, \varphi)$, 详细介绍参见文献 [75].

(3) 关于单个连续函数的局部拓扑压 (这里的局部是指, 在定义拓扑压时固定一个开覆盖), 参见文献 [46]. 关于次可加势函数的局部拓扑压, 可参见文献 [20, 84].

(4) 对于几乎可加势函数的拓扑压, 其变分原理由 Barreira [4] 和 Mummert [61] 各自独立证明. 关于几乎可加拓扑压的变分原理、平衡态测度和 Gibbs 测度的存在性, 以及相关的几乎可加势函数的重分形分析, 可参见文献 [6]. 当 Φ 是渐近 (次) 可加时, Feng 和 Huang [33] 证明了相应拓扑压的变分原理.

(5) 当 $\Phi = 0$, 即 $\varphi_n \equiv 0, \forall n$ 时, $P_Z(f, 0)$ 为集合 Z 上的拓扑熵, 此时用 $h_Z(f)$ 来表示 $P_Z(f, 0)$.

下面给出下、上拓扑压的定义. 给定 X 上的次可加势函数 $\Psi = \{\psi_n\}_{n \geq 1}$, 令

$$\Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon) := \inf_{\Gamma} \sum_i \exp \left(\sup_{y \in B_N(x_i, \epsilon)} \psi_N(y) \right),$$

其中下确界在所有满足 $n_i = N, \forall i$ 的 Z 的覆盖 Γ 上取. 进而令

$$\underline{CP}_Z(f, \Psi, \epsilon) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon), \quad \overline{CP}_Z(f, \Psi, \epsilon) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Lambda(Z, \Psi, N, \epsilon).$$

分别称

$$\underline{CP}_Z(f, \Psi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{CP}_Z(f, \Psi, \epsilon) \quad \text{和} \quad \overline{CP}_Z(f, \Psi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{CP}_Z(f, \Psi, \epsilon)$$

为 f 在集合 Z 上关于次可加势函数 Ψ 的下、上拓扑压. 当 $\Psi = 0$ 时, 分别用 $\underline{Ch}_Z(f)$ 和 $\overline{Ch}_Z(f)$ 表示 $\underline{CP}_Z(f, 0)$ 和 $\overline{CP}_Z(f, 0)$, 并分别称其为集合 Z 上的下、上拓扑熵. 对任意一个子集 Z , 容易证明

$$P_Z(f, \Psi) \leq \underline{CP}_Z(f, \Psi) \leq \overline{CP}_Z(f, \Psi).$$

给定一个不变测度 $\mu \in \mathcal{M}_f$ 和一个次可加势函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$, 称

$$P_\mu(f, \Phi) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \{P_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) = 1\} \quad (2.4)$$

是 f 关于测度 μ 和次可加势函数 Φ 的测度压. 类似地, 分别称

$$\begin{aligned} \underline{CP}_\mu(f, \Phi) &:= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \{\underline{CP}_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) \geq 1 - \delta\}, \\ \overline{CP}_\mu(f, \Phi) &:= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \{\overline{CP}_Z(f, \Phi, \epsilon) : \mu(Z) \geq 1 - \delta\} \end{aligned}$$

为 f 关于测度 μ 和次可加势函数 Φ 的下、上测度压.

下面仿照 Katok 的熵公式 [48], 给出次可加测度压的另外一种定义. 给定空间 X 上的一个次可加势函数 $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$, 不变测度 $\mu \in \mathcal{M}_f$, $0 < \delta < 1$, $n \geq 1$ 和 $\epsilon > 0$, 令

$$\begin{aligned} P_\mu^*(f, \Phi, n, \epsilon, \delta) &= \inf \left\{ \sum_{x \in F} \exp \left[\sup_{y \in B_n(x, \epsilon)} \varphi_n(y) \right] \mid \mu \left(\bigcup_{x \in F} B_n(x, \epsilon) \right) \geq 1 - \delta \right\}, \\ P_\mu^*(f, \Phi, \epsilon, \delta) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_\mu^*(f, \Phi, n, \epsilon, \delta), \\ P_\mu^*(f, \Phi, \delta) &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} P_\mu^*(f, \Phi, \epsilon, \delta), \\ P_\mu^*(f, \Phi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} P_\mu^*(f, \Phi, \delta). \end{aligned}$$

如果测度是遍历的, 则上述两种测度压的定义是等价的, 详细证明参见文献 [17].

定理 2.2 设 $f : X \rightarrow X$ 是紧度量空间 X 上的一个连续变换, $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ 是 X 上的一个次可加势函数, 则对任一满足 $\mathcal{F}_*(\mu, \Phi) \neq -\infty$ 的遍历测度 $\mu \in \mathcal{E}_f$, 有

$$P_\mu^*(f, \Phi) = \underline{CP}_\mu(f, \Phi) = \overline{CP}_\mu(f, \Phi) = P_\mu(f, \Phi) = h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi).$$

注 2.2 (1) 上述定理对渐近次可加或渐近可加势函数也成立.

(2) 在定理 2.2 中, 事实上, 对任意 $\delta \in (0, 1)$ 有 $P_\mu^*(f, \Phi, \delta) = h_\mu(f) + \mathcal{F}_*(\mu, \Phi)$. 对于单个的连续函数 φ , 考虑 $\Phi = \{S_n \varphi\}_{n \geq 1}$, 将 $P_\mu^*(f, \Phi)$ 简记为 $P_\mu^*(f, \varphi)$, He 等 [40] 证明了 $P_\mu^*(f, \varphi) = h_\mu(f) + \int \varphi d\mu$.

(3) 给定 $\varphi \in C(X)$, 如果测度 μ 仅是 f -不变的, Fang 等 [32] 证明了

$$P_\mu(f, \varphi) = \text{ess sup} \{P_\nu(f, \varphi) : \nu \in \mathcal{E}(X, f)\} = \text{ess sup} \left\{ h_\nu(f) + \int_X \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{E}(X, f) \right\},$$

其中 τ 是测度 μ 的遍历分解, 本性上确界是关于 τ 取的. 更多关于测度压的介绍, 可参见文献 [32].

2.3 奇异值势函数和 Carathéodory 奇异维数

设 $f : M \rightarrow M$ 是一个 m_0 -维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的可微映射, $J \subset M$ 是 f 的一个排斥子. 给定 $x \in J$ 和 $n \geq 1$, 算子 $Df^n(x) : T_x M \rightarrow T_{f^n x} M$ 的奇异值按降序排列如下:

$$\alpha_1(x, f^n) \geq \alpha_2(x, f^n) \geq \cdots \geq \alpha_{m_0}(x, f^n).$$

对 $s \in [0, m_0]$, 令

$$\psi^s(x, f^n) := \sum_{i=1}^{[s]} \log \alpha_i(x, f^n) + (s - [s]) \log \alpha_{[s]+1}(x, f^n).$$

对 $t \in [0, m_0]$, 令

$$\varphi^t(x, f^n) := \sum_{i=m_0-[t]+1}^{m_0} \log \alpha_i(x, f^n) + (t - [t]) \log \alpha_{m_0-[t]}(x, f^n).$$

对任意 $n, \ell \in \mathbb{N}$, 可以证明:

$$\psi^s(x, f^{n+\ell}) \leq \psi^s(x, f^n) + \psi^s(f^n(x), f^\ell), \quad \varphi^t(x, f^{n+\ell}) \geq \varphi^t(x, f^n) + \varphi^t(f^n(x), f^\ell).$$

由于 f 是光滑映射, 所以两个函数列

$$\Psi_f(s) := \{-\psi^s(\cdot, f^n)\}_{n \geq 1} \quad \text{和} \quad \Phi_f(t) := \{-\varphi^t(\cdot, f^n)\}_{n \geq 1} \quad (2.5)$$

分别是超可加和次可加的. 称 $\Psi_f(s)$ ($\Phi_f(t)$) 是超可加 (次可加) 奇异值势函数.

下面简单回顾 Cao 等 [18] 引入的 Carathéodory 奇异维数, 更详细的介绍可参见文献 [18]. 给定一个子集合 $Z \subseteq \Lambda$ 和一个实数 $r > 0$, 令

$$m(Z, t, r) := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf \left\{ \sum_i \exp \left(\sup_{y \in B_{n_i}(x_i, r)} -\varphi^t(y, f^{n_i}) \right) \right\},$$

其中下确界在所有满足 $n_i \geq N, \forall i$ 的集合 Z 的覆盖 Γ 上取. 由 Carathéodory 维数特征理论可知, 对于固定的集合 Z 和实数 r , 函数 $m(Z, t, r)$ 关于 t 存在一个跳跃点

$$\dim_{C,r} Z := \inf\{t : m(Z, t, r) = 0\} = \sup\{t : m(Z, t, r) = +\infty\}. \quad (2.6)$$

称

$$\dim_C Z := \liminf_{r \rightarrow 0} \dim_{C,r} Z$$

为集合 Z 的 Carathéodory 奇异维数. 值得指出的是, 整个排斥子 J 的 Carathéodory 奇异维数不依赖于充分小的数 $r > 0$, 且等于次可加奇异值势函数拓扑压的零点, 详细证明可参见文献 [18, 定理 4.1].

对于每个支撑在排斥子 J 上的 f -不变测度 μ , 令

$$\dim_{C,r} \mu := \inf\{\dim_{C,r} Z : \mu(Z) = 1\}.$$

称 $\dim_C \mu := \liminf_{r \rightarrow 0} \dim_{C,r} \mu$ 是测度 μ 的 Carathéodory 奇异维数.

值得指出的是, 排斥子上的遍历测度的 Carathéodory 奇异维数与其 Lyapunov 维数相等. 对于 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 称

$$\dim_L \mu := \begin{cases} \ell + \frac{h_\mu(f) - \lambda_{m_0}(\mu) - \cdots - \lambda_{m_0-\ell+1}(\mu)}{\lambda_{m_0-\ell}(\mu)}, & h_\mu(f) \geq \lambda_{m_0}(\mu), \\ \frac{h_\mu(f)}{\lambda_{m_0}(\mu)}, & 0 \leq h_\mu(f) < \lambda_{m_0}(\mu) \end{cases} \quad (2.7)$$

为测度 μ 的 Lyapunov 维数, 其中 $\ell = \max\{i : \lambda_{m_0}(\mu) + \cdots + \lambda_{m_0-i+1}(\mu) \leq h_\mu(f)\}$. 事实上, 在定理 3.4 的条件下, 对每个 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$ 有 $\dim_L \mu = \dim_C \mu$, 详细证明参见文献 [19].

2.4 平均共形排斥子与平均共形双曲集

本节回顾一类特殊的非共形系统, 一种是扩张情形的平均共形排斥子, 由 Ban 等 [2] 引入; 一种是双曲情形的平均共形双曲集, 由 Wang 等 [80] 引入. 需要指出的是, 这类系统确实是非共形的, 具体例子可参见文献 [86]; 这类特殊的非共形系统的维数理论也得到了比较完整的解决, 例如, 平均共形排斥子和平均共形双曲集维数的 Bowen 方程可分别参见文献 [2] 和 [80], 平均共形排斥子和平均共形双曲集维数的变分原理可分别参见文献 [15] 和 [23].

定义 2.1 设 J 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的光滑映射 f 的一个排斥子, 如果对任一支撑在 J 上的 f - 不变的遍历测度 μ , 都有 $\lambda_1(\mu) = \lambda_2(\mu) = \cdots = \lambda_{m_0}(\mu) > 0$, 则称 J 是 f 的平均共形排斥子, 其中 $\lambda_i(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, m_0$ 是 f 关于测度 μ 的 Lyapunov 指数.

下面回顾文献 [80] 中的平均共形双曲集. 设 $f: M \rightarrow M$ 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的 C^1 微分同胚. 称一个紧 f - 不变集 $J \subset M$ 是局部极大双曲集, 如果

- (1) 存在 J 的一个开邻域 U 使得 $J = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n U$;
- (2) 在 J 上存在一个连续的不变分解 $TM = E^s \oplus E^u$, 且存在常数 $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ 使得对每个 $x \in J$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|D_x f^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \forall v \in E_x^u \quad \text{和} \quad \|D_x f^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad \forall v \in E_x^s.$$

定义 2.2 称一个双曲集 $J \subset M$ 是平均共形的, 如果对任一支撑在 J 上的 f - 不变的遍历测度 μ 都有 $\lambda_1(\mu) = \lambda_2(\mu) = \cdots = \lambda_{d_u}(\mu) > 0$ 和 $\lambda_{d_u+1}(\mu) = \lambda_{d_u+2}(\mu) = \cdots = \lambda_{m_0}(\mu) < 0$, 其中 $d_u = \dim E^u$, $d_s = \dim E^s = m_0 - d_u$.

可见, 如果 J 是微分同胚 f 的平均共形双曲集, 则对任一支撑在 J 上的 f - 不变的遍历测度 μ , (f, μ) 仅有两个 Lyapunov 指数 (不计重数), 可简记为 $\lambda_u(\mu) > 0$ 和 $\lambda_s(\mu) < 0$.

3 Bowen 方程

本节考虑一个 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的可微映射 $f: M \rightarrow M$, $J \subset M$ 是 f 的一个排斥子. 用 $\mathcal{M}(f|_J)$ 和 $\mathcal{E}(f|_J)$ 分别表示支撑在 J 上的 f - 不变测度所组成的集合和遍历测度所组成的集合.

给定 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 由次可加遍历定理知, 下述两个极限对 μ - 几乎处处的点 $x \in J$ 存在:

$$\lambda_1(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\|, \quad \lambda_s(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log m(Df^n(x)),$$

其中 $\|Df(x)\|$ 和 $m(Df(x))$ 分别表示算子 $Df(x)$ 的大模和小模.

注意到 $\{\log \sup_{x \in J} \|Df^n(x)\|\}_{n \geq 1}$ 和 $\{-\log \inf_{x \in J} m(Df^n(x))\}_{n \geq 1}$ 是次可加的, 所以下述两个极限存在:

$$\sigma_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in J} \|Df^n(x)\| \quad \text{和} \quad \sigma_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \inf_{x \in J} m(Df^n(x)).$$

因为 f 在 J 上是扩张的, 所以 $\sigma_- > 0$. 为简单起见, 用 $h_{\text{top}} = h_{\text{top}}(f|_J)$ 表示 f 的拓扑熵, 用 $P_{\text{top}} = P_J(f, -\log |Df(x)|)$ 表示 f 关于势函数 $-\log |Df(x)|$ 的拓扑压, 其中 $|Df(x)|$ 表示算子 $Df(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ 的 Jacobi 行列式. Wang 等 [76] 对于排斥子的任一子集和支撑在排斥子上的遍历测度的维数给出了下述估计.

定理 3.1 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的一个排斥子. 对任一子集 $Z \subset J$ 和任意 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$, 下述结论成立:

- (1) $s^* \leq \dim_H Z \leq \underline{\dim}_B Z \leq \overline{\dim}_B Z \leq t^*$, 其中 s^* 和 t^* 分别是方程 $P_Z(f, -s \log \|Df(x)\|) = 0$ 和 $\overline{CP}_Z(f, -t \log m(Df(x))) = 0$ 的唯一根;
- (2) $s_* \leq \dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu \leq t_*$, 这里 s_* 和 t_* 分别是方程 $P_\mu(f, -s\Psi) = 0$ 和 $P_\mu(f, -t\Phi) = 0$ 的唯一根, 其中 $\Psi = \{\log \|Df^n(x)\|\}$, $\Phi = \{\log m(Df^n(x))\}$;
- (3) $\frac{h_{\text{top}}}{\sigma_+} \leq \dim_H J \leq \underline{\dim}_B J \leq \overline{\dim}_B J \leq \frac{h_{\text{top}}}{\sigma_-}$;
- (4) $m_0 + \frac{P_{\text{top}}}{\sigma_-} \leq \dim_H J \leq \underline{\dim}_B J \leq \overline{\dim}_B J \leq m_0 + \frac{P_{\text{top}}}{\sigma_+}$;
- (4) $m_0 - \frac{\lambda(\mu) - h_\mu(f)}{\lambda_s(\mu)} \leq \dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu \leq m_0 - \frac{\lambda(\mu) - h_\mu(f)}{\lambda_1(\mu)}$, 其中 $\lambda(\mu)$ 表示所有 f 关于测度 μ 的 Lyapunov 指数之和.

当 Z 是整个排斥子 J 时, Barreira^[3] 利用排斥子的 Markov 分解和非可加拓扑压证明了第一个结论, Wang 等^[76] 借鉴了 Rugh^[71] 所用的方法. 在映射是 C^2 的情形下, Hu^[44] 利用 Pesin 理论证明了上述定理的结论 (2)–(4). Huang 和 Zhang^[47] 利用计算点维数的方法在更一般情形下得出了测度维数的估计.

对任一 $t \in [0, m_0]$, 考虑次可加奇异值势函数 $\Phi_f(t)$ (见 (2.5)), 令 $P(t) := P_J(f, \Phi_f(t))$. 容易验证 $P(t)$ 是关于 t 严格递减的连续函数.

定理 3.2 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的排斥子, 则有

$$\dim_H J \leq \underline{\dim}_B J \leq \overline{\dim}_B J \leq t^*,$$

其中 t^* 是方程 $P(t) = 0$ 在区间 $[0, m_0]$ 中唯一的根.

对任意 $n \in \mathbb{N}$, Zhang^[85] 证明了 f^n 关于其奇异值势函数拓扑压的零点 t_n 是排斥子 J 的 Hausdorff 维数上界, 从而得到

$$\dim_H J \leq \inf_{n \geq 1} t_n.$$

Ban 等^[2] 进一步证明了上述下确界就是次可加拓扑压的 Bowen 方程 $P(t) = 0$ 的唯一根, Wang 等^[76] 进一步证明了排斥子的任一子集的维数的上界可由子集上拓扑压的零点给出. 最近, Feng 和 Simon^[34] 证明了该 Bowen 方程的根也是排斥子的上盒维数的上界. 类似地, 对于双曲集的情形, 可以参见文献 [67, 68, 79, 85].

如果 J 是 $C^{1+\alpha}$ 映射的排斥子, 利用 Pesin 理论, 可以得到一个类似于定理 1.3 的逼近定理.

命题 3.1 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 映射, J 是 f 的排斥子, μ 是 J 上的一个遍历测度且 $h_\mu(f) > 0$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个 f - 不变的紧子集 $\mathcal{Q}_\epsilon \subset J$ 使得下述结论成立:

- (1) $h_\mu(f) - \epsilon \leq h_{\text{top}}(f|_{\mathcal{Q}_\epsilon}) \leq h_\mu(f) + \epsilon$;
- (2) 存在常数 $C > 0$ 和 $\mathcal{Q}_\epsilon$ 上的一个连续不变分解 $T_x M = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \cdots \oplus E_\ell(x)$, 对任意 $u \in E_j(x)$ 有

$$C^{-1} \exp(n(\lambda_j(\mu) - \epsilon)) \leq \|D_x f^n(u)\| \leq C \exp(n(\lambda_j(\mu) + \epsilon)),$$

其中 $\lambda_1(\mu) < \cdots < \lambda_\ell(\mu)$, $\ell \leq m_0$ 是 f 关于测度 μ 的不同的 Lyapunov 指数.

命题 3.1(1) 中的 $h_{\text{top}}(f|_{\mathcal{Q}_\epsilon}) \leq h_\mu(f) + \epsilon$ 并没有包含在文献 [18] 中, 但通过修改文献 [18, 定理 5.1] 的证明可以得到 $h_{\text{top}}(f|_{\mathcal{Q}_\epsilon})$ 的上界估计. 利用命题 3.1, Cao 等^[18] 进一步证明了次可加奇异值势函数

的拓扑压关于映射的连续性, 并且可以利用超可加奇异值势函数的拓扑压的 Bowen 方程得到排斥子的 Hausdorff 维数一个更精确的下界估计.

定理 3.3 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 映射, J 是 f 的排斥子, 则下述结论成立:

(1) 对每个 $0 \leq t \leq m_0$, 映射 $f \mapsto P(f|_{\Lambda_f}, \Phi_f(t))$ 是连续的, 即对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得如果 $C^{1+\gamma}$ 映射 $h: M \rightarrow M$ 满足 $\|f - h\|_{C^1} < \delta$, 则有

$$P(f|_J, \Phi_f(t)) - \epsilon \leq P(h|_{J_h}, \Phi_h(t)) \leq P(f|_J, \Phi_f(t)) + \epsilon,$$

其中 J_h 是映射 h 的排斥子;

(2) $\dim_H J \geq s^*$, 其中 s^* 是方程 $P_{\text{var}}(f|_J, \Psi_f(s)) = 0$ 的唯一根, 这里 $\Phi_f(t)$ 和 $\Psi_f(s)$ 是 (2.5) 定义的次可加和超可加奇异值势函数.

由上可见, 对于非共形排斥子的上盒维数和 Hausdorff 维数, 可以分别用次可加和超可加奇异值势函数的拓扑压的 Bowen 方程的根给出其一个精确的上、下界估计. Cao 等 [19] 证明了 C^1 映射的排斥子的 Carathéodory 奇异维数以及支撑在排斥子上的遍历测度的 Carathéodory 奇异维数分别可以用拓扑压和测度压的 Bowen 方程的根给出.

定理 3.4 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的排斥子, 则下述结论成立:

(1) 对每个子集 $Z \subset J$, 有

$$\dim_C Z = t_Z,$$

其中 t_Z 是方程 $P_Z(f, \Phi_f(t)) = 0$ 的唯一根;

(2) 对每个支撑在 J 上的 f - 不变的遍历测度 μ , 有

$$\dim_C \mu = s_\mu,$$

其中 s_μ 是方程 $P_\mu(f, \Phi_f(t)) = 0$ 的唯一根.

本节的最后给出平均共形双曲集的维数计算公式. 为此, 先介绍一些记号. 设 J 是微分同胚 $f: M \rightarrow M$ 的一个双曲集, 给定 $x \in J$ 和一个小数 $\beta > 0$, 点 x 处的局部稳定流形和局部不稳定流形定义如下:

$$\begin{aligned} W_\beta^s(f, x) &= \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \beta, \forall n \geq 0\}, \\ W_\beta^u(f, x) &= \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \beta, \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

称

$$W^u(f, x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\beta^u(f, f^{-n}(x))), \quad W^s(f, x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\beta^s(f, f^n(x)))$$

分别为点 x 处的全局稳定流形和全局不稳定流形. 对于平均共形双曲集的维数, Wang 等 [80] 给出了如下的维数计算公式.

定理 3.5 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 微分同胚, J 是 f 的一个局部极大的平均共形双曲集, 且 f 在 J 上拓扑传递, 则对每个 $x \in J$, 有

$$\text{Dim} J = \text{Dim}(W_\beta^u(f, x) \cap J) + \text{Dim}(W_\beta^s(f, x) \cap J)$$

且 $\dim_H J = \underline{\dim}_B J = \overline{\dim}_B J$. 进一步地, 映射 $g \mapsto \dim J_g$ 是连续的, 即对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|f - g|_{C^1} < \delta$, 就有 $|\dim J_g - \dim J| < \epsilon$, 其中 $\dim$ 表示 $\dim_H$ 或 $\underline{\dim}_B$ 或 $\overline{\dim}_B$, J_g 是 g 的局部极大双曲集.

事实上, Wang 等 [80] 证明了

$$\dim_H \Lambda = \underline{\dim}_B \Lambda = \overline{\dim}_B \Lambda = t_s + t_u,$$

其中 t_u 和 t_s 分别是方程 $P_J(f, -t\Phi) = 0$ 和 $P_J(f, t\Psi) = 0$ 的唯一根, 这里 $\Phi = \{\log m(D_x f^n|_{E^u(x)})\}_{n \geq 1}$, $\Psi = \{\log \|D_x f^n|_{E^s(x)}\|\}_{n \geq 1}$.

4 具有全维数和满维数的测度

考虑一个 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的光滑映射 f , 以及一个 f - 不变集合 Λ . 如果存在一个支撑在 Λ 上的测度 μ 使得其维数等于集合 Λ 的维数, 则称 μ 具有全维数的测度. 如果测度 μ 满足

$$\dim \mu = \sup\{\dim Z : Z \subset \Lambda, \mu(Z) = 1\},$$

则称 μ 具有满维数的测度, $\dim$ 表示 $\dim_H$, $\dim_C$, $\underline{\dim}_B$ 或 $\overline{\dim}_B$.

对于一个 C^1 映射的排斥子 J , Chen 等 [23] 证明了存在一个 J 上的遍历测度具有全 Carathéodory 奇异维数.

定理 4.1 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 映射, J 是 f 的一个排斥子, 则存在 $\mu \in \mathcal{E}(f|_J)$ 使得

$$\dim_C \mu = \dim_C J = \sup\{\dim_C \nu : \nu \in \mathcal{M}(f|_J)\}.$$

在共形双曲情形, 即映射 $Df(x)|_{E^i(x)}$ ($i = s, u$) 是共形的, 也不一定都能找到一个不变测度具有全维数 (参见 Barreira 的专著 [5, 第 5 章]). 下面的定理表明, 只要降低对测度的要求, 对于 C^1 微分同胚的平均共形双曲集, 就存在一个 Borel 概率测度 (不一定不变) 具有全 Hausdorff 维数.

定理 4.2 [23] 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 微分同胚, J 是 f 的一个局部极大的平均共形双曲集, 且 f 在 J 上拓扑混合, 则在 J 上存在一个 Borel 概率测度 μ , 使得 μ 的支撑严格包含在 J 中且

$$\dim_H \mu = \dim_H J.$$

上述定理的证明思路如下. 取一个 J 的 Markov 分解 $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_s\}$, 使得其直径充分小. 令 (Σ_A, σ) 表示与分解 $\mathcal{R}$ 相应的 Markov 子移位, $h: \Sigma_A \rightarrow J$ 是解码映射 (详细情形可参见文献 [12]). 注意到系统 (Σ_A, σ) 和 (J, f) 的拓扑压满足

$$P_{\Sigma_A}(\sigma, t_u \phi_u \circ h) = P_J(f, t_u \phi_u) = 0, \quad P_{\Sigma_A}(\sigma, t_s \phi_s \circ h) = P_J(f, t_s \phi_s) = 0,$$

其中 $\phi_u(x) = -\log |\det D_x f|_{E_x^u}|^{\frac{1}{d_u}}$, $\phi_s(x) = \log |\det D_x f|_{E_x^s}|^{\frac{1}{d_s}}$, t_u 和 t_s 是相应拓扑压方程的根. 由热力学机理理论知, 对于拓扑压 $P_{\Sigma_A}(\sigma, t_u \phi_u \circ h)$ 和 $P_{\Sigma_A}(\sigma, t_s \phi_s \circ h)$, 分别存在相应的支撑在 Σ_A 上的弱 Gibbs 测度 m_+ 和 m_- , 详细情形可参见文献 [4]. 定义 Σ_A 上的 Borel 概率测度 m 如下:

$$m(-_k[a_{-k} \cdots a_0 \cdots a_\ell]_\ell) = \begin{cases} C_1 m_+(0[a_0 \cdots a_\ell]_\ell) m_-(-_k[a_{-k} \cdots a_0]_0), & a_0 = 1, \\ 0, & a_0 \neq 1, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{a} = (a_i) \in \Sigma_A$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $C_1 = m_+(0[1]_0)^{-1}m_-(0[1]_0)^{-1}$. 对于任一 Borel 子集 $A \subset J$, 令

$$\mu(A) = m(h^{-1}(A)),$$

可以证明 μ 即为所求的测度.

对于平均共形双曲集, 如果微分同胚 f 的光滑性增加到 $C^{1+\alpha}$, 借鉴 Barreira 和 Wolf [10] 在二维情形的方法 (共形双曲情形可参见 Barreira 的专著 [5]), 利用热力学机制理论, 可以进一步找到一个具有满维数的遍历测度, 详细证明可参见文献 [23].

定理 4.3 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, J 是 f 的一个局部极大的平均共形双曲集, 且 f 在 J 上拓扑混合, 则在 J 上存在一个 f - 不变的遍历测度 μ 使得

$$\dim_H \mu = \sup\{\dim_H \nu : \nu \in \mathcal{M}(f|_J)\}.$$

5 维数逼近

如第 1.3 小节所述, 动力系统的双曲逼近理论很好地刻画了双曲之外系统的动力学现象. 一个自然的问题是, 双曲逼近理论中的马蹄从多大程度上描述了系统的动力学, 用马蹄的稳定或不稳定 Cantor 集的 Hausdorff 维数来估计变成一个有趣的问题.

对于光滑映射的排斥子上一个具有正熵的遍历测度 μ , Cao 等 [19] 证明了存在一系列紧不变集, 使得该列集合的 Carathéodory 奇异维数趋于测度 μ 的 Lyapunov 维数 (参见定义 (2.7)).

定理 5.1 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 映射, J 是 f 的一个排斥子, μ 是 J 上的一个 f - 不变的遍历测度且 $h_\mu(f) > 0$, 则对每个 $\epsilon > 0$, 存在一个 f - 不变的紧子集 $J_\epsilon \subset J$ 使得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \dim_C J_\epsilon = \dim_L \mu.$$

对于一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚 f , 设 f 关于某个遍历测度 μ 只有一正一负两个 Lyapunov 指数, Cao 等 [19] 证明了下述定理.

定理 5.2 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, μ 是一个 f - 不变的遍历双曲测度且 $h_\mu(f) > 0$. 如果 (f, μ) 仅有两个 Lyapunov 指数 $\lambda_u(\mu) > 0 > \lambda_s(\mu)$, 则对每个 $\epsilon > 0$, 存在一个 f - 不变紧集 J_ϵ 使得

$$|\text{Dim} J_\epsilon - \text{Dim} \mu| < \epsilon,$$

其中 Dim 表示 $\dim_H$ 或 $\underline{\dim}_B$ 或 $\overline{\dim}_B$.

上述定理的证明思路如下. 首先注意到

$$\text{Dim} \mu = \frac{h_\mu(f)}{\lambda_u(\mu)} - \frac{h_\mu(f)}{\lambda_s(\mu)}.$$

对每个 $\epsilon > 0$, 由定理 1.3 知 μ 的动力学可由一系列 f - 不变紧集 J_ϵ 来逼近. 对于 $i = u, s$ 和每个 $x \in J_\epsilon$, 可以证明

$$\text{Dim}(J_\epsilon \cap W_\beta^i(f, x)) \approx \frac{h_\mu(f)}{|\lambda_i(\mu)|}.$$

Brown^[14] 证明了系统 (f, J_ϵ) 的稳定叶层和不稳定叶层间的 holonomy 映射是 Lipschitz 连续的. 因此, 对每个 $x \in J_\epsilon$, 可以进一步证明

$$\dim_H(J_\epsilon \cap W_\beta^u(f, x)) + \dim_H(J_\epsilon \cap W_\beta^s(f, x)) \leq \text{Dim} J_\epsilon \leq \overline{\dim}_B(J_\epsilon \cap W_\beta^u(f, x)) + \overline{\dim}_B(J_\epsilon \cap W_\beta^s(f, x)).$$

由此可得 $\text{Dim} J_\epsilon$ 趋近于 $\text{Dim} \mu$, 详细证明可参见文献 [19].

如果将定理 1.3 中的微分同胚 f 的光滑性降到 C^1 , 进一步假设系统 (f, μ) 的 Oseledec 分解 $E^u \oplus E^s$ 是控制分解, 则 Wang 等 [78] 也证明了相应的结论. 在这种情形下, 系统 (f, J_ϵ) 的稳定叶层和不稳定叶层间的 holonomy 映射一般不再是 Lipschitz 连续的. 此时, 借鉴 Palis 和 Viana^[62] 的方法, 可以证明如下结论. 对每个 $\gamma \in (0, 1)$, 存在常数 $D_\gamma > 0$ 使得系统 (f, J_ϵ) 的稳定叶层和不稳定叶层间的 holonomy 映射是 (D_γ, γ) -Hölder 连续的. 由 γ 的任意性, Cao 等 [19] 运用文献 [80] 中的方法证明了下述逼近定理.

定理 5.3 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 C^1 微分同胚, μ 是一个 f - 不变的遍历双曲测度且 $h_\mu(f) > 0$. 如果 (f, μ) 仅有两个 Lyapunov 指数 $\lambda_u(\mu) > 0 > \lambda_s(\mu)$ 且相应的 Oseledec 分解 $E^u \oplus E^s$ 是控制分解, 则对每个 $\epsilon > 0$, 存在一个 f - 不变紧集 J_ϵ 使得

$$|\text{Dim} J_\epsilon - \text{Dim} \mu| < \epsilon,$$

其中 Dim 表示 $\dim_H$ 或 $\underline{\dim}_B$ 或 $\overline{\dim}_B$.

如果进一步假设 μ 是 SRB 测度, Wang 等 [79] 证明了如下的维数逼近结果.

定理 5.4 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, μ 是一个 f - 不变的遍历双曲 SRB 测度, 则存在一系列双曲集 J_n 使得 $\dim_H(J_n \cap W_\beta^u(x, f))$ 关于 $x \in J_n$ 一致收敛到 $\dim W^u(x, f)$.

定理 5.5 设 f 是 m_0 - 维紧致光滑 Riemann 流形 M 上的一个 $C^{1+\alpha}$ 微分同胚, μ 是一个 f - 不变的遍历双曲 SRB 测度. 如果 μ 的稳定方向是一维的, 则存在一系列双曲集 J_n 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dim_H J_n = \dim_H \mu.$$

参考文献

- 1 Avila A, Crovisier S, Wilkinson A. C^1 density of stable ergodicity. *Adv Math*, 2021, 379: 107496
- 2 Ban J, Cao Y, Hu H. The dimensions of a non-conformal repeller and an average conformal repeller. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362: 727–751
- 3 Barreira L. A non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1996, 16: 871–927
- 4 Barreira L. Nonadditive thermodynamic formalism: Equilibrium and Gibbs measures. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2006, 16: 279–305
- 5 Barreira L. Dimension and Recurrence in Hyperbolic Dynamics. Progress in Mathematics, vol. 272. Basel: Birkhäuser, 2008
- 6 Barreira L. Almost additive thermodynamic formalism: Some recent developments. *Rev Math Phys*, 2010, 22: 1147–1179
- 7 Barreira L. Thermodynamic Formalism and Applications to Dimension Theory. Progress in Mathematics, vol. 294. Basel: Birkhäuser, 2011
- 8 Barreira L. Dimension Theory of Hyperbolic Flows. Springer Monographs in Mathematics. Cham: Springer, 2013
- 9 Barreira L, Pesin Y, Schmeling J. Dimension and product structure of hyperbolic measures. *Ann of Math (2)*, 1999, 149: 755–783
- 10 Barreira L, Wolf C. Measures of maximal dimension for hyperbolic diffeomorphisms. *Comm Math Phys*, 2003, 239: 93–113

- 11 Bedford T, Urbanski M. The box and Hausdorff dimension of self-affine sets. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 1990, 10: 627–644
- 12 Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Berlin: Springer-Verlag, 1975
- 13 Bowen R. Hausdorff dimension of quasi-circles. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1979, 50: 259–273
- 14 Brown A. Smoothness of stable holonomies inside center-stable manifolds. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2022, 42: 3593–3618
- 15 Cao Y. Dimension spectrum of asymptotically additive potentials for C^1 average conformal repellers. [Nonlinearity](#), 2013, 26: 2441–2468
- 16 Cao Y, Feng D J, Huang W. The thermodynamic formalism for sub-additive potentials. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2008, 20: 639–657
- 17 Cao Y, Hu H, Zhao Y. Nonadditive measure-theoretic pressure and applications to dimensions of an ergodic measure. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2013, 33: 831–850
- 18 Cao Y, Pesin Y, Zhao Y. Dimension estimates for non-conformal repellers and continuity of sub-additive topological pressure. [Geom Funct Anal](#), 2019, 29: 1325–1368
- 19 Cao Y, Wang J, Zhao Y. Dimension approximation in smooth dynamical systems. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2024, 44: 383–407
- 20 Chen B, Ding B, Cao Y. The local variational principle of topological pressure for sub-additive potentials. [Nonlinear Anal](#), 2010, 73: 3525–3536
- 21 Chen E, Xiong J. Dimension and measure theoretic entropy of a subshift in symbolic space. [Chin Sci Bull](#), 1997, 42: 1193–1196
- 22 Chen J, Pesin Y. Dimension of non-conformal repellers: A survey. [Nonlinearity](#), 2010, 23: R93–R114
- 23 Chen Y, Luo C, Zhao Y. Measures of maximal and full dimension for smooth maps. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2024, 44: 31–49
- 24 Chung Y. Shadowing properties of non-invertible maps with hyperbolic measures. *Tokyo J Math*, 1999, 22: 145–166
- 25 Cuneo N. Additive, almost additive and asymptotically additive potential sequences are equivalent. [Comm Math Phys](#), 2020, 377: 2579–2595
- 26 Dysman M. Fractal dimensions for repellers of maps with holes. [J Stat Phys](#), 2005, 120: 479–509
- 27 Falconer K J. A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers. [J Phys A](#), 1988, 21: L737–L742
- 28 Falconer K J. Dimensions and measures of quasi self-similar sets. [Proc Amer Math Soc](#), 1989, 106: 543–554
- 29 Falconer K J. Bounded distortion and dimension for non-conformal repellers. [Math Proc Cambridge Philos Soc](#), 1994, 115: 315–334
- 30 Falconer K J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley & Sons, 2003
- 31 Fan A, Jiang Y, Wu J. Asymptotic Hausdorff dimensions of Cantor sets associated with an asymptotically non-hyperbolic family. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2005, 25: 1799–1808
- 32 Fang J, Cao Y, Zhao Y. Measure theoretic pressure and dimension formula for non-ergodic measures. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2020, 40: 2767–2789
- 33 Feng D J, Huang W. Lyapunov spectrum of asymptotically sub-additive potentials. [Comm Math Phys](#), 2010, 297: 1–43
- 34 Feng D J, Simon K. Dimension estimates for C^1 iterated function systems and repellers. Part I. [Ergodic Theory Dynam Syst](#), 2023, 43: 2673–2706
- 35 Gatzouras D, Lalley S. Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals. *Indiana Univ Math J*, 1992, 41: 533–568
- 36 Gatzouras D, Peres Y. Invariant measures of full dimension for some expanding maps. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 1997, 17: 147–167
- 37 Gelfert K. Dimension estimates beyond conformal and hyperbolic dynamics. [Dyn Syst](#), 2005, 20: 267–280
- 38 Gelfert K. Repellers for non-uniformly expanding maps with singular or critical points. [Bull Braz Math Soc \(NS\)](#), 2010, 41: 237–257
- 39 Gelfert K. Horseshoes for diffeomorphisms preserving hyperbolic measures. [Math Z](#), 2016, 283: 685–701
- 40 He L F, Lv J F, Zhou L N. Definition of measure-theoretic pressure using spanning sets. [Acta Math Sin \(Engl Ser\)](#), 2004, 20: 709–718
- 41 Hirayama M. An upper estimate of the Hausdorff dimension of stable sets. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2004, 24: 1109–1125
- 42 Horita V, Viana M. Hausdorff dimension of non-hyperbolic repellers. I. Maps with holes. [J Stat Phys](#), 2001, 105: 835–862
- 43 Horita V, Viana M. Hausdorff dimension for non-hyperbolic repellers II: DA diffeomorphisms. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2005, 13: 1125–1152

- 44 Hu H. Dimensions of invariant sets of expanding maps. [Comm Math Phys](#), 1996, 176: 307–320
- 45 Hu H. Box dimensions and topological pressure for some expanding maps. [Comm Math Phys](#), 1998, 191: 397–407
- 46 Huang W, Yi Y. A local variational principle of pressure and its applications to equilibrium states. [Israel J Math](#), 2007, 161: 29–74
- 47 Huang W, Zhang P. Pointwise dimension, entropy and Lyapunov exponents for C^1 map. *Trans Amer Math Soc*, 2012, 364: 6355–6370
- 48 Katok A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1980, 51: 137–173
- 49 Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 54. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
- 50 Kenyon R, Peres Y. Measures of full dimension on affine-invariant sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1996, 16: 307–323
- 51 Ledrappier F, Young L. The metric entropy of diffeomorphisms, II: Relations between entropy, exponents and dimension. *Ann of Math (2)*, 1985, 122: 540–574
- 52 Lian Z, Ma X. Existence of periodic orbits and horseshoes for mappings in a separable Banach space. [J Differential Equations](#), 2020, 269: 11694–11738
- 53 Lian Z, Young L-S. Lyapunov exponents, periodic orbits and horseshoes for mappings of Hilbert spaces. *Ann Henri Poincaré*, 2011, 12: 1081–1108
- 54 Lian Z, Young L-S. Lyapunov exponents, periodic orbits, and horseshoes for semiflows on Hilbert spaces. *J Amer Math Soc*, 2012, 25: 637–665
- 55 Luzia N. A variational principle for the dimension for a class of non-conformal repellers. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2006, 26: 821–845
- 56 Luzia N. Measure of full dimension for some nonconformal repellers. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 26: 291–302
- 57 Ma X. Existence of periodic orbits and horseshoes for semiflows on a separable Banach space. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2022, 61: 217
- 58 McCluskey H, Manning A. Hausdorff dimension for horseshoes. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 1983, 3: 251–260
- 59 Mendoza L. Ergodic attractors for diffeomorphisms of surfaces. *J Lond Math Soc (2)*, 1988, 37: 362–374
- 60 Misiurewicz M, Szlenk W. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math*, 1980, 67: 45–63
- 61 Mummert A. The thermodynamic formalism for almost-additive sequences. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2006, 16: 435–454
- 62 Palis J, Viana M. On the continuity of Hausdorff dimension and limit capacity for horseshoes. In: *Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1331. Berlin: Springer, 1988, 150–160
- 63 Persson T, Schmeling J. Dyadic diophantine approximation and Katok’s horseshoe approximation. *Acta Arith*, 2008, 132: 205–230
- 64 Pesin Y. Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications. *Chicago Lectures in Mathematics*. Chicago: Chicago Univ Press, 1997
- 65 Pollicott M, Weiss H. The dimensions of some self-affine limit sets in the plane and hyperbolic sets. [J Stat Phys](#), 1994, 77: 841–866
- 66 Przytycki F, Urbański M. Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, no. 371. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010
- 67 Qu C. An upper bound for the box dimension of the hyperbolic dynamics via unstable topological pressure. *Nonlinear Anal*, 2024, 245: 113560
- 68 Qu C, Wang J. Exceptional sets for average conformal dynamical systems. *Chaos Solitons Fractals*, 2022, 161: 112351
- 69 Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^v$ action satisfying expansiveness and specification. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 185: 237–251
- 70 Ruelle D. Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1982, 2: 99–107
- 71 Rugh H. On the dimensions of conformal repellers: Randomness and parameter dependency. *Ann of Math (2)*, 2008, 168: 695–748
- 72 Sánchez-Salas F J. Ergodic attractors as limits of hyperbolic horseshoes. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2002, 22: 571–589
- 73 Takens F. Limit capacity and Hausdorff dimension of dynamically defined Cantor sets. In: *Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1331. Berlin: Springer, 1988, 196–212
- 74 Urbański M, Wolf C. Ergodic theory of parabolic horseshoes. [Comm Math Phys](#), 2008, 281: 711–751
- 75 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. New York: Springer-Verlag, 1982
- 76 Wang J, Cao Y, Zhao Y. Dimension estimates in non-conformal setting. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2014, 34: 3847–3873
- 77 Wang J, Cao Y, Zhao Y. Dimension estimates and approximation in non-uniformly hyperbolic systems. [Ergodic](#)

- [Theory Dynam Systems](#), 2024, 44: 2975–3001
- 78 Wang J, Cao Y, Zou R. The approximation of uniform hyperbolicity for C^1 -diffeomorphisms with hyperbolic measures. [J Differential Equations](#), 2021, 275: 359–390
- 79 Wang J, Qu C, Cao Y. Dimension approximation for diffeomorphisms preserving hyperbolic SRB measures. [J Differential Equations](#), 2022, 337: 294–322
- 80 Wang J, Wang J, Cao Y, et al. Dimensions of C^1 average conformal hyperbolic sets. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2020, 40: 883–905
- 81 Yang Y. Horseshoes for $C^{1+\alpha}$ mappings with hyperbolic measures. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2015, 35: 5133–5152
- 82 Yayama Y. Dimensions of compact invariant sets of some expanding maps. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2009, 29: 281–315
- 83 Young L S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 1982, 2: 109–129
- 84 Zhang G. Variational principles of pressure. [Discrete Contin Dyn Syst](#), 2009, 24: 1409–1435
- 85 Zhang Y. Dynamical upper bounds for Hausdorff dimension of invariant sets. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 1997, 17: 739–756
- 86 Zhao Y, Cao Y, Ban J. The Hausdorff dimension of average conformal repellers under random perturbation. [Nonlinearity](#), 2009, 22: 2405–2416
- 87 Zhao Y, Zhang L, Cao Y. The asymptotically additive topological pressure on the irregular set for asymptotically additive potentials. [Nonlinear Anal](#), 2011, 74: 5015–5022
- 88 Zou R, Cao Y. Horseshoes and Lyapunov exponents for Banach cocycles over non-uniformly hyperbolic systems. [Ergodic Theory Dynam Systems](#), 2024, 44: 674–704

Dimension theory in non-conformal smooth systems

Yongluo Cao & Yun Zhao

Abstract Compared with the relatively complete dimension theory established in conformal smooth dynamical systems, i.e., the Bowen equation and the variational principle of dimension, it still lacks today a satisfactory general approach for the dimension theory in non-conformal smooth dynamical systems. In this paper, we survey the recent results in the dimension theory of non-conformal smooth dynamical systems, including the dimension of repellers and hyperbolic sets of smooth maps as well as the dimension of measures supported on these invariant sets, and especially including the Bowen equation, the existence of measures of maximal or full dimension and dimension approximation.

Keywords topological pressure, measure theoretic pressure, dimension, hyperbolic approximation

MSC(2020) 37C45, 37C05, 37D35, 37C70, 37D25, 28A80

doi: 10.1360/SSM-2024-0344