

一个地图投影直角坐标变网格差分模式的设计[※]

廖洞贤

(南京气象学院气象学系, 南京 210044)

摘 要 设计了一个以均匀网格差分模式为基础的变网格差分模式, 并证明: 如前者满足一定条件并具有质量和能量守恒性质, 以及与连续情况一致的动、位能之间的转换关系, 则变网格模式也同样具有, 而且, 把前者改变为后者增加的运算量很小, 也非常方便。

关键词 地图投影直角坐标, 变网格, 差分模式

分类号 p437

嵌套网格预报已应用 30 多年了。就目前而论, 这种预报还存在如下问题:

- (1) 可用时效短, 一般仅约 48 小时。
- (2) 可用预报范围比计算范围小。
- (3) 粗、细网格计算不协调导致的波速和群速差会产生寄生波, 歪曲能量传播, 甚至使计算不稳定。
- (4) 为避免计算不协调采用的过渡区和松弛方法有很多经验成分, 往往不是过分就是不足。
- (5) 一般只有水平嵌套, 没有垂直嵌套, 从而, 易出现水平分辨率和垂直分辨率的不协调, 导致虚假重力波的产生。

其中, 第 3 个问题是关键性的。粗、细网格计算的不协调, 主要是由相应截断误差较大差异造成的。如果从粗(细)网格到细(粗)网格不是突然变化, 而是逐步过渡, 即应当认为相应的波幅、波速和群速也是逐渐改变的, 从而引起的不协调就不会像嵌套网格模式中那样严重。为此, 从 70 年代起, 提出了许多构造“变网格”的方法和相应的计算方法, 如 Sundquest(1970)等^[1]。但是在这些方法中, 只有 Staniforth 等用有限元方法建立的模式(1978)^[2]和 Courtier 等用谱方法建立的模式(1988)^[3]分别在加拿大和法国投入了业务, 其他还未见应用于实际工作的报导。本文将在 Staniforth 等所用网格的基础上建立差分模式。做法是: 在已有均匀网格差分模式中选择满足一定条件, 从而具有整体质量和能量守恒, 以及与连续情况一致的、位能转换关系的模式, 通过本文的方法, 改造成为具有同样性质的变网格差分模式。

尽管近年来已兴起一种所谓“自适应网格”的模式(它能随时间自动调节网格, 以适应天气和环流形势的变化), 其优点明显。但是, 由于这种模式运算量很大, 和对于气候模拟和某些只对固定地区重要的计算, 并不需要自动随时间调节网格, 用变网格就已足够。因此, 设计变网格

※ 国家八五攻关 85- 906- 04- 02 课题资助项目
收稿日期: 1995- 11- 05; 改回日期: 1996- 01- 08

模式仍有一定的意义。

1 坐标变换和某些物理量的表达式

1.1 坐标变换

在地图投影直角坐标 $xy\sigma$ 中, 采用变换

$$\bar{x} = \bar{x}(x); \quad \bar{y} = \bar{y}(y); \quad \bar{\sigma} = \sigma; \quad \bar{t} = t$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

于是, 面积元 dA 和微分 dx, dy 可以表示为

$$dA = \frac{1}{m^2} dx \, dy = \frac{1}{m^2} J \, d\bar{x} d\bar{y} \tag{3}$$

其中

$$J = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$$

而

$$dx = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} d\bar{x} \tag{4}$$

$$dy = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} d\bar{y} \tag{5}$$

且

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 1 \tag{6}$$

易见, 如取 $dx, dy, d\bar{x}, d\bar{y}$ 均大于零, 则 $J > 0$, (3) 式中 J 就可以改写为 J 。

1.2 个别微商

因为

$$u = \frac{1}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\bar{x}}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}; \quad v = \frac{1}{m} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\bar{y}}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$$

而

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dx}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = u \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}; \quad \bar{v} = \frac{1}{m} \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dy}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = v \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$$

故

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + mu \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + mv \frac{\partial A}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \sigma \frac{\partial A}{\partial \sigma}$$

1.3 散度和涡度

记散度和涡度各为 D 和 ζ 且各定义为

$$D = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_n ds \quad \text{和} \quad \zeta = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_s ds$$

其中 v_n 和 v_s 各是闭合曲线 C 的外法线方向和切线方向风的分量, ds 是 C 的线元, 积分沿 C 的反时针方向为正, ΔA 是 C 所围成的面积。

设 C 在 $\bar{x}\bar{y}$ -坐标中是一矩形, 其边长为 $\Delta\bar{x}$ 和 $\Delta\bar{y}$, 则图 1 和图 2 表示了矩形 C 中的 D 和 ζ

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\substack{\Delta\bar{x} \rightarrow 0 \\ \Delta\bar{y} \rightarrow 0}} \frac{1}{m^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \Delta\bar{x} \Delta\bar{y}} \{ \Delta\bar{x} (\frac{u}{m}) \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \Delta\bar{y} + \Delta\bar{y} (\frac{v}{m}) \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \Delta\bar{x} \} \\ &= m^2 [\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\frac{u}{m}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\frac{v}{m}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}] \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \lim_{\substack{\Delta\bar{x} \rightarrow 0 \\ \Delta\bar{y} \rightarrow 0}} \frac{1}{m^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \Delta\bar{x} \Delta\bar{y}} \{ \Delta\bar{x} (\frac{v}{m}) \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \Delta\bar{y} - \Delta\bar{y} (\frac{u}{m}) \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \Delta\bar{x} \} \\ &= m^2 [\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\frac{v}{m}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\frac{u}{m}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}] \end{aligned} \tag{8}$$

$(\frac{v}{m} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \Delta\bar{y}) \bar{y} + \Delta\bar{y}$

$(\frac{u}{m} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \Delta\bar{y}) \bar{y} - \Delta\bar{y}$

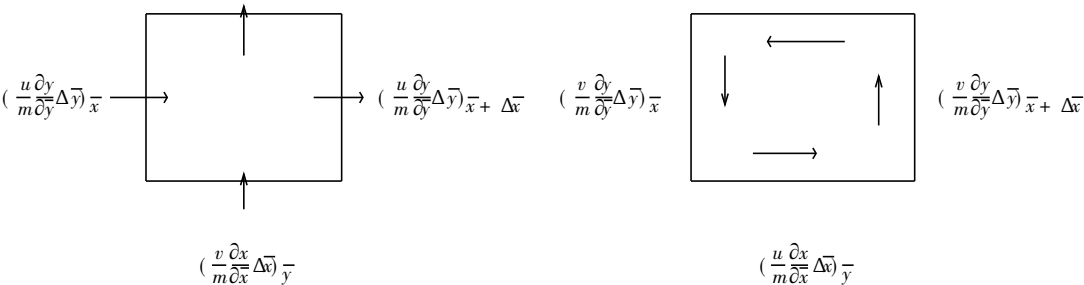


图 1 在矩形 C 中的散度
Fig. 1 Divergence in the rectangle C

图 2 在矩形 C 中的涡度
Fig. 2 Vorticity in the rectangle C

易见, (7)、(8) 式和直接用关系式 (1)、(2) 从 D 和 ζ 在 xy -坐标中的微分形式推得的结果是一样的。

1. 4 变网格和计算网格

为了方便, 约定:

- (1) 在 $\bar{x}\bar{y}$ -平面上构造均匀网格, 使其其中 $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} =$ 常数, 而与之对应的 xy -网格为变网格(如图 3 所示)。两种网格总点数相同, 沿 x 和 $\bar{x}$ 方向, 以及 y 和 $\bar{y}$ 方向的点数也相同; 而且, 对于这两种网格, 任一网格点下标均用同一的 (i, j) 表示。
- (2) 所有计算均在 $\bar{x}\bar{y}\sigma\tau$ -坐标中进行。

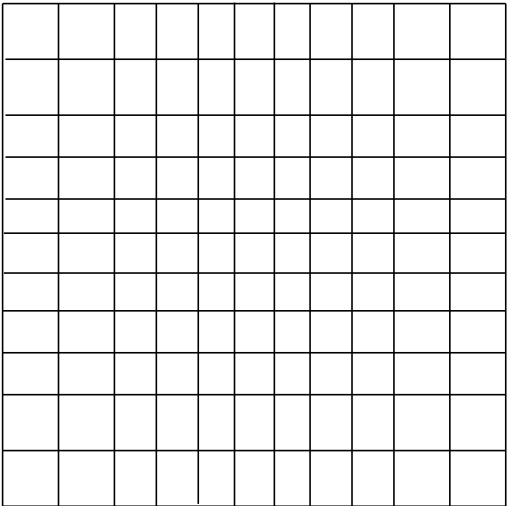


图 3 变网格示意
Fig. 3 Schematic diagram of variable resolution

2 控制方程

在 $xy\sigma$ -坐标中的动力和热力学方程是

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -m(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + RT \frac{\partial np_s}{\partial x}) + \tilde{f}_v + F_u \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -m(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + RT \frac{\partial np_s}{\partial y}) - \tilde{f}_u + F_v \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \frac{\omega \alpha}{c_p} + \frac{Q}{c_p} + F_T \quad (11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial q}{\partial \sigma} = S + F_q \quad (12)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + m^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{p_s u}{m}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{p_s v}{m})] + \frac{\partial}{\partial \sigma} p_s \sigma = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma} \quad (14)$$

$$p \alpha = RT \quad (15)$$

其中, $\sigma = \frac{p}{p_s}$; p_s 是地面气压; $\omega = \frac{dp}{dt} = \sigma \frac{dp_s}{dt}$; S 是水汽源(或汇); $\tilde{f} = f + m^2[v \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{m}) - u \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{m})]$; 其他都是气象中常用的符号。

引用垂直边界条件: 在 $\sigma = 0, 1$ 处

$$\sigma = 0 \quad (16)$$

这样, 还有

$$\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} = - \int m^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{p_s u}{m}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{p_s v}{m})] d\sigma \quad (17)$$

而在 $\bar{x}\bar{y}\sigma$ -坐标中方程(9)~(13)和(17)成为

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -m(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{x}} + RT \frac{\partial np_s}{\partial \bar{x}}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \hat{f}_v + F_u \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -m(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \bar{y}} + RT \frac{\partial np_s}{\partial \bar{y}}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - \hat{f}_u + F_v \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \frac{\omega \alpha}{c_p} + \frac{Q}{c_p} + F_T \quad (20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} + m(u \frac{\partial q}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}) + \sigma \frac{\partial q}{\partial \sigma} = S + F_q$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} = - \int m^2[\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\frac{p_s u}{m}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\frac{p_s v}{m}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}] d\sigma \quad (21)$$

而方程(14)和(15)的形式不变。这里

$$\hat{f} = f + m^2[v \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\frac{1}{m}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\frac{1}{m}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}]$$

3 模式大气的整体性质

3.1 连续的情形

众所周知, 在绝热无耗散且气象要素连续的情况, 从方程(9)~(11)和(13)~(15), 以及(17)式和条件(16)式, 在水平方向周期边界条件下, 可以推得

(1) 质量守恒

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_s \, dA = 0 \tag{22}$$

(2) 能量守恒

$$\frac{\partial}{\partial t} (P + K) = 0 \tag{23}$$

且

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \frac{1}{g} \left\{ \iint \frac{p_s}{m^2} \alpha \omega \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{Q}_{p_s} \frac{1}{m^2} dA \right\} \tag{24}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{g} \left\{ \iint \frac{p_s}{m^2} \alpha \omega \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{Q}_{p_s} \frac{1}{m^2} dA \right\} \tag{25}$$

其中, A 表示水平计算域; $K = \frac{1}{g} \iint \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \frac{p_s}{m^2} d\sigma dA$; $P = \frac{1}{g} \left\{ \iint c_p T \frac{p_s}{m^2} d\sigma dA + \int \mathcal{Q}_{\frac{p_s}{m^2}} dA \right\}$ 。现证明在绝热无耗散、水平周期边界条件(16)下,从 $\bar{x}\bar{y}\sigma$ -坐标描写模式大气的方程(18)~(20)、(21)以及(14)、(15)等,仍然可以推得和质量、能量守恒关系式(22)、(23)以及动、位能之间的转换关系式(24)、(25)相类似的关系式。

(1) 质量守恒 对连续方程(21)作 σ 从 1 到 0 的全场积分并注意关系式(6),有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_s \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} = 0 \tag{26}$$

(2) 能量守恒 用从运算 $p_s u \cdot (18) + p_s v \cdot (19)$ 得到的方程和乘以 $\hat{K} (= (u^2 + v^2)/2)$ 的连续方程(21)相加,通过一系列运算可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (p_s \hat{K}) + m^2 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\hat{K} + \mathcal{Q} \frac{p_s u}{m} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\hat{K} + \mathcal{Q} \frac{p_s v}{m} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}}) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\hat{K} + \mathcal{Q} p_s \sigma + \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathcal{Q} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + p_s \alpha \omega = 0 \end{aligned}$$

作运算 $c_p p_s \cdot (20) + c_p T \cdot (21)$ 还有

$$\frac{\partial}{\partial t} c_p T p_s + m^2 \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\frac{c_p T p_s u}{m}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\frac{c_p T p_s v}{m}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} c_p T p_s \sigma = p_s \alpha \omega$$

故

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial t} = - \frac{1}{g} \left\{ \iint p_s \alpha \omega \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{Q}_{p_s} \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} \right\} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = \frac{1}{g} \left\{ \iint p_s \alpha \omega \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} d\sigma + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{Q}_{p_s} \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} \right\} \tag{28}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{P} + \hat{K}) = 0 \tag{29}$$

其中

$$\hat{K} = \frac{1}{g} \iint p_s \hat{K} \frac{1}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} d\sigma \tag{30}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{g} \left\{ \iint c_p T \frac{p_s}{m^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} d\sigma + \int \mathcal{Q}_{\frac{p_s}{m^2}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} \right\} \tag{31}$$

3.2 离散的情形

为了使讨论范围较广,我们把在均匀网格绝热无耗散情况下方程(9)~(11)、(13)、(14)的差分形式写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1(u) + L_2(u) + L_3(u) + G_x(\mathcal{Q}) + G_x(p_s) + \hat{f} v \quad (32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1(v) + L_2(v) + L_3(v) + G_y(\mathcal{Q}) + G_y(p_s) - \hat{f} u \quad (33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = L_1(T) + L_2(T) + L_3(T) + \frac{\alpha \mathcal{Q}}{c_p} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = L_4(u) + L_5(v) + L_6(\hat{\sigma}) \quad (35)$$

$$\frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \sigma} = - \frac{RT}{\sigma} \quad (36)$$

其中, $L_1(F)$ 、 $L_2(F)$ 、 $L_3(F)$ 、 $L_4(u)$ 、 $L_5(v)$ 、 $L_6(\hat{\sigma})$ 、 $G_x(\mathcal{Q})$ 、 $G_y(\mathcal{Q})$ 、 $G_x(p_s)$ 、 $G_y(p_s)$ 、 $\delta \mathcal{P} \delta \sigma$ 各是 $-mu \frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $-mv \frac{\partial F}{\partial y}$ 、 $-\hat{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ 、 $-m^2 \frac{\partial(p_s u/m)}{\partial x}$ 、 $-m^2 \frac{\partial(p_s v/m)}{\partial y}$ 、 $-p_s \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma}$ 、 $-m \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$ 、 $-m \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}$ 、 $-mRT \frac{\partial np_s}{\partial x}$ 、 $-mRT \frac{\partial np_s}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma}$ 的差分形式; F 表示 u 、 v 或 T 。如果下列条件满足

$$(1) \quad \sum_{\kappa} L_4(u) \frac{\Delta x}{m^2} = \sum_{\kappa} L_5(v) \frac{\Delta y}{m^2} = \sum_{\kappa} L_6(\hat{\sigma}) \Delta \sigma = 0 \quad (37)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} & \sum_{\kappa} \{p_s [uL_1(u) + vL_1(v)] + \hat{K} L_4(u)\} \frac{\Delta x}{m^2} \\ &= \sum_{\kappa} \{p_s [uL_2(u) + vL_2(v)] + \hat{K} L_5(v)\} \frac{\Delta y}{m^2} \\ &= \sum_{\kappa} \{p_s [uL_3(u) + vL_3(v)] + \hat{K} L_6(v)\} \Delta \sigma = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$(3) \quad \sum_{\kappa} p_s u G_x(\mathcal{Q}) \frac{\Delta x}{m^2} = - \sum_{\kappa} \mathcal{Q} L_4(u) \frac{\Delta x}{m^2} \quad (39)$$

$$(4) \quad \sum_{\kappa} p_s v G_y(\mathcal{Q}) \frac{\Delta y}{m^2} = - \sum_{\kappa} \mathcal{Q} L_5(v) \frac{\Delta y}{m^2} \quad (40)$$

$$(5) \quad - \sum_{\kappa} \mathcal{Q} [L_4(u) + L_5(v)] \Delta \sigma \approx \mathcal{Q} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma} + \sum_{\kappa} p_s \alpha(\sigma) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma} + p_s \hat{\sigma} \Delta \sigma \quad (41)$$

$$(6) \quad \begin{aligned} c_p \sum_{\kappa} [p_s L_1(T) + T L_4(u)] \frac{\Delta x}{m^2} &= c_p \sum_{\kappa} [p_s L_2(T) + T L_5(v)] \frac{\Delta y}{m^2} \\ &= c_p \sum_{\kappa} [p_s L_3(T) + T L_6(\hat{\sigma})] \Delta \sigma = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

则在绝热无耗散、水平周期边界条件和垂直边界条件(16)式下, 易证有和(26)、(27)~(31)式相似的关系成立, 但积分号须用求和号代替, 也就是说, 均匀网格差分方程组(32)~(36)是质量和能量守恒的, 并有和连续情况一致的动、位能转换关系。

下面将证明在同样条件下, 我们所构造的变网格模式大气仍然是质量和能量守恒的。

首先, 在绝热无耗散情况下设方程(18)~(20)、(14)、(21)的差分形式是

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \hat{L}_1(u) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{L}_2(u) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} + L_3(u) + [\hat{G}_x(\mathcal{Q}) + \hat{G}_x(p_s)] \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{f} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \hat{L}_1(v) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{L}_2(v) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} + L_3(v) + [\hat{G}_y(\mathcal{Q}) + \hat{G}_y(p_s)] \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} - \hat{f} u \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \hat{L}_1(T) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{L}_2(T) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} + L_3(T) + \frac{\alpha \mathcal{Q}}{c_p} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} = \hat{L}_4(u) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{L}_5(v) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} + L_6(\sigma) \tag{43}$$

$$\frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \sigma} = - \frac{RT}{\sigma}$$

其中 $\hat{L}_1(F)$ 、 $\hat{L}_2(F)$ 、 $\hat{G}_x(\mathcal{P})$ 、 $\hat{G}_x(p_s)$ 、 $\hat{L}_4(u)$ 、 $\hat{L}_5(v)$ 等是在 $\bar{x}\bar{y}$ -平面的均匀网格上, 用和 $L_1(F)$ 、 $L_2(F)$ 、 $G_x(\mathcal{P})$ 、 $G_x(p_s)$ 、 $L_4(u)$ 、 $L_5(v)$ 等同样形式构造的差分格式, $\frac{\delta \bar{x}}{\delta x}$ 、 $\frac{\delta \bar{y}}{\delta y}$ 是 $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$ 的不等距差商

$$\frac{\delta \bar{x}}{\delta x} = \frac{a_1 \bar{x}_{i+1,j} + b_1 \bar{x}_{i-1,j}}{a_1 + b_1} \bar{x}_{ij}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta y} = \frac{a_2 \bar{y}_{i,j+1} + b_2 \bar{y}_{i,j-1}}{a_2 + b_2} \bar{y}_{ij}$$

而

$$a_1 = \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

$$b_1 = - \frac{x_{i+1} - x_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

$$a_2 = \frac{y_j - y_{j-1}}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})}$$

$$b_2 = - \frac{y_{j+1} - y_j}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})}$$

于是, 根据连续方程(43)对 σ 从 0 到 1 及全计算域求和, 则可得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma} \sum_{ij\kappa} p_s \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{ij\kappa} \{ \hat{L}_4(u) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} + \hat{L}_5(v) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \} \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta \sigma \end{aligned} \tag{44}$$

因为在有限差分情况下, 从(4)和(5)式, 关系 $\Delta x_i = (\frac{\delta x}{\delta \bar{x}})_i \Delta \bar{x}$, $\Delta y_j = (\frac{\delta y}{\delta \bar{y}})_j \Delta \bar{y}$ 成立, 而从(6)式, 如取

$$(\frac{\delta x}{\delta \bar{x}})_i = 1 \setminus (\frac{\delta \bar{x}}{\delta x})_i, \quad (\frac{\delta y}{\delta \bar{y}})_j = 1 \setminus (\frac{\delta \bar{y}}{\delta y})_j$$

并注意 $\hat{L}_4(u)$ 、 $\hat{L}_5(v)$ 和 $L_4(u)$ 、 $L_5(v)$ 的一致性, 则(44)式成为

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \sum_{ij\kappa} p_s \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{ij\kappa} \{ \hat{L}_4(u) \Delta \bar{x} \Delta y_j + \hat{L}_5(v) \Delta \bar{y} \Delta x_i \} \frac{\Delta \sigma}{m^2} = 0$$

即大气整体质量守恒。

类似地可以证明如下诸式成立

$$(1) \quad \sum_{\tau} \hat{L}_4(u) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} \Delta x_i \frac{1}{m^2} = \sum_{\tau} \hat{L}_4(u) \frac{1}{m^2} \Delta \bar{x} = 0$$

同理, 还有

$$\sum_{\tau} \hat{L}_5(v) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \Delta y_j \frac{1}{m^2} = 0$$

$$(2) \quad \sum_{\tau} \{ p_s [u \hat{L}_1(u) + v \hat{L}_1(v)] + \hat{K} \hat{L}_4(u) \} \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} \Delta x_i \frac{1}{m^2} = 0$$

同理, 还有

$$\begin{aligned}
 & \sum \{ p_s [u \hat{L}_2(u) + v \hat{L}_2(v)] + \hat{K} \hat{L}_5(v) \} \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \Delta y_j \frac{1}{m^2} = 0 \\
 (3) \quad & \sum p_s u \hat{G}_x(\varphi) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} \frac{\Delta x_i}{m^2} = \sum p_s u \hat{G}_x(\varphi) \frac{\Delta \bar{x}}{m^2} \\
 & = - \sum \varphi \hat{L}_4(u) \frac{\Delta \bar{x}}{m^2} = - \sum \varphi \hat{L}_4(u) \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} \frac{\Delta x_i}{m^2} \\
 (4) \quad & \sum p_s v \hat{G}_y(\varphi) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \frac{\Delta y_j}{m^2} = - \sum \varphi \hat{L}_5(v) \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \frac{\Delta y_j}{m^2} \\
 (5) \quad & \sum [p_s \hat{L}_1(T) + T \hat{L}_4(u)] \frac{\delta \bar{x}}{\delta x} \frac{\Delta x_i}{m^2} = \sum [p_s \hat{L}_2(T) + T \hat{L}_5(v)] \frac{\delta \bar{y}}{\delta y} \frac{\Delta y_j}{m^2} = 0
 \end{aligned}$$

于是,经过一系列运算,最后得到和在连续情况下一致的能量和能量转换关系。即

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} &= - \sum_{j \neq k} p_s \omega \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta \sigma - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j \neq k} \varphi p_s \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \\
 \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} &= \sum_{j \neq k} p_s \omega \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta \sigma + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j \neq k} \varphi p_s \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \\
 \text{而 } \frac{\partial}{\partial t} (\hat{P} + \hat{K}) &= 0, \text{ 其中}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{K} &= \sum_{j \neq k} \hat{K} \frac{p_s}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta \sigma \\
 \hat{P} &= \sum_{j \neq k} c_p T p_s \frac{1}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta \sigma + \sum_{j \neq k} \varphi \frac{p_s}{m^2} \Delta x_i \Delta y_j
 \end{aligned}$$

4 讨 论

我们设计了一个地图投影直角坐标变网格差分模式,还证明了:满足条件(37)~(42)式的同坐标均匀网格差分模式(一般的具有质量、能量守恒性质的差分模式均满足这些条件),其相应的变网格差分模式也满足这些条件,并且是质量、能量守恒,有和在连续情况下一致的动、位能之间的转换关系。而且,改造均匀网格差分模式为变网格差分模式十分方便,只要在一些项中乘以 $\frac{\delta \bar{x}}{\delta x}, \frac{\delta \bar{y}}{\delta y}$ 即可,从而,有可能从现有的同坐标的差分模式中选择一些模式来设计变网格模式。但是,所设计的模式还存在如下问题,须在今后加以解决。

(1) 截断误差各向异性 从图3可以看出:除计算域中心部分外,一般都是矩形网格,有的 Δx_i 和 Δy_j 之比远大于或小于1,导致了截断误差各向异性,使波动传播方向受到歪曲。不过,这主要出现在边界附近,对中心区影响不大。还可以看出:如果采用Schmidt(1977)、Courtier(1988)等所提出的球对球正形投影,这个问题可以解决。

(2) 物理过程参数化 我们知道,物理过程参数化是为次网格物理过程而设计的,对于网格过程,用不着参数化。而且,随着分辨率的变化,参数化也受到影响。在变网格情况下,在某些地区,则应考虑次网格过程,问题变得很复杂。因此,在变网格基础上,设计适当的参数化物理过程,或在现有基础上进行改造,仍待解决。

(3) 运算量 根据CFL判据,时间步长 Δt 的选取和网格距成反比,要使计算域全场稳定, Δt 须按最小的 Δx_i 或 Δy_j 来取,从而,使 Δt 很小,使运算量大增。而对于某些地区, Δt 本来是用不着取得那样小的。看来,改变这种状况是变网格预报能否有效地用到业务中去的一个关键。要达到这个目的,办法是有的,如采用半拉格朗日方法,使时间步长增大等;也可以采用分

区的方法, 使分辨率较接近的分在同一个区。虽然各区所取的 Δt 不同, 但在区际边界或其附近, 在同一时刻进行信息交换, 仍然可以使计算不断进行下去, 而又达到显著减少运算时间的目的。

参 考 文 献

- 1 Sundquist H, Veronis G. A simple finite-difference grid with non-constant intervals. *Tellus*, 1970, 22(1): 26~31
- 2 Staniforth A N, Mitchell H L. A variable resolution finite-element technique for regional forecasting with the primitive equations. *Mon Wea Rev*, 1978, 106(2): 439~447
- 3 Courtier P, Geleyn J F. A global numerical weather prediction model with variable resolution: Application to the shallow water equations. *QJR Meteor Soc*, 1988, 114(4): 1321~1346

DESIGN OF A GRIDPOINT MODEL WITH VARIABLE RESOLUTION IN CONFORMAL PROJECTION CARTESIAN COORDINATES

Liao Dongxian

(Department of Meteorology, NIM, Nanjing 210044)

Abstract Based upon a uniform counterpart, a gridpoint model with variable resolution is presented. It has been proved that if the former model satisfies certain conditions, has properties of mass and energy conservation and keeps the conversion between kinetic and potential energy consistent to that in the continuous transformation, then the latter model will possess the same properties and conversion as well. Further, transforming the former into the latter needs a small amount of computational operation.

Keywords conformal projection cartesian coordinates, variable resolution, gridpoint model